Le principe de Hasse pour les espaces homogènes : réduction au cas des stabilisateurs finis

Cyril Demarche et Giancarlo Lucchini Arteche

À la mémoire de Jean-Claude Douai

Résumé

Une conjecture de Colliot-Thélène établit que l'obstruction de Brauer-Manin est la seule obstruction au principe de Hasse et à l'approximation faible pour les espaces homogènes des groupes linéaires. Nous montrons que la question peut être réduite au cas des espaces homogènes de $\mathrm{SL}_{n,k}$ à stabilisateurs finis en suivant les travaux du deuxième auteur sur l'approximation faible.

Mots clés : espaces homogènes, gerbes, principe de Hasse, obstruction de Brauer-Manin.

1 Introduction

Soit k un corps de nombres et considérons une famille de k-variétés lisses et géométriquement intègres. On dit qu'une telle famille vérifie le principe de Hasse, ou principe local-global, si pour toute variété X dans cette famille on a l'implication suivante :

$$X(k_v) \neq \emptyset, \forall\, v \in \Omega_k \;\Rightarrow\; X(k) \neq \emptyset, \tag{PH}$$

où Ω_k désigne l'ensemble des places de k et k_v désigne le complété correspondant à la place v. La question de la vérification du principe local-global est déjà classique en géométrie arithmétique et remonte aux résultats de Hasse lui-même sur les quadriques au début du XX$^{\text{e}}$ siècle.

Soit maintenant G un k-groupe algébrique linéaire que l'on suppose connexe. On rappelle qu'un (k-)espace homogène de G est une k-variété X munie d'une k-action de G qui est transitive au niveau des $\bar{k}$-points, où $\bar{k}$ désigne une clôture algébrique de k. Dans ce texte, on s'intéresse au principe de Hasse pour de telles variétés. Notez que les quadriques de Hasse en sont un bel exemple : une quadrique projective Q est en effet un espace homogène du groupe orthogonal de Q.

La question du principe de Hasse pour les espaces homogènes des groupes linéaires a été étudiée par Sansuc et beaucoup plus en détail par Borovoi, avec par exemple la vérification du principe pour les espaces homogènes de groupes semi-simples et simplement connexes à stabilisateur semi-simple ou unipotent (cf. [Bor93]). On sait cependant que ce principe n'est pas vérifié en général et c'est déjà le cas pour les espaces principaux homogènes des groupes semi-simples à partir du moment où on ne les suppose plus simplement connexes, via ce qu'on appelle l'obstruction de Brauer-Manin (cf. [San81]). Dans ce sens, et généralisant les travaux de Sansuc, Borovoi a établi que l'obstruction de Brauer-Manin est la seule obstruction au principe de Hasse pour tout espace homogène X de G à stabilisateur connexe, ou encore à stabilisateur abélien si l'on suppose G simplement connexe (cf. [Bor96]). Autrement dit, on a la propriété

$$\left[\prod_{v\in\Omega_k} X(k_v)\right]^{\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}} \neq \emptyset \Rightarrow X(k) \neq \emptyset. \tag{BMPH}$$

Pour la définition de l'*ensemble de Brauer-Manin* $[\prod_{v\in\Omega_k} X(k_v)]^{\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}} \subset \prod_{v\in\Omega_k} X(k_v)$, voir la section 2.1.

La question pour les stabilisateurs non connexes reste cependant ouverte, notamment pour les stabilisateurs finis où, à part le cas abélien traité par Borovoi et quelques résultats particuliers des auteurs (cf. [Dem10], [LA14]), pratiquement rien n'a été fait autour du principe de Hasse. Il est important de remarquer cependant que, d'après une conjecture de Colliot-Thélène sur les variétés rationnellement connexes, le même résultat est attendu dans le cas général.

Le but de cet article est de montrer que l'on peut réduire cette question générale au cas des espaces homogènes de $\mathrm{SL}_{n,k}$ à stabilisateur fini. Il s'agit donc de suivre la démarche entreprise par le deuxième auteur dans [LA16], qui traitait de l'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible pour des espaces homogènes ayant déjà un point rationnel, i.e. de la propriété

$$X(k) \neq \emptyset \;\Rightarrow\; \overline{X(k)} = \left[\prod_{v\in\Omega_k} X(k_v)\right]^{\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}}, \tag{BMAF}$$

qui établit la densité des k-points d'une variété X dans l'ensemble de Brauer-Manin. Cette densité implique naturellement que l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse est la seule obstruction, mais le fait de supposer l'existence d'un point rationnel rend cette l'implication superflue. C'est pourquoi on a voulu enlever ici cette hypothèse pour obtenir, par exemple, la conséquence suivante du résultat principal de ce texte :

Théorème 1.1 (Conséquence du théorème 5.2)**.** *Si l'obstruction de Brauer-Manin est la seule obstruction au principe de Hasse* (BMPH) *et à l'approximation faible* (BMAF) *pour tout espace homogène de* $\mathrm{SL}_{n,k}$ *à stabilisateur fini, alors il en va de même pour tout espace homogène X d'un groupe linéaire connexe.*

On remarquera que, à la différence du résultat principal de [LA16], qui correspond au même énoncé mais seulement avec la propriété (BMAF), on n'a pas un énoncé analogue avec seulement la propriété (BMPH). Ceci n'est pas un hasard car il se trouve que l'on a besoin d'un minimum de propriétés d'approximation pour que notre preuve, qui utilise à un moment donné la méthode des fibrations, fonctionne. Le mieux qu'on puisse faire pour l'instant est de remplacer (BMAF) par "approximation réelle" dans l'énoncé ci-dessus, ce qui est déjà beaucoup plus faible comme hypothèse, mais non trivial tout de même, cf. le début de la section 5.

La preuve de ce résultat suit les lignes de celle dans [LA16], mais il a fallu généraliser plusieurs outils présents dans celle-ci. Le point crucial est que dans un espace homogène ayant un point rationnel on a affaire à un stabilisateur qui est un k-groupe, alors que dans l'absence potentielle de point rationnel on a seulement un k-lien (et une k-gerbe). La nouveauté principale de ce texte est donc de donner un sens à des phrases telles que "plonger une k-gerbe dans $\mathrm{SL}_{n,k}$" ou "faire agir une k-gerbe sur un tore".

Le plan du texte est le suivant. Dans la section 2 on donne un rappel succinct sur l'obstruction de Brauer-Manin et un rappel plus complet sur la 2-cohomologie non abélienne. On définit notamment, pour K un corps de caractéristique nulle, les notions de K-lien et K-gerbe de plusieurs façons déjà classiques mais qui, à notre connaissance, n'ont jamais été toutes comparées en un seul texte dans la littérature. On conclut cette section en rappelant le lien entre la 2-cohomologie et les espaces homogènes sous ces différents points de vue. La section 3 est consacrée au "plongement d'une K-gerbe dans $\mathrm{SL}_{n,K}$". On démontre au passage une généralisation du "Lemme sans nom" (Cor. 3.7) qui affirme que deux espaces homogènes de $\mathrm{SL}_{n,K}$ ou de $\mathrm{GL}_{n,K}$ ayant la même K-gerbe associée sont K-stablement birationnels. La section 4 s'occupe de l'action d'une K-gerbe sur un tore. On reprend ici ce qui a été fait dans [LA16, §3] autour du lemme d'Ono pour l'étendre à ce nouveau cadre. Enfin, la section 5 est consacrée à l'énoncé et la preuve du théorème principal.

Remerciements Les auteurs tiennent à remercier Olivier Wittenberg et Jean-Louis Colliot-Thélène pour leurs commentaires.

Le premier auteur a bénéficié d'une aide de l'Agence Nationale de la Recherche portant les références ANR-12-BL01-0005 et ANR-15-CE40-0002. Le travail du deuxième auteur a été partiellement soutenu par la FMJH via la bourse No ANR-10-CAMP-0151-02 dans le Programme des Investissements d'Avenir.

2 Préliminaires

Dans tout le texte, on désigne par K un corps de caractéristique nulle, $\bar{K}$ une clôture algébrique et Γ_K le groupe de Galois absolu $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$. On réserve la notation k pour un corps de nombres. On note alors Ω_k l'ensemble des places de k et, pour $v \in \Omega_k$, on note k_v le complété correspondant.

Une K-variété algébrique X sera toujours supposée lisse et géométriquement intègre. Pour A/K une K-algèbre, on note X_A la A-variété obtenue par changement de base. Lorsque $A = \bar{K}$, on utilise plutôt $\bar{X}$ au lieu de $X_{\bar{K}}$ et on garde plus généralement cette notation pour toute variété définie sur $\bar{K}$, même si elle n'admet pas forcément de K-forme. Il en va de même pour les K-groupes algébriques, les K-liens et les K-gerbes, notés respectivement G, L et $\mathcal{M}$ dans la suite.

Si G est un K-groupe algébrique linéaire, on note

- G° la composante neutre de G ;
- $G^{\mathrm{f}} = G/G^\circ$ le groupe (fini) des composantes connexes de G ;
- G^{u} le radical unipotent de G° ;
- $G^{\mathrm{red}} = G^\circ/G^{\mathrm{u}}$, qui est un groupe réductif ;
- $G^{\mathrm{ss}} = D(G^{\mathrm{red}}) = [G^{\mathrm{red}}, G^{\mathrm{red}}]$, qui est un groupe semi-simple ;
- $G^{\mathrm{tor}} = G^{\mathrm{red}}/G^{\mathrm{ss}}$, qui est un tore ;
- $G^{\mathrm{ssu}} = \ker[G^\circ \twoheadrightarrow G^{\mathrm{tor}}]$, qui est une extension de G^{ss} par G^{u} ;
- $G^{\mathrm{torf}} = G/G^{\mathrm{ssu}}$, qui est une extension de G^{f} par G^{tor} ;

qui sont tous définis sur K.

2.1 L'obstruction de Brauer-Manin

Pour des détails sur l'obstruction de Brauer-Manin, on renvoie le lecteur vers [Sko01, §5.1]. Pour une variété X sur un corps de nombres k, on considère le groupe de Brauer non ramifié $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}X$. Ce dernier correspond au groupe de Brauer d'une compactification lisse de X (laquelle existe toujours sur un corps de caractéristique nulle d'après les théorèmes de Nagata et Hironaka). Pour $v \in \Omega_k$, on désigne par $\mathrm{inv}_v : \mathrm{Br}\, k_v \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ l'invariant de Hasse tel qu'il est défini par la théorie du corps de classes locale. On considère le plongement diagonal de $X(k)$ dans le produit $\prod_{v\in\Omega_k} X(k_v)$. Alors on peut définir le sous-ensemble $[\prod_{v\in\Omega_k} X(k_v)]^{\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}}$ des familles de points locaux telles que

$$\sum_{v\in\Omega_k} \mathrm{inv}_v(\alpha(P_v)) = 0, \quad \forall\, \alpha \in \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}X,$$

où $\alpha(P_v) \in \mathrm{Br}\, k_v$ désigne l'application d'évaluation de α au point P_v. Remarquons que la somme, qui a priori est infinie, est en fait finie pour les éléments $\alpha \in \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}X$. L'ensemble $[\prod_{v\in\Omega_k} X(k_v)]^{\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}}$ est dit *ensemble de Brauer-Manin.* La théorie du corps de classes globale nous fournit alors les inclusions suivantes :

$$\overline{X(k)} \subseteq \left[\prod_{v\in\Omega_k} X(k_v)\right]^{\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}} \subseteq \prod_{v\in\Omega_k} X(k_v),$$

où $\overline{X(k)}$ désigne l'adhérence de $X(k)$ dans le produit. Puisque l'approximation faible établit l'égalité entre les ensembles de droite et de gauche, l'ensemble de Brauer-Manin fournit une obstruction à l'approximation faible dès que l'inclusion de droite est stricte. De même, si l'ensemble de Brauer-Manin est vide alors que le produit tout entier ne l'est pas, on trouve une obstruction au principe de Hasse.

Une conjecture de Colliot-Thélène implique l'égalité $\overline{X(k)} = [\prod_{v\in\Omega_k} X(k_v)]^{\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}}$ pour tout espace homogène X d'un groupe linéaire connexe G (cf. [CT03, Intro]). On dit alors que l'obstruction de Brauer-Manin est la seule obstruction au principe de Hasse et à l'approximation faible.

Remarquons pour conclure que ces deux propriétés sont stables par k-stable birationalité. Ceci sera utilisé dans la suite.

2.2 2-cohomologie non abélienne

Soit K un corps de caractéristique nulle. On fixe une clôture algébrique $\bar{K}$ de K et on note $\Gamma_K := \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$. Dans toute la suite, on munit $\mathrm{Spec}\,(K)$ du petit site étale.

Les notions de K-lien et de K-gerbe sont importantes pour définir et étudier la cohomologie galoisienne en degré 2 des groupes algébriques non commutatifs. On présente ici plusieurs points de vue différents, et néanmoins équivalents, sur ces notions, que l'on utilisera dans la suite du texte.

2.2.1 Liens

On dispose de deux notions de K-lien : la notion abstraite de Giraud (cf. [Gir71, IV.1]) et la version concrète de Borovoi (cf. [Bor93, §1]), dont une première version avait été présentée par Springer dans [Spr66] et dont la généralisation aux corps de caractéristique positive se trouve dans [FSS98].

Liens au sens de Giraud. On considère la catégorie fibrée (et même scindée) sur le petit site étale de $\mathrm{Spec}\, K$, notée $\underline{\mathrm{LI}}(K)$, définie de la façon suivante : la catégorie fibre en $\mathrm{Spec}\, A$ pour une K-algèbre étale A a pour objets les faisceaux en groupes sur $\mathrm{Spec}\, A$, et si H et G sont des A-faisceaux en groupes, un morphisme de H vers G dans $\underline{\mathrm{LI}}(K)(A)$ est une section sur $\mathrm{Spec}\, A$ du faisceau quotient $\underline{\mathrm{Int}}(G)\backslash\underline{\mathrm{Hom}}_{A\text{-gr}}(H,G)$. On définit alors le champ (scindé) des K-liens, noté $\underline{\mathrm{LIENS}}(K)$, comme le champ associé au préchamp $\underline{\mathrm{LI}}(K)$. Un lien sur $\mathrm{Spec}\, K$ est alors un objet de la catégorie fibre $\underline{\mathrm{Liens}}(K)$ de $\underline{\mathrm{LIENS}}(K)$ en $\mathrm{Spec}\, K$. On dispose en particulier d'un morphisme de K-champs (scindés)

$$\underline{\mathrm{lien}} : \underline{\mathrm{FAISCGR}}(K) \to \underline{\mathrm{LIENS}}(K),$$

qui à un faisceau en groupes G associe le lien, noté $\underline{\mathrm{lien}}(G)$, défini par ce faisceau.

Pour la suite, on note également $\underline{\mathrm{Lialg}}(K)$ la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Liens}}(K)$ dont les objets sont les liens sur $\mathrm{Spec}\, K$ dont l'image dans $\underline{\mathrm{Liens}}(\bar{K})$ est dans l'image essentielle de $\underline{\mathrm{lien}} : \underline{\mathrm{Gralg}}(\bar{K}) \to \underline{\mathrm{Liens}}(\bar{K})$ (où $\underline{\mathrm{Gralg}}(\bar{K})$ est la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Faiscgr}}(\bar{K})$ dont les objets sont les $\bar{K}$-groupes algébriques).

On remarquera que le préchamp $\underline{\mathrm{LI}}(\bar{K})$ est déjà un champ et donc le foncteur $\underline{\mathrm{lien}}$: $\underline{\mathrm{Gralg}}(\bar{K}) \to \underline{\mathrm{Liens}}(\bar{K})$ est bijectif sur les objets. Cela découle facilement du fait que toute $\bar{K}$-algèbre étale est un produit direct de copies de $\bar{K}$ et de [Gir64, Cor. 9.29]. Ce dernier résultat nous dit en outre qu'une donnée de descente sur une K-algèbre étale $A = \prod_{i\in I} K_i$ avec K_i/K des extensions de corps correspond à des données de descente respectives sur chacun des K_i. On en déduit que pour étudier les champs sur le petit site étale de $\operatorname{Spec} K$, il suffit de se restreindre aux extensions finies de K (qui sont toutes séparables car la caractéristique est nulle).

Liens au sens de Springer-Borovoi. Présentons maintenant la seconde notion de K-lien. Soit $\bar{G}$ un $\bar{K}$-groupe algébrique. Rappelons (cf. [Bor93, §1] ou encore [FSS98, §1]) que le groupe $\operatorname{SAut}(\bar{G}/K)$ des automorphismes semi-algébriques de $\bar{G}$ sur K (noté aussi $\operatorname{SAut}(\bar{G})$ lorsque K est sous-entendu) est formé des diagrammes commutatifs de la forme

$$\begin{tikzcd} \bar{G} \arrow[r, "s"] \arrow[d] & \bar{G} \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} \bar{K} \arrow[r, "\operatorname{Sp} \sigma^{-1}"] & \operatorname{Spec} \bar{K}, \end{tikzcd}$$

pour un certain $\sigma \in \Gamma_K$ et où $\operatorname{Sp} \sigma$ désigne l'automorphisme de $\operatorname{Spec} \bar{K}$ induit par σ sur le corps $\bar{K}$. On peut aussi voir ces objets comme des morphismes de $\bar{K}$-groupes $\sigma_* \bar{G} \to \bar{G}$, où $\sigma_* \bar{G}$ est le $\bar{K}$-groupe algébrique $\bar{G}$ muni du morphisme structurel "tordu"

$$\bar{G} \to \operatorname{Spec} \bar{K} \xrightarrow{\operatorname{Sp} \sigma^{-1}} \operatorname{Spec} \bar{K}.$$

Ou encore, en considérant le $\bar{K}$-groupe $(\operatorname{Sp} \sigma)^* \bar{G}$, on peut vérifier aisément qu'il est *canoniquement* isomorphe à $\sigma_* \bar{G}$ en tant que $\bar{K}$-groupe, ce qui fait que l'on peut remplacer $\sigma_* \bar{G}$ par $(\operatorname{Sp} \sigma)^* \bar{G}$ ci-dessus.

Enfin, on rappelle que l'on dispose d'une suite exacte

$$1 \to \operatorname{Aut}_{\bar{K}}(\bar{G}) \to \operatorname{SAut}(\bar{G}) \to \Gamma_K,$$

ainsi que du groupe quotient $\operatorname{SOut}(\bar{G}) := \operatorname{SAut}(\bar{G}) / \operatorname{Int}(\bar{G})$.

Un K-lien sur $\bar{G}$ est la donnée d'un morphisme de groupes continu $\kappa : \Gamma_K \to \operatorname{SOut}(\bar{G})$ qui scinde la suite exacte naturelle

$$1 \to \operatorname{Out}_{\bar{K}}(\bar{G}) \to \operatorname{SOut}(\bar{G}) \to \Gamma_K,$$

et qui se relève en une section continue $\Gamma_K \to \operatorname{SAut}(\bar{G})$ (pour la définition des topologies concernées, cf. [FSS98, §1]). On dispose également dans ce contexte de la notion suivante de morphisme de K-liens : si $(\bar{G}, \kappa)$ et $(\bar{H}, \lambda)$ sont deux K-liens, considérons les morphismes de $\bar{K}$-groupes $\varphi : \bar{G} \to \bar{H}$ tels qu'il existe des relevés continus $g : \Gamma_K \to \operatorname{SAut}(\bar{G})$ et $h : \Gamma_K \to \operatorname{SAut}(\bar{H})$ de κ et λ respectivement, de sorte que pour tout $\sigma \in \Gamma_K$, le diagramme suivant de $\bar{K}$-groupes

$$\begin{tikzcd} \sigma_* \bar{G} \arrow[r, "g_\sigma"] \arrow[d, "\sigma_* \varphi"'] & \bar{G} \arrow[d, "\varphi"] \\ \sigma_* \bar{H} \arrow[r, "h_\sigma"] & \bar{H}, \end{tikzcd}$$

commute (et où la signification de $\sigma_* \varphi$ est évidente). On a alors une action naturelle de $\operatorname{Int}(\bar{H})$ sur ces morphismes, ce qui permet de définir un morphisme de liens $\varphi : (\bar{G}, \mu) \to (\bar{H}, \kappa)$ comme une classe de morphismes au sens précédent modulo $\operatorname{Int}(\bar{H})$. On a ainsi défini une catégorie, notée $\underline{K\text{-Liens}}$.

Comparaison I. On dispose d'une équivalence de catégories naturelle $\underline{\mathrm{Lialg}}(K) \to \underline{K\text{-Liens}}$. Elle est définie ainsi : pour tout objet L de $\underline{\mathrm{Lialg}}(K)$, l'extension des scalaires de K à $\bar{K}$ permet d'en déduire un objet $\bar{L}$ de $\underline{\mathrm{Lialg}}(\bar{K})$. Comme on l'a déjà remarqué plus haut, le foncteur $\underline{\mathrm{Gralg}}(\bar{K}) \to \underline{\mathrm{Lialg}}(\bar{K})$ est bijectif sur les objets. Cela nous dit qu'il existe, à isomorphisme près, un unique $\bar{K}$-groupe algébrique $\bar{G}$ tel que $\bar{L} = \underline{\mathrm{lien}}(\bar{G})$. Or L est dans $\underline{\mathrm{Liens}}(K)$, donc $\bar{L}$ est muni d'une donnée de descente naturelle pour l'extension $\bar{K}/K$, c'est-à dire que pour tout $\sigma \in \Gamma_K$, on a un isomorphisme canonique dans $\underline{\mathrm{Liens}}(\bar{K})$ de la forme

$$f_\sigma : (\mathrm{Sp}\,\sigma)^*\bar{L} = \underline{\mathrm{lien}}(\sigma_*\bar{G}) \to \bar{L} = \underline{\mathrm{lien}}(\bar{G}),$$

vérifiant $f_{\sigma\tau} = f_\sigma \circ (\mathrm{Sp}\,\sigma)^* f_\tau$, où la première égalité découle de [Gir71, V.1.2.2.2] et de l'isomorphisme $(\mathrm{Sp}\,\sigma)^*\bar{G} \cong \sigma_*\bar{G}$. Or, puisque

$$\mathrm{Isom}_{\underline{\mathrm{Liens}}(\bar{K})}(\underline{\mathrm{lien}}(\sigma_*\bar{G}), \underline{\mathrm{lien}}(\bar{G})) = \mathrm{Int}\,(\bar{G})\backslash\mathrm{Isom}_{\bar{K}\text{-gr}}(\sigma_*\bar{G}, \bar{G}),$$

et que $\mathrm{Isom}_{\bar{K}\text{-gr}}(\sigma_*\bar{G}, \bar{G})$ correspond à la préimage de $\sigma \in \Gamma_K$ par rapport au morphisme naturel $\mathrm{SAut}(\bar{G}) \to \Gamma_K$, on en déduit que la donnée de descente (f_σ) définit un morphisme de groupes $\kappa_L : \Gamma_K \to \mathrm{SOut}(\bar{G})$ scindant le morphisme $\mathrm{SOut}(\bar{G}) \to \Gamma_K$, dont on vérifie qu'il est continu et qu'il se relève en une application continue $\Gamma_K \to \mathrm{SAut}(\bar{G})$ (on utilise que l'isomorphisme entre $\bar{L}$ et $\underline{\mathrm{lien}}(\bar{G})$ est défini localement pour la topologie étale, donc sur une extension finie de K).

Vérifions que l'on a bien défini un foncteur $\underline{\mathrm{Lialg}}(K) \to \underline{K\text{-Liens}}$. Soit un morphisme $\varphi : L \to M$ dans $\underline{\mathrm{Lialg}}(K)$. On a construit les K-liens $(\bar{G}, \kappa_L)$ et $(\bar{H}, \kappa_M)$ associés respectivement à L et M. La construction assure que φ induit un morphisme de $\bar{K}$-groupes algébriques $\bar{\varphi} : \bar{G} \to \bar{H}$ défini modulo $\mathrm{Int}\,(\bar{H})$ et dont on note $\widetilde{\varphi}$ la classe. Autrement dit, $\widetilde{\varphi}$ correspond au morphisme $\bar{L} = \underline{\mathrm{lien}}(\bar{G}) \to \underline{\mathrm{lien}}(\bar{H}) = \bar{M}$ dans la catégorie $\underline{\mathrm{Liens}}(\bar{K})$. Or, comme pour les objets, φ est un morphisme dans $\underline{\mathrm{Liens}}(K)$, donc $\widetilde{\varphi}$ est muni d'une donnée de descente naturelle pour l'extension $\bar{K}/K$, c'est-à dire que pour tout $\sigma \in \Gamma_K$, on a un diagramme commutatif dans $\underline{\mathrm{Liens}}(\bar{K})$ de la forme

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{Sp}\,\sigma)^*\underline{\mathrm{lien}}(\bar{G}) \arrow[r, equal] \arrow[d, "(\mathrm{Sp}\,\sigma)^*\widetilde{\varphi}"] & \underline{\mathrm{lien}}(\sigma_*\bar{G}) \arrow[r, "g_\sigma"] \arrow[d, "\sigma_*\widetilde{\varphi}"] & \underline{\mathrm{lien}}(\bar{G}) \arrow[d, "\widetilde{\varphi}"] \\
(\mathrm{Sp}\,\sigma)^*\underline{\mathrm{lien}}(\bar{H}) \arrow[r, equal] & \underline{\mathrm{lien}}(\sigma_*\bar{H}) \arrow[r, "h_\sigma"] & \underline{\mathrm{lien}}(\bar{H}),
\end{tikzcd}$$

où g_σ et h_σ définissent des données de descente respectives pour $\bar{L} = \underline{\mathrm{lien}}(\bar{G})$ et $\bar{M} = \underline{\mathrm{lien}}(\bar{H})$. Il est facile alors de vérifier que ces données de descente définissent un morphisme $(\bar{G}_L, \kappa_L) \to (\bar{G}_M, \kappa_M)$ dans la catégorie $\underline{K\text{-Liens}}$. D'où un foncteur $\underline{\mathrm{Lialg}}(K) \to \underline{K\text{-Liens}}$.

Montrons que le foncteur ainsi défini est une équivalence de catégories. Un quasi-inverse est donné par le foncteur suivant : si $(\bar{G}, \kappa)$ est un K-lien, alors la donnée d'une application $f : \Gamma_K \to \mathrm{SAut}(\bar{G})$ relevant κ induit des morphismes $f_\sigma : (\mathrm{Sp}\,\sigma)^*\underline{\mathrm{lien}}(\bar{G}) = \underline{\mathrm{lien}}(\sigma_*\bar{G}) \to \underline{\mathrm{lien}}(\bar{G})$ dans la catégorie $\mathrm{Liens}(\bar{K})$ tels que $f_{\sigma\tau} = f_\sigma \circ ((\mathrm{Sp}\,\sigma)^* f_\tau)$ dans cette catégorie. Par conséquent, les morphismes (f_σ) définissent une donnée de descente sur $\underline{\mathrm{lien}}(\bar{G})$. Comme la catégorie fibrée $\underline{\mathrm{LIENS}}(K)$ des liens est un K-champ, cette donnée de descente définit un objet L_κ de $\underline{\text{Liens}}(K)$. De même, si $\varphi : (\bar{G}, \kappa) \to (\bar{H}, \lambda)$ est un morphisme dans $\underline{K\text{-Liens}}$, on vérifie que celui-ci définit un morphisme $\bar{\varphi} : \bar{L}_\kappa \to \bar{L}_\lambda$ dans $\underline{\text{Lialg}}(\bar{K})$ muni d'une donnée de descente, ce qui permet de construire un morphisme $\widetilde{\varphi} : L_\kappa \to L_\lambda$ puisque $\underline{\text{LIENS}}(K)$ est un K-champ. Cela définit bien le foncteur souhaité $\underline{K\text{-Liens}} \to \underline{\text{Lialg}}(K)$. On peut alors vérifier que celui-ci est bien un quasi-inverse du premier.

2.2.2 2-cohomologie non abélienne

On dispose de trois façons équivalentes de voir la 2-cohomologie galoisienne non abélienne. Les deux premières, correspondant aux points de vue des cocycles et des extensions, sont bien connues dans le cadre de la cohomologie des groupes non abélienne classique et s'adaptent donc au cadre de la cohomologie galoisienne via la notion de K-lien à la Springer-Borovoi. Le troisième point de vue, celui des gerbes, est issu du point de vue plus abstrait des K-liens à la Giraud.

Cocycles. Soit $L = (\bar{G}, \kappa)$ un K-lien. On munit $\bar{G}(\bar{K})$ de la topologie discrète. Un 2-cocycle à valeurs dans L est un couple (f, u), où $f : \Gamma_K \to \text{SAut}(\bar{G})$ est une application continue qui relève κ et $u : \Gamma_K \times \Gamma_K \to \bar{G}(\bar{K})$ est une application continue vérifiant, pour tout $\sigma, \tau, \upsilon \in \Gamma_K$,

$$f_{\sigma,\tau} = \text{Int}\,(u_{\sigma,\tau}) \circ f_\sigma \circ f_\tau,$$
$$u_{\sigma,\tau\upsilon} \cdot f_\sigma(u_{\tau,\upsilon}) = u_{\sigma\tau,\upsilon} \cdot u_{\sigma,\tau}.$$

Deux 2-cocycles (f, u) et (f', u') sont dits équivalents s'il existe une application continue $c : \Gamma_K \to \bar{G}(\bar{K})$ telle que pour tout $\sigma, \tau \in \Gamma_K$, on a

$$f'_\sigma = \text{Int}\,(c_\sigma) \circ f_\sigma$$
$$u'_{\sigma,\tau} = c_{\sigma\tau} \cdot u_{\sigma,\tau} \cdot f_\sigma(c_\tau)^{-1} \cdot c_\sigma^{-1}\,.$$

L'ensemble des 2-cocycles modulo cette relation d'équivalence est noté $H^2(K, L)$, ou $H^2(K, G)$ si $L = \underline{\text{lien}}(G)$. Une classe dans $H^2(K, L)$ est dite neutre si elle est représentable par un 2-cocycle de la forme $(f, 1)$. Elle correspond alors à une k-forme G de $\bar{G}$ (cf. [Bor93, 1.4]) et on la note alors $n(G)$.

Extensions. Soit $L = (\bar{G}, \kappa)$ un K-lien. On munit toujours $\bar{G}(\bar{K})$ de la topologie discrète. On définit une extension liée par L comme une suite exacte de groupes topologiques

$$1 \to \bar{G}(\bar{K}) \to E \to \Gamma_K \to 1\,,$$

telle que le morphisme naturel $\Gamma_K \to \text{Out}(G(\bar{K}))$ induit par cette suite exacte soit égal à la composée de κ avec le morphisme naturel $\text{SOut}(\bar{G}) \to \text{Out}(G(\bar{K}))$.

On note $\text{Ext}(\Gamma_K, L)$ l'ensemble des classes d'équivalence de telles extensions. Une extension est dite neutre si elle admet une section qui est un morphisme continu.

Gerbes. Une K-gerbe est un champ en groupoïdes $\mathcal{M}$ sur le petit site étale de $\operatorname{Spec}(K)$ tel que

- il existe une K-algèbre étale A/K telle que $\mathcal{M}(A) \neq \emptyset$.
- pour toute K-algèbre étale A, pour tout $m, m' \in \mathcal{M}(A)$, il existe une A-algèbre étale A' et un isomorphisme $m \xrightarrow{\sim} m'$ dans $\mathcal{M}(A')$.

Comme on l'a mentionné dans la section précédente, on peut déduire de [Gir64, Cor. 9.29] que l'on peut remplacer "algèbre étale" par "extension finie" dans les deux points ci-dessus.

À une K-gerbe $\mathcal{M}$ on associe son lien $L(\mathcal{M})$ défini de la façon suivante : on choisit $m \in \mathcal{M}(\bar{K})$ (qui est non vide d'après ce que l'on vient de remarquer). Pour tout $\sigma \in \Gamma_K$, on dispose du foncteur naturel $\mathcal{M}(\bar{K}) \to \mathcal{M}(\bar{K})$ induit par $\operatorname{Sp}\sigma$. On note ${}^\sigma m$ l'image de m par ce foncteur. Par définition, pour tout $\sigma \in \Gamma_K$, il existe un (iso)morphisme $\varphi_\sigma : {}^\sigma m \to m$ dans la catégorie $\mathcal{M}(\bar{K})$. On note alors $f_\sigma : \underline{\mathrm{Aut}}({}^\sigma m) \to \underline{\mathrm{Aut}}(m)$ le morphisme de $\bar{K}$-faisceaux en groupes défini par $f_\sigma(\alpha) := \varphi_\sigma \circ \alpha \circ {\varphi_\sigma}^{-1}$. Or, d'après [Gir71, V.1.3.3.3], on a un isomorphisme naturel $\underline{\mathrm{Aut}}({}^\sigma m) \cong (\operatorname{Sp}\sigma)^* \underline{\mathrm{Aut}}(m)$. Donc on a défini un morphisme $f_\sigma : (\operatorname{Sp}\sigma)^* \underline{\mathrm{Aut}}(m) \to \underline{\mathrm{Aut}}(m)$, donc un morphisme de $\bar{K}$-liens $f_\sigma : (\operatorname{Sp}\sigma)^* \underline{\mathrm{lien}}(\underline{\mathrm{Aut}}(m)) \to \underline{\mathrm{lien}}(\underline{\mathrm{Aut}}(m))$. On vérifie que cela munit $\underline{\mathrm{lien}}(\underline{\mathrm{Aut}}(m))$ d'une donnée de descente relativement à l'extension $\bar{K}/K$, donc cela définit un lien sur $\operatorname{Spec} K$ que l'on note $L(\mathcal{M})$ et ce lien ne dépend pas du choix de m ni du choix des isomorphismes φ_σ. On dit que $\mathcal{M}$ est une gerbe liée par $L(\mathcal{M})$.

Un morphisme de K-gerbes est un morphisme de K-champs dont la source et le but sont des gerbes. Tout morphisme $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ de K-gerbes induit un morphisme de K-liens $\underline{\mathrm{lien}}(\varphi) : L(\mathcal{M}) \to L(\mathcal{N})$, cf. [Gir71, IV.2.2.3]. Le morphisme φ est dit lié par $\underline{\mathrm{lien}}(\varphi)$. Une équivalence de K-gerbes est un morphisme de gerbes lié par l'identité.

Pour L un lien sur $\operatorname{Spec} K$ au sens de Giraud, on note $\mathrm{Ger}(K, L)$ l'ensemble des classes d'équivalence de K-gerbes liées par L. La classe d'une gerbe $\mathcal{M}$ est dite neutre si $\mathcal{M}(K) \neq \emptyset$. Le faisceau $\underline{\mathrm{Aut}}(m)$ pour $m \in \mathcal{M}(K)$ est dans ce cas représenté par un K-schéma en groupes qui est une K-forme du groupe $\bar{G}$ sous-jacent à L. On note alors $n(G)$ la classe de $\mathcal{M}$.

Comparaison II. L'énoncé suivant affirme que les trois définitions précédentes sont équivalentes :

Proposition 2.1. *Soit L un K-lien. Alors on a des bijections canoniques et fonctorielles :*

$$H^2(K, L) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}(\Gamma_K, L) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ger}(K, L)\,,$$

qui font correspondre les sous-ensembles de classes neutres de chacun des trois ensembles.

Démonstration. On rappelle seulement la construction des différentes bijections.

Cocycles vers extensions. Étant donné un 2-cocycle (f, u), on construit le groupe $E := \bar{G}(\bar{K}) \times \Gamma_K$ avec le produit tordu suivant :

$$(g, \sigma) \cdot (h, \tau) := (g \cdot f_\sigma(h) \cdot u_{\sigma,\tau}^{-1}, \sigma\tau)\,,$$

et on vérifie qu'il s'insère dans une suite exacte courte

$$1 \to \bar{G}(\bar{K}) \to E \to \Gamma_K \to 1\,,$$

dont le lien associé est clairement L, ce qui définit la flèche $H^2(K, L) \to \mathrm{Ext}(\Gamma_K, L)$.

Extensions vers gerbes Étant donnée une extension de groupes topologiques

$$1 \to \bar{G}(\bar{K}) \to E \xrightarrow{\pi} \Gamma_K \to 1\,,$$

on peut considérer, pour K'/K une extension finie, l'extension induite par restriction

$$1 \to \bar{G}(\bar{K}) \to E' \xrightarrow{\pi} \Gamma_{K'} \to 1\,. \tag{1}$$

Cela nous permet de définir une gerbe $\mathcal{M}$ comme suit : la catégorie $\mathcal{M}(K')$ au dessus de $\mathrm{Spec}\, K'$ a pour objets les sections homomorphiques continues $s : \Gamma_{K'} \to E'$ de l'extension (1) et, étant données deux telles sections s et s', on pose

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}(K')}(s, s') := \{g \in \bar{G}(\bar{K}) : s' = \mathrm{Int}\,(g) \circ s\}.$$

Pour $A = \prod_{i \in I} K_i$ une K-algèbre étale, on définit $\mathcal{M}(A)$ tout simplement en prenant le produit des catégories $\mathcal{M}(K_i)$ et les foncteurs $M(A) \to M(A')$ pour A' étale sur A se définissent alors de façon évidente. On voit enfin aisément que ces catégories sont des groupoïdes, donc on a affaire à une catégorie fibrée en groupoïdes.

Les topologies des groupes concernés (discrète pour $\bar{G}(\bar{K})$, profinie pour Γ_K) et la continuité des morphismes nous disent que l'extension est localement scindée. Autrement dit, il existe une extension finie K' de K telle que $\mathcal{M}(K')$ est non vide. Les mêmes arguments de continuité montrent que deux telles sections sont localement isomorphes au sens défini plus haut.

Il suffit alors de vérifier que $\mathcal{M}$ est bien un champ, ce que l'on peut faire au niveau des extensions finies galoisiennes K''/K', avec K'/K finie. Si l'on choisit une section ensembliste $s_0 : \Gamma_{K''/K'} \to E'$ de la projection $E' \xrightarrow{\pi} \Gamma_{K'} \to \Gamma_{K''/K'}$, alors le foncteur $\sigma^* : \mathcal{M}(K'') \to \mathcal{M}(K'')$ envoie s dans ${}^\sigma s := \mathrm{Int}\,(s_0(\sigma)) \circ s \circ \mathrm{Int}\,(\pi(s_0(\sigma))^{-1})$ et une flèche $g \in \bar{G}(\bar{K})$ en ${}^\sigma g := s_0(\sigma) g s_0(\sigma)^{-1}$. Étant donné un objet $s \in \mathcal{M}(K'')$, une donnée de descente vers K' sur s correspond alors à la donnée, pour $\sigma \in \Gamma_{K''/K'}$, d'un morphisme ${}^\sigma s \to s$, donc d'un élément $g_\sigma \in \bar{G}(\bar{K})$ tel que ${}^\sigma s = \mathrm{Int}\, g_\sigma \circ s$, de façon que $g_{\sigma\tau} = g_\sigma {}^\sigma g_\tau$. Cette dernière égalité assure que ${}^{\sigma\tau} s = {}^\sigma({}^\tau s)$ et un calcul direct montre alors que le sous-groupe de E' engendré par l'image de s et par les $(g_\sigma s_0(\sigma))_{\sigma \in \Gamma_{K''/K'}}$ est bien l'image d'une section homomorphique de $\Gamma_{K'}$, donc un objet de $\mathcal{M}(K')$.

Gerbes vers cocycles Soit $\mathcal{M}$ une K-gerbe liée par $L = (\bar{G}, \kappa)$. Choisissons une section $m \in \mathcal{M}(\bar{K})$ et fixons un isomorphisme de $\bar{K}$-groupes $\underline{\mathrm{Aut}}(m) \cong \bar{G}$. Suivant la construction du lien associé à $\mathcal{M}$, on obtient pour $\sigma \in \Gamma_K$ un isomorphisme $\varphi_\sigma : {}^\sigma m \to m$ dans la catégorie $\mathcal{M}(\bar{K})$ et l'isomorphisme naturel $\underline{\mathrm{Aut}}({}^\sigma m) \cong \sigma_* \bar{G}$ nous permet par ailleurs de définir un morphisme de $\bar{K}$-groupes $f_\sigma : \sigma_* \bar{G} \to \bar{G}$ par $f_\sigma(\alpha) := \varphi_\sigma \circ \alpha \circ {\varphi_\sigma}^{-1}$.

Le morphisme f_σ est alors dans $\mathrm{SAut}(\bar{G})$ et, puisque c'est avec ces morphismes que l'on construit le lien associé à $\mathcal{M}$, son image dans $\mathrm{SOut}(\bar{G})$ est exactement κ_σ. Si l'on note alors ${}^\sigma\varphi_\tau$ l'image du morphisme φ_τ par le foncteur induit par σ et que l'on pose $u_{\sigma,\tau} := \varphi_{\sigma\tau} \circ {}^\sigma\varphi_\tau{}^{-1} \circ \varphi_\sigma^{-1} \in \underline{\mathrm{Aut}}(m)(\bar{K}) = \bar{G}(\bar{K})$, un calcul simple assure que l'on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} f_{\sigma\tau} &= \mathrm{Int}\,(u_{\sigma,\tau}) \circ f_\sigma \circ f_\tau \qquad && \text{dans } \mathrm{SAut}(\bar{G}), \\ u_{\sigma,\tau\upsilon} \cdot f_\sigma(u_{\tau,\upsilon}) &= u_{\sigma\tau,\upsilon} \cdot u_{\sigma,\tau} \qquad && \text{dans } \bar{G}(\bar{K}). \end{aligned}$$

Par conséquent $(f, u) \in Z^2(K, L)$.

Remarque.
La correspondance entre gerbes et cocycles est détaillée dans [Bre95]. Pour le sens "gerbes vers cocycles", cf. les sections 2.2 à 2.4 ; pour le sens "cocycles vers gerbes", cf. 2.6 à 2.8.

2.2.3 Fonctorialité

Soient $L = (\bar{G}, \kappa)$ et $L' = (\bar{G}', \kappa')$ des K-liens et soit $\varphi : L \to L'$ un morphisme de K-liens. À la différence du cas classique, un tel morphisme n'induit pas forcément un morphisme entre les ensembles de 2-cohomologie non-abélienne. Cependant, on a toujours une relation, notée

$$\varphi^{(2)} : H^2(K, L) \multimap H^2(K, L'),$$

et qui est définie comme suit. On dit que deux classes $\eta \in H^2(K, L)$ et $\eta' \in H^2(K, L')$ sont reliées si :

Dans le langage des cocycles, s'il existe des cocycles (f, u) et (f', u') représentant respectivement η et η' tels que, pour tout $g \in \bar{G}(\bar{K})$ et pour tout $\sigma, \tau \in \Gamma_K$,

$$f'_\sigma(\varphi(g)) = \varphi(f_\sigma(g)) \quad \text{et} \quad u'_{\sigma,\tau} = \varphi(u_{\sigma,\tau}).$$

Dans le langage des extensions, s'il existe des extensions E et E' représentant respectivement η et η' et un morphisme d'extensions

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \bar{G}(\bar{K}) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & E \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma_K \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1, \\ 1 \arrow[r] & \bar{G}'(\bar{K}) \arrow[r] & E' \arrow[r] & \Gamma_K \arrow[r] & 1. \end{tikzcd}$$

Dans le langage des gerbes, s'il existe des gerbes $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ représentant respectivement η et η' et un morphisme de gerbes (i.e. un morphisme de champs) $\mathcal{M} \to \mathcal{M}'$.

On rappelle qu'une telle relation peut être vide en général et que, dans le cas particulier où φ est surjective ou $\bar{G}'$ est abélien, elle correspond à une application $H^2(K, L) \to H^2(K, L')$. Ceci est un exercice facile à vérifier par exemple dans le langage des cocycles.

Enfin, mentionnons qu'il est facile de déduire de ce qui précède comment définir une relation de restriction $H^2(K, L) \to H^2(K', L)$ pour L un K-lien et K'/K une extension.

2.3 Espaces homogènes

Soit K un corps de caractéristique nulle, G un K-groupe algébrique et X un espace homogène (à droite) de G. On note $x \in X(\bar{K})$ un point géométrique de X, dont on note $\bar{H}$ le stabilisateur.

Une construction due à Springer permet d'associer au couple (X, x) un K-lien $L_X = (\bar{H}, \kappa_X)$, ainsi qu'une classe $\eta_X \in H^2(K, L_X)$ (on omet abusivement le choix de x dans la suite), tels qu'il existe un morphisme naturel $\rho : L_X \to \underline{\text{lien}}(G)$ reliant η_X à $n(G)$ (cf. [Spr66, Prop. 1.27] ou [Gir71, IV.5.1.3.1]). Rappelons sa construction avec les différents points de vue mentionnés plus haut.

Avec le point de vue de Springer-Borovoi (cf. [Bor93, §7] ou [FSS98, 5.1]), pour tout $\sigma \in \Gamma$, il existe $g_\sigma \in G(\bar{K})$ tel que ${}^\sigma x = x \cdot g_\sigma$, et on peut supposer l'application $\sigma \mapsto g_\sigma$ continue. Alors, si l'on note σ_* l'automorphisme σ-semi-algébrique de $\bar{G}$ induit naturellement par σ (cf. [Bor93, 1.4]), on voit que l'automorphisme $\text{Int}\,(g_\sigma) \circ \sigma_*$ est aussi σ-semi-linéaire mais de plus laisse $\bar{H}$ invariant. On note f_σ sa restriction à $\bar{H}$. On a donc une application continue $f : \Gamma_K \to \text{SAut}(\bar{H})$ qui induit un morphisme continu (donc un K-lien) $\kappa_X : \Gamma_K \to \text{SOut}(\bar{H})$. On note alors $L_X := (\bar{H}, \kappa_X)$ le lien correspondant. On pose enfin $u_{\sigma,\tau} := g_{\sigma\tau} \cdot {}^\sigma g_\tau \cdot g_\sigma^{-1} \in \bar{H}(\bar{K})$, et on vérifie que $\eta_X := [(f, u)]$ est un élément de $H^2(K, L_X)$ ne dépendant pas du choix des g_σ.

Par construction, on voit que η_X est neutre si et seulement s'il existe un K-torseur P sous G et un K-morphisme G-équivariant $P \to X$.

Avec le point de vue des extensions de groupes (cf. [FSS98, 5.1]), on définit E_X comme le sous-groupe de $G(\bar{K}) \rtimes \Gamma_K$ formé des éléments (g, σ) tels que ${}^\sigma x = x \cdot g$. Alors on dispose d'une suite exacte naturelle de groupes topologiques

$$1 \to \bar{H}(\bar{K}) \to E \to \Gamma_K \to 1\,,$$

telle que le lien associé est exactement L_X et dont la classe dans $H^2(K, L_X)$ est exactement η_X.

Avec le point de vue de Giraud (cf. [Gir71, IV.5.1]), on peut associer à X la catégorie fibrée $\mathcal{M}_X$ sur le petit site étale de $\text{Spec}\, K$ des relèvements de X en un torseur sous G, i.e. pour toute K-algèbre étale A, la catégorie fibre $\mathcal{M}_X(A)$ a pour objets les couples (P, α) où $P \to \text{Spec}\, A$ est un torseur sous G et $\alpha : P \to X_A$ est un A-morphisme G-équivariant, et pour morphismes les morphismes de G-torseurs commutant aux morphismes vers X_A. Alors $\mathcal{M}_X$ est une gerbe liée par L_X, et sa classe dans $H^2(K, L_X)$ est exactement η_X.

3 Gerbes et espaces homogènes de $\text{GL}_{n,K}$ et $\text{SL}_{n,K}$

Les résultats suivants sont cruciaux pour la construction géométrique utilisée dans la démonstration du théorème principal. Ils généralisent des outils tout à fait courants dans le cadre où l'on possède un point rationnel, comme le plongement d'un K-groupe affine donné dans $\mathrm{SL}_{n,K}$, ou le célèbre lemme sans nom, qui établit en particulier la stable birationalité des quotients correspondants à deux tels plongements.

3.1 Plonger un K-lien affine dans $\mathrm{GL}_{n,K}$

Soit K un corps de caractéristique nulle et $\bar{K}$ une clôture algébrique de K. Soit $\bar{G}$ un $\bar{K}$-groupe algébrique affine et L un K-lien sur $\bar{G}$. On note $A_{\bar{G}}$ la $\bar{K}$-algèbre de Hopf associée à $\bar{G}$, de sorte que $\bar{G} = \mathrm{Spec}\,(A_{\bar{G}})$. Par définition, la donnée de L équivaut à la donnée d'un morphisme de groupes $\kappa : \Gamma_K \to \mathrm{SOut}(\bar{G})$ se relevant en une application continue $f : \Gamma_K \to \mathrm{SAut}(\bar{G})$.

Proposition 3.1. *Il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et un morphisme injectif de K-liens $\rho : L \to \underline{\mathrm{lien}}(\mathrm{GL}_{n,K})$.*

Démonstration. De la dualité entre groupes algébriques affines et algèbres de Hopf et du morphisme $f : \Gamma_K \to \mathrm{SAut}(\bar{G})$ on déduit une flèche $f^* : \Gamma_K \to \mathrm{SAut}(A_{\bar{G}})$, où $\mathrm{SAut}(A_{\bar{G}})$ est le groupe des paires (σ, φ) avec $\sigma \in \Gamma_K$ et $\varphi : A_{\bar{G}} \to A_{\bar{G}}$ un morphisme (σ^{-1})-semi-linéaire de $\bar{K}$-algèbres de Hopf (i.e. $\varphi(\lambda \cdot a) = \sigma^{-1}(\lambda) \cdot \varphi(a)$).

On note $\Delta_G : A_{\bar{G}} \to A_{\bar{G}} \otimes_{\bar{K}} A_{\bar{G}}$ la comultiplication de $A_{\bar{G}}$. Comme $\bar{G}$ est de type fini sur $\bar{K}$, il existe un sous-$\bar{K}$-espace vectoriel $V \subset A_{\bar{G}}$ de dimension finie qui engendre $A_{\bar{G}}$ comme $\bar{K}$-algèbre, et tel que $\Delta_G(V) \subset V \otimes_{\bar{K}} A_{\bar{G}}$. De plus, on peut supposer que V est stable par les f^*_σ. En effet, fixons $(v_1, \ldots, v_n)$ une base de V sur $\bar{K}$ et posons

$$W := \mathrm{Vect}_{\bar{K}}\{f^*_\sigma(v_i) : \sigma \in \Gamma_K, 1 \leq i \leq n\}.$$

Alors W est un sous-$\bar{K}$-espace vectoriel de dimension finie (car f est continue, cf. [Bor93, Def. 1.3]) de $A_{\bar{G}}$ engendrant $A_{\bar{G}}$, tel que $\Delta_G(W) \subset W \otimes_{\bar{K}} A_{\bar{G}}$, et stable par les f^*_σ. Il suffit alors de remplacer V par W.

Fixons à nouveau une base $(v_1, \ldots, v_n)$ de V sur $\bar{K}$. Il existe alors des éléments $a_{i,j} \in A_{\bar{G}}$ tels que $\Delta_G(v_i) = \sum_j v_j \otimes a_{i,j}$. On considère le morphisme injectif de $\bar{K}$-groupes

$$\rho : \bar{G} \to \mathrm{GL}_{n,\bar{K}}$$

défini par l'unique morphisme de $\bar{K}$-algèbres de Hopf

$$\rho^* : \bar{K}\left[X_{i,j}; \frac{1}{\det}\right] \to A_{\bar{G}}$$

tel que $\rho^*(X_{i,j}) = a_{i,j}$ pour tout i, j.

Pour $\sigma \in \Gamma_K$, définissons $P_\sigma \in \mathrm{GL}_n(\bar{K})$ comme étant la matrice de changement de bases de $\underline{v} := (v_i)$ à $f^*_\sigma \underline{v} := (f^*_\sigma v_i)$. Notons enfin $\sigma_* \in \mathrm{SAut}(\mathrm{GL}_{n,\bar{K}})$ le morphisme σ-semi-algébrique naturellement induit par σ (cf. [Bor93, 1.4]).

Lemme 3.2. *Pour tout $\sigma \in \Gamma_K$, le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd} \bar{G} \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "f_\sigma"'] & \mathrm{GL}_{n,\bar{K}} \arrow[d, "\mathrm{Int}\,({}^\sigma P_\sigma) \circ \sigma_*"] \\ \bar{G} \arrow[r, "\rho"] & \mathrm{GL}_{n,\bar{K}} \end{tikzcd}$$

Le morphisme $\mathrm{Int}\,({}^\sigma P_\sigma)$ étant clairement intérieur, le lemme, dont la démonstration est donnée ci-dessous, assure que le morphisme ρ induit un morphisme de K-liens

$$\rho : L = (\bar{G}, \kappa) \to (\mathrm{GL}_{n,\bar{K}}, \kappa'),$$

où κ'_σ correspond à la classe de σ_* modulo $\mathrm{Int}\,(\mathrm{GL}_{n,\bar{K}})$. Or ce lien n'est rien d'autre que $\underline{\mathrm{lien}}(\mathrm{GL}_{n,K})$ (cf. [Bor93, 1.4]), d'où la proposition 3.1. ☺

Démonstration du Lemme 3.2. On suit la construction sur K que l'on trouve par exemple dans [Spr98, Thm. 2.3.7] ou [Wat79, Ch. 3]. Par construction, on sait que

$$\rho(g)v_j = \sum_i a_{i,j}(g)v_i$$

pour tout $g \in \bar{G}(\bar{K})$.

Notons $w_i := f_\sigma^* v_i$. Comme $f_\sigma \in \mathrm{SAut}(\bar{G})$, on sait que l'on a la formule

$$\Delta_G(w_j) = \sum_i w_i \otimes {f_\sigma}^*(a_{i,j})\,.$$

Alors, toujours suivant la construction classique, on voit que pour $g \in \bar{G}(\bar{K})$, $\sigma \in \Gamma_K$, on a les formules suivantes :

$$\rho(f_\sigma(g))v_j = \sum_i a_{i,j}(f_\sigma(g))v_i \tag{2}$$

$$\rho(g)w_j = \sum_i \left({f_\sigma}^*(a_{i,j})\right)(g)w_i\,. \tag{3}$$

En outre, pour tout $\sigma \in \Gamma_k$, $a \in A_{\bar{G}}$ et $g \in \bar{G}(\bar{K})$, on a l'égalité suivante dans $\bar{K}$:

$${}^\sigma(f_\sigma^*(a)(g)) = a(f_\sigma(g)). \tag{4}$$

En effet, par définition (cf. par exemple [Bor93, 1.2]), le $\bar{K}$-point $f_\sigma(g)$ dans $\bar{G}$ est défini par

$$f_\sigma(g) := f_\sigma \circ g \circ \mathrm{Sp}\,\sigma : \mathrm{Spec}\,(\bar{K}) \to \bar{G},$$

donc la formule (4) découle du fait que pour tout $b \in A_{\bar{G}}$ et $h \in \bar{G}(\bar{K})$, on a $b(h) = h^*(b)$, où $h^* : A_{\bar{G}} \to \bar{K}$ est le morphisme de $\bar{K}$-algèbres correspondant au point h.

On déduit des formules (2), (3) et (4) et de la définition de P_σ que l'on a l'égalité suivante

$$\rho(f_\sigma(g)) = {}^\sigma P_\sigma \cdot {}^\sigma\rho(g) \cdot {}^\sigma P_\sigma^{-1},$$

ce qui signifie exactement que le diagramme de l'énoncé commute pour tout $g \in \bar{G}(\bar{K})$ et $\sigma \in \Gamma_K$, d'où le lemme 3.2. ☺

3.2 "Plonger une K-gerbe affine dans $\mathrm{SL}_{n,K}$"

Étant donné un K-groupe G, un plongement de G dans $\mathrm{SL}_{n,K}$ permet de construire un espace homogène $X = G\backslash\mathrm{SL}_{n,K}$ muni d'un K-point à stabilisateur G. Inversement, étant donné un espace homogène de $\mathrm{SL}_{n,K}$ muni d'un K-point, on obtient un K-groupe G plongé dans $\mathrm{SL}_{n,K}$ en prenant le stabilisateur du point. Dans cette section on établit une variante de cette équivalence dans le cadre des espaces homogènes sans point rationnel. Un tel espace nous donne toujours une gerbe qui correspond à sa classe de Springer (cf. la section 2.3). Par "plonger une K-gerbe dans $\mathrm{SL}_{n,K}$", on veut justement évoquer la construction d'un espace homogène de $\mathrm{SL}_{n,K}$ dont la classe de Springer soit la (classe d'équivalence de la) gerbe que l'on s'est donnée.

On garde les notations de la section précédente : K est un corps de caractéristique nulle, $\bar{K}$ une clôture algébrique de K, $\bar{G}$ un $\bar{K}$-groupe algébrique affine et L un K-lien sur $\bar{G}$. On utilise aussi les notations données en section 2.2

Proposition 3.3. *Soit $\eta \in H^2(K, L)$. Alors il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et un morphisme injectif de K-liens $\rho : L \to \underline{\mathrm{lien}}(\mathrm{SL}_{n,K})$ tel que $\rho^{(2)} : \eta \multimap n(\mathrm{SL}_{n,K})$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{M}$ une K-gerbe liée par L de classe η. D'après la proposition 3.1, on dispose d'un morphisme injectif de K-liens $\rho' : L \to \underline{\mathrm{lien}}(\mathrm{GL}_{m,K})$. Par définition (cf. la section 2.2.2), il existe une extension finie K'/K galoisienne telle que la restriction de η à $H^2(K', L)$ est une classe neutre. On pose $H := \mathrm{GL}_{m,K}$.

Il existe une K'-forme G' de $\bar{G}$ telle que $\eta_{K'} = n(G')$ dans $H^2(K', L_{K'})$, donc en particulier une équivalence de K'-gerbes $\mathcal{M}_{K'} \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{TORS}}(G')$ (cf. [Gir71, III.2.5.1]). Quitte à agrandir l'extension K'/K, on peut supposer que le morphisme de K'-liens $\rho'_{K'} : L_{K'} = \underline{\mathrm{lien}}(G') \to \underline{\mathrm{lien}}(H_{K'})$ provient d'un morphisme (injectif) de K'-groupes algébriques $G' \to H_{K'}$. Alors $\rho'^{(2)}_{K'} : H^2(K', L_{K'}) \multimap H^2(K', H_{K'})$ relie $\eta_{K'}$ à $n(H_{K'})$, ce qui correspond au morphisme naturel de K'-gerbes $\varphi : \mathcal{M}_{K'} \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{TORS}}(G') \to \underline{\mathrm{TORS}}(H_{K'})$.

Posons $H' := R_{K'/K}(H_{K'})$. On dispose d'un morphisme injectif canonique de K-groupes $i : H \to H'$. La restriction à la Weil permet alors de définir un morphisme de K-gerbes $\epsilon : \mathcal{M} \to \underline{\mathrm{TORS}}(H')$ lié par le morphisme composé de K-liens

$$L \xrightarrow{\rho'} \underline{\mathrm{lien}}(H) \xrightarrow{i} \underline{\mathrm{lien}}(H'),$$

de la façon suivante : soit S un K-schéma étale. Pour tout $m \in \mathcal{M}(S)$, on note $\epsilon(m) \in \underline{\mathrm{TORS}}(H')(S)$ le S-torseur sous H' défini par $R_{S_{K'}/S}(\varphi(m_{K'}))$ (par définition, $\varphi(m_{K'})$ est un $S_{K'}$-torseur sous $H_{K'}$). De même, si $\phi : m \to m'$ est un morphisme dans $\mathcal{M}(S)$, on définit le morphisme $\epsilon(\phi) : \epsilon(m) \to \epsilon(m')$ dans $\underline{\mathrm{TORS}}(H')(S)$ comme le morphisme $R_{S_{K'}/S}(\phi_{K'} : m_{K'} \to m'_{K'})$.

Alors $\epsilon : \mathcal{M} \to \underline{\mathrm{TORS}}(H')$ est un morphisme de K-gerbes, dont on vérifie qu'il est lié par $i \circ \rho' : L \to \underline{\mathrm{lien}}(H')$. Donc $i^{(2)} \circ \rho'^{(2)} : H^2(K, L) \multimap H^2(K, H')$ relie η et la classe neutre $n(H')$ de $H^2(K, H')$.

Pour finir, il existe un morphisme injectif de K-groupes affines $j : H' \to \mathrm{SL}_{n,K}$ et on note

$$\rho : L \xrightarrow{\rho'} \underline{\mathrm{lien}}(H) \xrightarrow{i} \underline{\mathrm{lien}}(H') \xrightarrow{j} \underline{\mathrm{lien}}(\mathrm{SL}_{n,K})$$

le morphisme de K-liens composés. Alors par construction on a bien $\rho^{(2)} : \eta \multimap n(\mathrm{SL}_{n,K})$, ce qui conclut la preuve. ☺

Proposition 3.4. *Soit L un K-lien de groupe $\bar{H}$, G un K-groupe algébrique et $\rho : L \to \underline{\mathrm{lien}}(G)$ un morphisme injectif de K-liens. Soit $\eta \in H^2(K, L)$ telle que $\rho^{(2)} : \eta \multimap n(G)$. Alors il existe un K-espace homogène de G de lien L et de classe de Springer η.*

En outre, étant donnés un deuxième quadruplet (L', G', ρ', η') comme ci-dessus, un morphisme de K-groupes $\varphi : G \to G'$ et un diagramme commutatif de K-liens

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\psi"] & \underline{\mathrm{lien}}(G) \arrow[d, "\underline{\mathrm{lien}}(\varphi)"] \\ L' \arrow[r, "\rho'"] & \underline{\mathrm{lien}}(G') \end{tikzcd},$$

tel que $\psi^{(2)} : \eta \multimap \eta'$, alors le K-espace homogène X' correspondant à (L', G', ρ', η') est muni d'un K-morphisme $f : X \to X'$ qui est φ-équivariant.

Démonstration. Soit $(f, u) \in Z^2(K, L)$ un 2-cocycle représentant η. Par construction, il existe une application continue $c : \Gamma_K \to G(\bar{K})$ telle que si $f' : \Gamma_K \to \mathrm{SAut}(\bar{G})$ est le morphisme induit par l'action naturelle, on a $f_\sigma = \mathrm{Int}\,(c_\sigma) \circ f'_\sigma$ et $u_{\sigma,\tau} = c_{\sigma\tau} f'_\sigma(c_\tau)^{-1} c_\sigma^{-1}$.

On définit alors $\bar{X} := \bar{H}\backslash\bar{G}$ pointé par la classe x_0 de $\bar{H}$, que l'on munit de l'action de Galois suivante : pour tout $\sigma \in \Gamma_K$, on pose ${}^\sigma(x_0 \cdot g) := x_0 \cdot (c_\sigma f'_\sigma(g))$. On vérifie que cela définit bien une action du groupe de Galois de K, et la descente galoisienne (cf. par exemple [BLR90, §6.2, Ex. B]) assure qu'il existe une K-forme X de $\bar{X}$ munie d'une action naturelle de G définie sur K. Enfin, par construction, on voit que X est un espace homogène de lien L et de classe de Springer η. La fonctorialité résulte de la construction. ☺

Corollaire 3.5. *Soit L un K-lien affine et $\eta \in H^2(K, L)$. Alors il existe un entier n et un K-espace homogène de $\mathrm{SL}_{n,K}$ de lien L et de classe de Springer $\eta \in H^2(K, L)$.*

3.3 Le lemme sans nom ni point rationnel

Le lemme sans nom (cf. [CTS07, §3.2]) permet de montrer que, étant donné un k-groupe algébrique G, tous les espaces homogènes $G\backslash\mathrm{SL}_n$ ou $G\backslash\mathrm{GL}_n$ (qui possèdent tous des points rationnels) sont k-stablement birationnels entre eux, indépendamment du plongement de G dans ces groupes. Ayant donné un sens au plongement d'une gerbe dans SL_n ou GL_n, on peut maintenant se poser la même question pour des espaces homogènes sans point rationnel, mais ayant la même gerbe associée. Le théorème suivant fournit les outils nécessaires pour répondre affirmativement à cette question, mais aussi pour les constructions géométriques de la preuve du théorème principal.

Théorème 3.6. *Soit G un K-groupe algébrique, X un espace homogène de G de K-lien $L_X = (\bar{H}, \kappa_X)$, et de classe de Springer $\eta_X \in H^2(K, L_X)$.*

Soit $\pi : L_X \to L'$ un morphisme surjectif de K-liens avec L' supposé affine. Notons $\bar{\pi} : \bar{H} \to \bar{H}'$ le morphisme de $\bar{K}$-groupes correspondant. Soit $\eta' = \pi^{(2)}(\eta_X) \in H^2(K, L')$ et $N \subset G$ un sous-groupe distingué tel que $\ker \bar{\pi} \subset \bar{N}$.

Soit G' un K-groupe algébrique et supposons qu'il existe un morphisme de liens $\rho' : L' \to \underline{\text{lien}}(G')$ tel que ${\rho'}^{(2)} : \eta' \multimap n(G')$.

Alors il existe un K-espace homogène X' de $(G/N \times G')$ de lien $L_{X'} = L'$ et de classe de Springer $\eta_{X'} = \eta'$; un K-espace homogène Y de $(G \times G')$ de lien $L_Y = L_X$ et de classe de Springer $\eta_Y = \eta_X$; et des morphismes naturels de K-espaces homogènes

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\
X & & X' ,
\end{tikzcd}$$

de sorte que Y est un X-torseur sous G' et Y est un X'-espace homogène de $N_{X'}$, dont les fibres géométriques ont pour stabilisateur $\ker \bar{\pi} \subset \bar{N}$.

Remarque.
La proposition 3.3 nous dit que, pour $G' = \mathrm{SL}_{n,K}$, l'hypothèse sur l'existence de ρ' est toujours assurée. C'est surtout sous cette forme que l'on appliquera ce théorème.

Démonstration. Il s'agit d'appliquer la proposition 3.4. L'hypothèse sur N assure que l'on dispose d'un diagramme commutatif de K-liens et de relations correspondantes au niveau des H^2 :

$$\begin{tikzcd}
L_X \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[d, hook, "\rho"] & L' \arrow[d, "\bar{\rho}"] \\
\underline{\text{lien}}(G) \arrow[r, two heads] & \underline{\text{lien}}(G/N) ,
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\eta_X \arrow[r, mapsto, "\pi^{(2)}"] \arrow[d, "\rho^{(2)}", -o] & \eta' \arrow[d, "\bar{\rho}^{(2)}", -o] \\
n(G) \arrow[r, mapsto] & n(G/N) .
\end{tikzcd}$$

L'hypothèse sur G' permet alors de définir un plongement diagonal de K-liens $\rho \times \rho'$: $L_X \to \underline{\text{lien}}(G \times G')$ tel que $(\rho \times \rho')^{(2)} : \eta_X \multimap n(G \times G')$ (on note abusivement ρ' la composée $\rho' \circ \pi$). On dispose alors d'un diagramme commutatif de K-liens et de relations correspondantes au niveau des H^2 :

$$\begin{tikzcd}
& L_X \arrow[dl, equal] \arrow[d, "\rho\times\rho'"] \arrow[dr, "\pi"] & \\
L_X \arrow[d, "\rho"'] & \underline{\text{lien}}(G \times G') \arrow[dl, "p_1"] \arrow[dr, "p"'] & L' \arrow[d, "\bar{\rho}\times\rho'"] \\
\underline{\text{lien}}(G) & & \underline{\text{lien}}(G/N \times G') ,
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& \eta_X \arrow[dl, equal] \arrow[d, "(\rho\times\rho')^{(2)}", -o] \arrow[dr, mapsto, "\pi^{(2)}"] & \\
\eta_X \arrow[d, "\rho^{(2)}"', -o] & n(G \times G') \arrow[dl, mapsto, "p_1^{(2)}"] \arrow[dr, mapsto, "p^{(2)}"'] & \eta' \arrow[d, "(\bar{\rho}\times\rho')^{(2)}", -o] \\
n(G) & & n(G/N \times G') .
\end{tikzcd}$$

Alors la proposition 3.4 assure l'existence de Y et X' et du diagramme souhaité. Les propriétés de p et q se déduisent de la preuve de la proposition 3.4. $\square$

Remarque.
On peut aussi construire X' en prenant le quotient de Y par l'action de N, comme dans [Bor96, Lem. 3.1].

Comme on l'a remarqué, on obtient une première application intéressante en posant $G' = \mathrm{SL}_{n,K}$:

Corollaire 3.7 (Le lemme sans nom ni point rationnel)**.** *Soit G un K-groupe algébrique spécial K-rationnel et soit X un espace homogène de G de K-lien L_X, de classe de Springer $\eta_X \in H^2(K, L_X)$. Alors l'espace homogène X' de $\mathrm{SL}_{n,K}$ donné par le corollaire 3.5 pour la classe η_X est K-stablement birationnel à X.*

En particulier, deux espaces homogènes de $\mathrm{SL}_{n,K}$ ayant la même classe de Springer sont K-stablement birationnels.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème 3.6 à $L' = L_X$, $\pi = \mathrm{id}_{L_X}$, $N = G$, $G' = \mathrm{SL}_{n,K}$ et ρ' le morphisme donné par la proposition 3.3. On obtient alors le diagramme

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ X & & X' \end{tikzcd},$$

où p et q sont des torseurs sous $\mathrm{SL}_{n,K}$ et G respectivement. Puisque tous les deux sont des K-groupes spéciaux K-rationnels, on trouve que tant X que X' sont K-stablement birationnels à Y, ce qui conclut. ☺

Remarque.
Les énoncés des corollaires 3.5 et 3.7 sont valables aussi en remplaçant $\mathrm{SL}_{n,K}$ par $\mathrm{GL}_{n,K}$.

4 L'action d'une gerbe sur un tore

Dans [LA16], on a donné une petite généralisation du Lemme d'Ono au cadre des tores avec une k-action d'un k-groupe fini. Cela était suffisant pour traiter l'approximation faible pour les espaces homogènes, mais pour traiter le principe de Hasse, il faut généraliser encore un peu cette notion.

Soit donc K un corps de caractéristique 0, L un K-lien de $\bar{K}$-groupe sous-jacent $\bar{G}$ et η une classe dans $H^2(K, L)$. Considérons le morphisme surjectif $\bar{G} \to \bar{G}^{\mathrm{f}}$ (cf. les notations en début de section 2). Puisque $\bar{G}^{\circ}$ est un sous-groupe caractéristique, ce morphisme induit un K-lien naturel L^{f} sur $\bar{G}^{\mathrm{f}}$ et un morphisme de liens surjectif $\pi^{\mathrm{f}} : L \to L^{\mathrm{f}}$. On sait alors que la relation $\pi^{\mathrm{f},(2)} : H^2(K, L) \multimap H^2(K, L^{\mathrm{f}})$ est en fait une application et l'on peut donc définir η^{f} comme l'image de η dans $H^2(K, L^{\mathrm{f}})$. Elle correspond naturellement à une extension E^{f} de Γ_K par $\bar{G}^{\mathrm{f}}(\bar{K})$ qui est de plus un groupe profini. On fixe ces données dans toute cette section.

Définition 4.1. On définit un *η-tore* comme la donnée d'un $\bar{K}$-tore $\bar{T}$ et d'un homomorphisme continu $\phi : E^{\mathrm{f}} \to \mathrm{Aut}_{\bar{K}\text{-gr}}(\bar{T})$.

Un morphisme de η-tores, ou *η-morphisme*, est un morphisme de $\bar{K}$-tores compatible avec les actions respectives de E^{f}. En particulier, on appelera *η-isogénie* un η-morphisme surjectif et à noyau fini.

Soit E l'extension de Γ_K par $\bar{G}(\bar{K})$ naturellement associée à η. Il est clair que E^{f} correspond au quotient de E par le sous-groupe distingué $\bar{G}^{\circ}(\bar{K})$. De la définition ci-dessus on obtient alors une action naturelle de E sur $\bar{T}$. D'autre part, on obtient aussi tout naturellement une action de E (via E^{f}) sur le module de caractères $\hat{\bar{T}} = \mathrm{Hom}_{\bar{K}}(\bar{T}, \mathbb{G}_{\mathrm{m}})$ et il est facile de voir qu'une telle action définit en retour une structure de η-tore sur $\bar{T}$. On obtient ainsi un foncteur contravariant qui à un η-tore associe son module des caractères.

On dira qu'un η-tore est *trivial* si l'action de E^{f} sur $\hat{\bar{T}}$ l'est et *quasi-trivial* si cette action fait de $\hat{\bar{T}}$ un E^{f}-module de permutation (notons que tant l'action sur $\hat{\bar{T}}$ que celle sur $\bar{T}$ se factorisent par un quotient fini de E^{f} par continuité).

On voit facilement aussi que les faits classiques sur les isogénies de tores restent valables dans ce contexte. Notamment, on peut dire que deux η-tores $\bar{T}$ et $\bar{T}'$ sont *η-isogènes* s'il existe une η-isogénie de l'un sur l'autre. L'existence d'une telle isogénie implique en effet immédiatement celle d'une η-isogénie dans l'autre sens.

Notons qu'il y a une façon naturelle d'étendre le morphisme $\phi : E^{\mathrm{f}} \to \mathrm{Aut}_{\bar{K}}(\bar{T})$ en un morphisme continu $\phi' : E^{\mathrm{f}} \to \mathrm{SAut}(\bar{T})$. En effet, le groupe $\mathrm{SAut}_{\bar{K}}(\bar{T})$ est canoniquement isomorphe au produit direct $\mathrm{Aut}_{\bar{K}}(\bar{T}) \times \Gamma_K$ via la K-forme déployée de $\bar{T}$. Il suffit alors de coupler ϕ avec la projection naturelle $E^{\mathrm{f}} \to \Gamma_K$ pour obtenir le morphisme ϕ' voulu. Ceci nous dit qu'on aurait pu définir un η-tore de façon équivalente comme la donnée d'un $\bar{K}$-tore $\bar{T}$ et d'un morphisme continu $\phi' : E^{\mathrm{f}} \to \mathrm{SAut}(\bar{T})$ s'insérant dans le carré commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} E^{\mathrm{f}} \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\phi'"'] & \Gamma_K \arrow[d, equal] \\ \mathrm{SAut}(\bar{T}) \arrow[r, two heads] & \Gamma_K. \end{tikzcd}$$

Au vu de la discussion précédente, cette nouvelle définition est essentiellement équivalente à la précédente, et se prête plus facilement à des généralisations non commutatives.

Remarque.
Ceci est une généralisation de la notion de K-action d'un K-groupe algébrique G sur un K-tore T. En effet, une telle action se factorise toujours par le quotient G^{f} de G et celle-ci donne de façon naturelle un η-tore avec pour η la classe neutre $n(G) \in H^2(K, F)$. En effet, l'action de G^{f} correspond à un morphisme $G^{\mathrm{f}}(\bar{K}) \to \mathrm{Aut}_{\bar{K}}(\bar{T})$, tandis que la structure de K-groupe de T donne un morphisme continu $\Gamma_K \to \mathrm{Aut}_{\bar{K}}(\bar{T})$. Le fait que l'action de G^{f} soit définie sur K permet alors d'étendre naturellement ces deux flèches en un morphisme $G^{\mathrm{f}}(\bar{K}) \rtimes \Gamma_K \to \mathrm{Aut}_{\bar{K}}(\bar{T})$, donnant ainsi un $n(G^{\mathrm{f}})$-tore et donc un $n(G)$-tore. On généralise ainsi ce qui a été fait dans [LA16] autour du lemme d'Ono pour traiter les questions d'approximation faible.

Le lemme suivant est une conséquence immédiate de [LA16, Lem. 9] (résultat sur les modules de type fini sans torsion, dû à Ono) et des paragraphes qui précèdent.

Lemme 4.2. *Soient K un corps de caractéristique 0, L un K-lien de groupe $\bar{G}$ et $\eta \in H^2(K, L)$. Soit $(\bar{T}, \phi)$ un η-tore et soit E' le sous-groupe ouvert de E^{f} correspondant au noyau de ϕ. Alors il existe des η-tores quasi-triviaux $(\bar{P}, \phi_P)$ et $(\bar{Q}, \phi_Q)$ et un entier $r \geq 1$ tels que :*
- *les morphismes ϕ_P, ϕ_Q sont triviaux sur E' ;*
- *le tore $\bar{T}^r \times \bar{P}$ est η-isogène à $\bar{Q}$.*

Ce résultat sera utilisé dans la démonstration du théorème principal. Il se trouve en effet que, de la donné d'un K-lien L de groupe $\bar{G}$ linéaire et d'une classe $\eta \in H^2(K, L)$, il a un η-tore qui se dégage naturellement de la façon suivante.

Considérons le morphisme surjectif $\bar{G} \to \bar{G}^{\mathrm{torf}}$. Puisque $\bar{G}^{\mathrm{ssu}}$ est aussi un sous-groupe caractéristique, on obtient comme avant un K-lien naturel L^{torf} sur $\bar{G}^{\mathrm{torf}}$ et un morphisme de liens surjectif $\pi^{\mathrm{torf}} : L \to L^{\mathrm{torf}}$ qui factorise clairement π^{f}, ce qui nous permet de définir η^{torf} comme l'image de η dans $H^2(K, L^{\mathrm{torf}})$. Il est clair par ailleurs que l'image de η^{torf} dans $H^2(K, L^{\mathrm{f}})$ est η^{f}.

Le tore $\bar{G}^{\mathrm{tor}}$ admet alors naturellement une structure de η-tore. En effet, la classe η^{torf} définit une extension

$$1 \to \bar{G}^{\mathrm{torf}}(\bar{K}) \to E^{\mathrm{torf}} \to \Gamma_K \to 1,$$

et puisque $\bar{G}^{\mathrm{tor}}$ est caractéristique dans $\bar{G}^{\mathrm{torf}}$, on sait que le sous-groupe $\bar{G}^{\mathrm{tor}}(\bar{K})$ est distingué dans E^{torf}. Et puisque c'est η^{f} l'image de η^{torf} après quotient par $\bar{G}^{\mathrm{tor}}$, on obtient une suite exacte

$$1 \to \bar{G}^{\mathrm{tor}}(\bar{K}) \to E^{\mathrm{torf}} \to E^{\mathrm{f}} \to 1.$$

Le groupe E^{f} agit alors de façon naturelle sur $\bar{G}^{\mathrm{tor}}(\bar{K})$ et il est facile de voir que cette action se relève en un morphisme continu vers $\mathrm{SAut}(\bar{G}^{\mathrm{tor}})$, ce qui munit $\bar{G}^{\mathrm{tor}}$ d'une structure de η-tore.

Notons que cette construction est fonctorielle en η. En effet, une extension (pas forcément finie) K_0/K et un morphisme de liens $L \to L_0$ reliant η à $\eta_0 \in H^2(K_0, L_0)$ induit des morphismes $L^{\mathrm{torf}} \to {L_0}^{\mathrm{torf}}$ et $L^{\mathrm{f}} \to {L_0}^{\mathrm{f}}$ reliant respectivement η^{torf} à η_0^{torf} et

η^{f} à η_0^{f}, ce qui correspond au diagramme commutatif d'extensions

$$\begin{tikzcd}
\bar{G}^{\mathrm{torf}}(\bar{K}) \arrow[rr, hook] \arrow[dr] \arrow[dd, equal] & & E^{\mathrm{torf}} \arrow[rr, two heads] \arrow[dr] & & \Gamma_K \arrow[dr, equal] & \\
& \bar{G}^{\mathrm{f}}(\bar{K}) \arrow[rr, hook] \arrow[dd, equal] & & E^{\mathrm{f}} \arrow[rr, two heads] & & \Gamma_K \\
\bar{G}^{\mathrm{torf}}(\bar{K}) \arrow[rr, hook] \arrow[dr] \arrow[dd] & & E_1 \arrow[rr, two heads] \arrow[dr] \arrow[uu] \arrow[dd] & & \Gamma_{K_0} \arrow[dr, equal] \arrow[uu] \arrow[dd, equal] & \\
& \bar{G}^{\mathrm{f}}(\bar{K}) \arrow[rr, hook] \arrow[dd, equal] & & E_2 \arrow[rr, two heads] \arrow[uu] \arrow[dd, equal] & & \Gamma_{K_0} \arrow[uu] \arrow[dd, equal] \\
\bar{G}_0^{\mathrm{torf}}(\bar{K}_0) \arrow[rr, hook] \arrow[dr] & & E_0^{\mathrm{torf}} \arrow[rr, two heads] \arrow[dr] & & \Gamma_{K_0} \arrow[dr, equal] & \\
& \bar{G}_0^{\mathrm{f}}(\bar{K}_0) \arrow[rr, hook] & & E_0^{\mathrm{f}} \arrow[rr, two heads] & & \Gamma_{K_0}
\end{tikzcd}$$

où E_0^{torf} et E_0^{f} représentent respectivement η_0^{torf} et η_0^{f}. D'autre part, le morphisme de $\bar{K}_0$-groupes sous-jacents $\bar{G}_{\bar{K}_0} \to \bar{G}_0$ induit un morphisme de $\bar{K}_0$-tores $\bar{G}_{\bar{K}_0}^{\mathrm{tor}} \to \bar{G}_0^{\mathrm{tor}}$. Le diagramme montre alors facilement que ce morphisme est équivariant par rapport à l'action de E_0^{f} sur ces tores. Tout ceci s'applique en particulier (et de façon évidente) au morphisme $L \to L^{\mathrm{torf}}$.

5 Énoncé et démonstration du théorème principal

Soit k un corps de nombres. Rappelons que l'on s'intéresse dans cet article à la propriété (BMPH) (cf. la section 1) pour les espaces homogènes des groupes linéaires. Comme il a été dit dans l'introduction, il nous faut cependant un minimum de propriétés d'approximation pour appliquer notre résultat principal. On définit alors l'*approximation réelle* comme la propriété

$$X(k) \neq \emptyset \Rightarrow \overline{X(k)} = \prod_{v \in \infty_k} X(k_v), \tag{AR}$$

où ∞_k représente l'ensemble de places réelles de k. C'est le couple (BMPH)+(AR) qu'il nous faut considérer, afin que la propriété suivante soit vérifiée (nous remercions Olivier Wittenberg pour sa suggestion de présenter ainsi le résultat) :

Définition 5.1. Soit K un corps de caractéristique 0 et soit P une propriété des espaces homogènes de K-groupes linéaires connexes. On dit que P est *réductible aux stabilisateurs finis* si elle vérifie, pour X, Y des espaces homogènes :

(i) si X et Y sont stablement birationnels, alors $P(X) \Leftrightarrow P(Y)$;

(ii) si $X \to Y$ est un morphisme admettant une section, alors $P(X) \Rightarrow P(Y)$;

(iii) si $X \to Y$ est un morphisme surjectif dont toute fibre est un espace homogène d'un groupe G semi-simple simplement connexe à stabilisateur géométrique $\bar{H} = \bar{H}^{\mathrm{ssu}}$, alors $P(Y) \Rightarrow P(X)$.

La justification de cette définition vient du fait que la preuve du résultat principal de [LA16] concernant (BMAF), utilise les trois propriétés ci-dessus (qui sont vérifiées pour (BMAF), cf. la proposition 5.3 ci-dessous). Or, la troisième n'est pas vérifiée pour (BMPH), ce qui nous a amenés à rajouter (AR) dans nos hypothèses. Le résultat principal de ce texte est le suivant, et sa preuve est purement géométrique :

Théorème 5.2. *Soit K un corps de caractéristique 0, soit P une propriété des espaces homogènes de K-groupes linéaires connexes qui est réductible aux stabilisateurs finis.*

Soit G un K-groupe linéaire, X un espace homogène de G et $x \in X(\bar{K})$ un point à stabilisateur géométrique $\bar{H}$. Alors, il existe un $\bar{K}$-groupe fini $\bar{F}$, extension de $\bar{H}^{\mathrm{f}}$ par un $\bar{K}$-groupe abélien, un K-espace homogène X' de $\mathrm{SL}_{n,K}$ et $x' \in X'(\bar{K})$ à stabilisateur géométrique $\bar{F}$ tels que $P(X') \Rightarrow P(X)$.

En particulier, si tout espace homogène de $\mathrm{SL}_{n,K}$ à stabilisateurs finis possède P, il en va de même pour tout espace homogène d'un groupe linéaire connexe.

La relation entre X' et X est même un peu plus forte que celle de l'énoncé. Voir à ce sujet la remarque à la fin du texte.

Avant de passer à la démonstration du théorème, voyons quelques propriétés arithmétiques qui sont en effet réductibles aux stabilisateurs finis, dont le dernier cas correspond à notre théorème 1.1.

Proposition 5.3. *Soit k un corps de nombres. Les propriétés suivantes sont réductibles aux stabilisateurs finis :*

- *le principe de Hasse avec approximation réelle ;*
- *l'approximation faible ;*
- *l'approximation faible hors de S avec S un ensemble de places* non archimédiennes *(en particulier l'approximation réelle) ;*
- *la propriété* (BMPH)+(AR) *;*
- *la propriété* (BMAF) *;*
- *la propriété* (BMPH)+(BMAF)*.*

Démonstration. Pour les espaces homogènes, le fait de posséder un point (local ou global) est invariant par stable birationalité (utiliser par exemple [Flo06], Théorème 5.7 et le théorème de Lang-Nishimura) et il en va de même pour la densité des points rationnels dans les points locaux. De même, le groupe de Brauer non ramifié $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}X$ est un invariant birationnel stable et le quotient $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}X/\mathrm{Br}\, k$ est toujours fini pour ces variétés. Enfin, on sait bien que l'espace affine vérifie l'approximation faible. Ceci donne (i) pour toutes les propriétés de l'énoncé.

Vérifier (ii) est facile pour les propriétés où Brauer-Manin n'intervient pas. La fonctorialité du groupe de Brauer donne les autres par un calcul direct.

Pour (iii), on sait d'après [Bor96, Prop. 3.4] que toute fibre du morphisme $X \to Y$ sur un point rationnel de Y vérifie le principe de Hasse, l'approximation faible, et possède des points sur toute place finie. On obtient alors chacune des propriétés par la méthode des fibrations. ☺

Remarque.
Sur un corps de nombres k admettant une place réelle, la propriété “avoir un point rationnel” n'est pas réductible aux stabilisateurs finis.

En revanche, sur un bon corps K de dimension cohomologique ≤ 2 et de caractéristique nulle (au sens de la section 3.4 de [BCTS08]), cette propriété est réductible aux stabilisateurs finis. Le théorème 5.2 pour la propriété “avoir un point rationnel” s'applique par exemple aux corps de nombres totalement imaginaires, aux corps p-adiques, aux corps des fractions d'anneaux intègres strictement henséliens de dimension 2 et de caractéristique résiduelle nulle.

Preuve du théorème 5.2. On note L le K-lien sur $\bar{H}$ associé à X et $\eta \in H^2(K, L)$ la classe de Springer correspondante. On rappelle que l'on dispose des liens naturellement induits L^{torf} et L^{f} de groupes respectifs $\bar{H}^{\mathrm{torf}}$ et $\bar{H}^{\mathrm{f}}$, ainsi que des classes correspondantes η^{torf} et η^{f} dans les ensembles de 2-cohomologie respectifs. Enfin, on note E^{torf} et E^{f} des extensions représentant η^{torf} et η^{f} respectivement.

On procède par réductions successives.

Étape 0 : On peut supposer G^{ss} simplement connexe. En effet, d'après [Bor96, Lem. 5.1], il existe K-un groupe linéaire connexe G' avec $(G')^{\mathrm{ss}}$ simplement connexe et un morphisme surjectif $G' \to G$ à noyau torique. On peut alors regarder X comme un espace homogène de G', ce qui nous permet de supposer que G^{ss} est simplement connexe dorénavant. Notez aussi que $\bar{H}^{\mathrm{f}}$ n'a pas été modifié dans le processus.

Étape 1 : Réduction à un espace homogène X_1 de $G_1 = G^{\mathrm{tor}} \times \mathrm{SL}_{n,K}$ avec stabilisateur géométrique $\bar{H}_1 = \bar{H}^{\mathrm{torf}}$. Posons $L_1 := L^{\mathrm{torf}}$, $\bar{H}_1 := \bar{H}^{\mathrm{torf}}$ et $\eta_1 := \eta^{\mathrm{torf}}$. Puisque le noyau $\bar{H}^{\mathrm{ssu}}$ du morphisme $L \to L_1$ est clairement contenu dans $\bar{G}^{\mathrm{ssu}}$, on peut utiliser le théorème 3.6 avec ces classes et le groupe $\mathrm{SL}_{n,K}$. Il existe alors un K-espace homogène X_1 de $G_1 := G^{\mathrm{tor}} \times \mathrm{SL}_{n,K}$ de lien $L_{X_1} = L_1$ et de classe de Springer $\eta_{X_1} = \eta_1$; un K-espace homogène Y_1 de $G \times \mathrm{SL}_{n,K}$ de lien $L_{Y_1} = L$ et de classe de Springer $\eta_{Y_1} = \eta$; et des morphismes naturels de K-espaces homogènes

$$\begin{tikzcd} & Y_1 \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ X & & X_1 , \end{tikzcd}$$

de sorte que p est un torseur sous $\mathrm{SL}_{n,K}$ et les fibres de q sont des espaces homogènes de G^{ssu} à stabilisateurs géométriques $\bar{H}^{\mathrm{ssu}}$.

On voit alors que Y_1 est K-stablement birationnel à X, ce qui nous dit que $P(Y_1) \Rightarrow P(X)$. La description des fibres de q nous permet ensuite de déduire que $P(X_1) \Rightarrow P(Y_1)$, donc on peut se ramener à X_1.

Étape 2 : Réduction a un espace homogène X_2 de $G_2 = G^{\mathrm{tor}} \times \mathrm{SL}_{n,K}$ à stabilisateur géométrique $\bar{H}_2 = \bar{H}^{\mathrm{torf}}$ et avec $\bar{H}^{\mathrm{tor}}$ η-isogène à un η-tore quasi-trivial.

On rappelle que l'on dispose d'un espace homogène X_1 de classe $\eta_1 = \eta^{\mathrm{torf}}$ et stabilisateur géométrique $\bar{H}_1 = \bar{H}^{\mathrm{torf}}$. D'après la construction qu'on a présenté dans la section 4, le tore $\bar{H}^{\mathrm{tor}}$, que l'on notera $\bar{T}$ dans la suite pour simplifier, possède une structure naturelle de η_1-tore (donc de η-tore par fonctorialité).

Appliquons le lemme 4.2 à $\bar{T}$. On obtient des η_1-tores quasi-triviaux $\bar{P}$ et $\bar{Q}$ et un entier $r \geq 1$ tel que $\bar{T}^r \times \bar{P}$ est η_1-isogène à $\bar{Q}$. Par définition des η_1-tores, l'extension $E_1 = E^{\mathrm{torf}}$ de Γ_K par $\bar{H}_1(\bar{K})$ correspondant à η_1 agit sur chacun des $\bar{K}$-tores via le quotient E^{f}. On peut alors considérer le produit semi-direct $(\bar{T}^{r-1}(\bar{K}) \times \bar{P}(\bar{K})) \rtimes E_1$. Ce groupe s'insère naturellement dans une suite exacte

$$1 \to (\bar{T}^{r-1}(\bar{K}) \times \bar{P}(\bar{K})) \rtimes \bar{H}_1(\bar{K}) \to (\bar{T}^{r-1}(\bar{K}) \times \bar{P}(\bar{K})) \rtimes E_1 \to \Gamma_K \to 1,$$

et cette extension définit un K-lien L_2 sur $\bar{H}_2 := (\bar{T}^{r-1} \times \bar{P}) \rtimes \bar{H}_1$, ainsi qu'une classe $\eta_2 \in H^2(K, L_2)$. Notons que $\bar{H}_2$ admet pour groupe des composantes connexes le même groupe fini $\bar{H}^{\mathrm{f}}$ et pour composante neutre le η_1-tore $\bar{T}^r \times \bar{P}$, qui est η_1-isogène à $\bar{Q}$ (et donc η-isogène et η_2-isogène par fonctorialité). C'est donc le stabilisateur géométrique souhaité.

Le diagramme commutatif à lignes exactes suivant (avec des flèches σ et π définies de façon évidente)

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \bar{H}_2 \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] & (\bar{T}^{r-1} \times \bar{P}) \rtimes E \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] & \Gamma_K \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & \bar{H}_1 \arrow[r] \arrow[u, bend right, "\sigma"'] & E \arrow[r] \arrow[u, bend right, "\sigma"'] & \Gamma_K \arrow[r] & 1,
\end{tikzcd}$$

correspond alors à des morphismes de liens $\sigma : L_1 \to L_2$ et $\pi : L_2 \to L_1$ tels que $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}$, $\sigma^{(2)} : \eta_1 \multimap \eta_2$ et $\pi^{(2)} : \eta_2 \multimap \eta_1$.

Remarquons que la construction de L_2 et η_2 ne dépend pas de l'étape 1. On peut alors supposer que, dans l'application du théorème 3.6 lors de cette étape, le plongement de L_1 dans $\mathrm{SL}_{n,K}$ reliant η_1 à $n(\mathrm{SL}_{n,K})$ se factorise par le lien L_2 et par la classe η_2 (il suffit d'appliquer la proposition 3.3 à η_2 et de composer avec σ). On obtient alors en particulier un plongement de $\bar{H}_2$ dans $\mathrm{SL}_{n,\bar{K}}$, donc des plongements compatibles

$$\begin{tikzcd}
\bar{H}_1 \arrow[dr, hook, "\sigma"'] \arrow[drr, hook, "s"] & & \\
& \bar{H}_2 \arrow[r, hook] & \mathrm{SL}_{n,\bar{K}}. \\
\bar{T}^{r-1} \times \bar{P} \arrow[ur, hook] \arrow[urr, hook, "i"'] & &
\end{tikzcd}$$

Considérons maintenant une copie $\mathrm{SL}'_{n,K}$ du même groupe $\mathrm{SL}_{n,K}$ avec des copies s' et i' des plongements de $\bar{H}_1$ et de $\bar{T}^{r-1} \times \bar{P}$ dans $\mathrm{SL}'_{n,\bar{K}}$. On fait agir G_1 sur $\mathrm{SL}'_{n,K}$ via l'action triviale de G^{tor} et l'action par conjugaison de $\mathrm{SL}_{n,K}$. Notons $j \times s$ le plongement de $\bar{H}_1$ dans $\bar{G}_1 = \bar{G}^{\mathrm{tor}} \times \mathrm{SL}_{n,\bar{K}}$. Le produit semi-direct $\bar{H}_2 = (\bar{T}^{r-1} \times \bar{P}) \rtimes \bar{H}_1$ se plonge alors dans le produit semi-direct $\bar{G}_2' := \mathrm{SL}'_{n,\bar{K}} \rtimes \bar{G}_1$ via i' et $j \times s$. En d'autres mots, on a le diagramme commutatif à lignes exactes scindées suivant :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \bar{T}^{r-1} \times \bar{P} \arrow[r] \arrow[d, hook, "i'"'] & \bar{H}_2 \arrow[r] \arrow[d, hook, "i' \rtimes (j \times s)"'] & \bar{H}_1 \arrow[r] \arrow[d, hook, "j \times s"] \arrow[l, bend right] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathrm{SL}'_{n,\bar{K}} \arrow[r] & \bar{G}_2' \arrow[r] & \bar{G}_1 \arrow[r] \arrow[l, bend right] & 1.
\end{tikzcd}$$

Posons $\bar{X}_2' := \bar{H}_2 \backslash \bar{G}_2'$. Le diagramme ci-dessus nous dit que l'on a un $\bar{K}$-morphisme surjectif $\bar{X}_2' \to \bar{X}_1$, équivariant pour le morphisme $\bar{G}_2' \to \bar{G}_1$, et qui de plus admet une section $\bar{X}_1 \to \bar{X}_2'$.

Notons $(f, u) \in Z^2(K, L)$ un 2-cocycle représentant η_1. Par construction, il existe une application continue $c : \Gamma_K \to G_1(\bar{K})$ telle que si $f' : \Gamma_K \to \mathrm{SAut}(\bar{G}_1)$ est le morphisme induit par l'action naturelle sur G_1, on a $f_\sigma = \mathrm{Int}\,(c_\sigma) \circ f'_\sigma$ et $u_{\sigma,\tau} = c_\sigma f'_\sigma(c_\tau) c_{\sigma\tau}^{-1}$. La compatibilité $\sigma^{(2)} : \eta_1 \multimap \eta_2$ nous dit que l'on peut choisir la fonction u (et donc c) de façon à ce que, en rergardant $G_1(\bar{K})$ comme un sous-groupe de $G_2'(\bar{K})$, le cocycle (f, u) représente aussi η_2 (l'action naturelle de Γ_K sur $G_2'(\bar{K})$ est compatible avec l'inclusion de G_1, donc f a un sens sur G_2').

Puisque c'est avec la fonction c que l'on définit la K-forme X_1 de $\bar{X}_1$ par descente galoisienne (cf. la preuve de la proposition 3.4), on vérifie aisément qu'elle induit aussi une donnée de descente sur $\bar{X}_2'$, compatible avec celle de $\bar{X}_1$, ce qui nous dit que
- $\bar{X}_2'$ descend en un espace homogène X_2' de G_2' de classe $\eta_{X_2'} = \eta_2$ et stabilisateur géométrique $\bar{H}_2$;
- les flèches $\bar{X}_2' \to \bar{X}_1$ et $\bar{X}_1 \to \bar{X}_2'$ descendent en un K-morphisme surjectif $X_2' \to X_1$ et une K-section $X_1 \to X_2'$.

On voit alors que $P(X_2') \Rightarrow P(X_1)$ et on est réduit à X_2'.

Finalement, en utilisant le théorème 3.6 pour l'espace homogène X_2', le morphisme identité $L_2 \to L_2$, le plongement reliant η_2 à $n(\mathrm{SL}_{n,K})$ et le sous-groupe $\mathrm{SL}'_{n,K} \rtimes \mathrm{SL}_{n,K}$ de G_2', on obtient un espace homogène Y_2 qui est K-stablement birationnel à X_2', ainsi qu'un espace homogène X_2 de $G_2 := G^{\mathrm{torf}} \times \mathrm{SL}_{n,K}$ de classe $\eta_{X_2} = \eta_2$ et une flèche $Y_2 \to X_2$ dont on voit aisément qu'il s'agit d'un torseur sous $\mathrm{SL}'_{n,K} \rtimes \mathrm{SL}_{n,K}$. Or ce groupe est clairement K-rationnel et K-spécial, ce qui nous dit que X_2 est K-stablement birationnel à Y_2, donc à X_2'. On obtient alors que $P(X_2) \Rightarrow P(X_2')$ et on peut se ramener alors à X_2.

Étape 3 : Réduction à un espace homogène X_3 de $G_3 = G^{\mathrm{tor}} \times \mathrm{SL}_{n,K}$ à stabilisateur géométrique $\bar{H}_3$, extension de $\bar{H}^{\mathrm{f}}$ par un $\bar{K}$-groupe fini abélien. On rappelle que l'on dispose d'un espace homogène X_2 de classe η_2 compatible avec η^{f} et stabilisateur géométrique $\bar{H}_2$ extension de $\bar{H}^{\mathrm{f}}$ par un η_2-tore qui est η_2-isogène à un η_2-tore quasi-trivial $\bar{Q}$. Notons E_2 l'extension de Γ_K par $\bar{H}_2(\bar{K})$ représentant η_2. La construction du η_2-tore $\bar{H}_2^{\mathrm{tor}}$ (cf. la section 4) nous fournit la suite exacte

$$1 \to \bar{H}_2^{\mathrm{tor}}(\bar{K}) \to E_2 \to E^{\mathrm{f}} \to 1.$$

Puisque E^{f} est un groupe profini, la théorie classique de cohomologie de groupes nous dit que cette extension correspond à une classe $\zeta \in H^2(E^{\mathrm{f}}, \bar{H}_2^{\mathrm{tor}}(\bar{K}))$. Or ce groupe est de torsion (car E^{f} est profini), donc il existe un $m \in \mathbb{N}$ tel que $m\zeta = 0$. Cela veut dire que, si l'on note par $\bar{A}'$ le $\bar{K}$-sous-groupe de m-torsion de $\bar{H}_2^{\mathrm{tor}}$, la longue suite exacte de cohomologie nous permet de déduire que l'extension ci-dessus provient d'une extension de E^{f} par $\bar{A}'(\bar{K})$. Autrement dit, on a un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \bar{A}'(\bar{K}) \arrow[r] \arrow[d] & E_3' \arrow[r] \arrow[d] & E^{\mathrm{f}} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\ 1 \arrow[r] & \bar{H}_2^{\mathrm{tor}}(\bar{K}) \arrow[r] & E_2 \arrow[r] & E^{\mathrm{f}} \arrow[r] & 1. \end{tikzcd}$$

Rappelons que $\bar{H}_2^{\mathrm{tor}}$ est par hypothèse η_2-isogène (ou encore, E^{f}-isogène) à $\bar{Q}$. On définit alors $\bar{A}$ comme le noyau du morphisme composé de η_2-tores

$$\rho : \bar{H}_2^{\mathrm{tor}} \xrightarrow{\times m} \bar{H}_2^{\mathrm{tor}} \to \bar{Q}.$$

Puisque $\bar{A}' \subset \bar{A} \subset \bar{H}_2^{\mathrm{tor}}$, l'extension E_3' induit une extension E_3 de E^{f} par $\bar{A}(\bar{K})$ qui factorise le diagramme précédent. Or, on dispose d'un morphisme naturel $E_3 \to \Gamma_K$ via son quotient E^{f} et l'on définit alors $\bar{H}_3$ comme le $\bar{K}$-groupe fini correspondant au noyau (abstrait) de ce morphisme. On obtient alors la suite exacte supérieure dans le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \bar{H}_3(\bar{K}) \arrow[r] \arrow[d] & E_3 \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma_K \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\ 1 \arrow[r] & \bar{H}_2(\bar{K}) \arrow[r] & E_2 \arrow[r] & \Gamma_K \arrow[r] & 1, \end{tikzcd}$$

Le groupe $\bar{H}_3$ est une extension de $\bar{H}^{\mathrm{f}}$ par $\bar{A}$. Cette extension définit alors un K-lien L_3 sur $\bar{H}_3$, ainsi qu'une classe $\eta_3 \in H^2(K, L_3)$. Et le diagramme nous dit alors que l'on dispose d'un morphisme de liens $\iota : L_3 \to L_2$ tel que $\iota^{(2)} : \eta_3 \multimap \eta_2$. La proposition 3.4 assure donc l'existence d'un espace homogène X_3 de $G_3 := G_2 = G^{\mathrm{tor}} \times \mathrm{SL}_{n,K}$ de classe $\eta_{X_3} = \eta_3$, donc de stabilisateur géométrique $\bar{H}_3$, muni d'un morphisme dominant $X_3 \to X_2$ équivariant avec les actions de $G_3 = G_2$.

On affirme que l'espace X_3 est K-stablement birationnel à X_2, ce qui suffit pour conclure cette étape. Pour démontrer cela, il suffira de démontrer que, si l'on note ξ le point générique de X_2 et K le corps de fonctions correspondant, alors la fibre générique $X_{3,\xi}$ est K-rationnelle.

Le point générique ξ de X_2 nous donne une K-forme naturelle $H_{2,\xi}$ de $\bar{H}_2$ et donc une K-forme H_ξ^{f} de $\bar{H}^{\mathrm{f}}$. Cela nous dit que l'image $\eta_{2,\xi}$ de η_2 dans $H^2(K, L_{2,\xi})$ correspond à la classe neutre $n(H_{2,\xi})$ et de même qu'on a $\eta_\xi^{\mathrm{f}} = n(H_\xi^{\mathrm{f}})$. Ou encore, on obtient des sections des extensions suivantes :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & H_{2,\xi}(\bar{K}) \arrow[r] \arrow[d] & E_{2,\xi} \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma_K \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[l, bend right, "s_\xi"'] & 1 \\ 1 \arrow[r] & \bar{H}_\xi^{\mathrm{f}}(\bar{K}) \arrow[r] & E_\xi^{\mathrm{f}} \arrow[r] & \Gamma_K \arrow[r] \arrow[l, bend right, "s_\xi"'] & 1\,. \end{tikzcd}$$

Notons en outre que la fonctorialité de la construction des η-tores fait de tout η_2-tore un $\eta_{2,\xi}$-tore (via la projection $E^{\mathrm{f}}_{\xi} \to E^{\mathrm{f}}$). En particulier, puisque l'on dispose de la section s_ξ de $E_{2,\xi}$ (ou encore de E^{f}_{ξ}), tout tel tore admet une K-forme naturelle (pour $\bar{H}_2^{\mathrm{tor}}$, c'est justement la K-forme correspondant à $H_{2,\xi}^{\mathrm{tor}}$). On en déduit que $\bar{Q}$ admet une K-forme Q_ξ qui est quasi-triviale en tant que K-tore et le morphisme $\rho : H_{2,\xi}^{\mathrm{tor}} \to Q_\xi$ est alors un K-morphisme. On en déduit une K-forme naturelle A_ξ de $\bar{A}$ et une suite exacte de K-groupes abéliens

$$1 \to A_\xi \to H_{2,\xi}^{\mathrm{tor}} \xrightarrow{\rho} Q_\xi \to 1.$$

Revenons donc à la variété $X_{3,\xi}$, où ξ est le point générique de X_2, dont on veut montrer la K-rationalité. Elle correspond à la fibre du morphisme $X_{3,K} \to X_{2,K}$ (obtenu par changement de base) au K-point ξ. Le groupe $G_{3,K} = G_{2,K}$ agit sur les deux variétés de façon compatible, donc le groupe $H_{2,\xi}$ le fait aussi en tant que sous-K-groupe de $G_{2,K}$. Mais puisque ce sous-groupe fixe le point ξ, il agit naturellement par restriction sur la fibre $X_{3,\xi}$. Or cette action est clairement transitive sur $\bar{K}$ et a pour stabilisateur $\bar{H}_{3,\bar{K}}$. Le tore $H_{2,\xi}^{\mathrm{tor}}$ agit alors sur $X_{3,\xi}$ par restriction et l'on vérifie aisément que cette action est aussi transitive sur $\bar{K}$ puisque $\bar{H}_{3,\bar{K}}$ rencontre toutes les composantes connexes de $H_{2,\bar{K}}$. Le stabilisateur géométrique de cette action est clairement $H_{2,\bar{K}}^{\mathrm{tor}} \cap \bar{H}_{3,\bar{K}} = \bar{A}_{\bar{K}}$, qui est défini sur K comme on l'a déjà démontré. La variété $X_{3,\xi}$ est alors un *torseur* sous le K-groupe quotient $H_{2,\xi}^{\mathrm{tor}}/A_\xi = Q_\xi$. Or ce tore est quasi-trivial, ce qui veut dire qu'il est K-rationnel et de plus $H^1(K, Q_\xi) = 0$, donc $X_{3,\xi}$ est isomorphe à Q_ξ et donc K-rationnelle comme on l'avait anoncé.

Étape 4 : Réduction à un espace homogène X_4 de $G_4 = \mathrm{SL}_{n,K}$ à stabilisateur $\bar{H}_4$ extension de $\bar{H}^{\mathrm{f}}$ par un $\bar{K}$-groupe fini abélien. Notons $T' := G^{\mathrm{tor}}$ pendant cette dernière étape pour alléger la lecture. Nous avons alors X_3 un espace homogène de $G_3 = T' \times \mathrm{SL}_{n,K}$ avec stabilisateur géométrique $\bar{H}_3$, extension de $\bar{H}^{\mathrm{f}}$ par un $\bar{K}$-groupe fini abélien $\bar{A}$.

D'après le lemme d'Ono, il existe des K-tores quasi-triviaux P', Q' tels qu'il existe une K-isogénie $Q' \to T'^m \times P'$. Soit A' le noyau fini abélien correspondant et considérons alors le produit

$$G_3' := G_3 \times T'^{m-1} \times P' = \mathrm{SL}_{n,K} \times T'^m \times P',$$

et l'isogénie $G_4' := \mathrm{SL}_{n,K} \times Q' \to G_3'$, de noyau A'. La variété

$$X_4' := X_3 \times T'^{m-1} \times P',$$

est clairement un espace homogène de G_3' à stabilisateur géométrique $\bar{H}_3$, donc c'est aussi un espace homogène de G_4' à stabilisateur $\bar{H}_4$, extension de $\bar{H}_3$ par $\bar{A}'$.

Or, notons que $\bar{H}_4$ est encore une extension de $\bar{H}^{\mathrm{f}}$ par un groupe abélien. En effet, le noyau de la projection naturelle $\bar{H}_4 \to \bar{H}^{\mathrm{f}}$ est une extension de $\bar{A}$ par $\bar{A}'$, contenue dans $\bar{G}_4'$, dont les projections vers $\mathrm{SL}_{n,\bar{K}}$ et $\bar{Q}'$ sont toutes deux clairement abéliennes, d'où l'extension toute entière est abélienne aussi.

Comme la projection $X_4' \to X_3$ admet clairement une section, on obtient que $P(X_4') \Rightarrow P(X_3)$, donc on peut se réduire au cas de X_4'.

Enfin, puisque G_4' est un K-groupe spécial K-rationnel, il suffit d'appliquer le corollaire 3.7 pour se ramener au cas d'un espace homogène $X' = X_4$ de $G_4 := \mathrm{SL}_{n,K}$ à stabilisateur géométrique $\bar{F} = \bar{H}_4$ par K-stable birationalité, ce qui conclut. ☺

Remarque.
En suivant la preuve, on peut constater que non seulement $\bar{F}$ est une extension de $\bar{H}^{\mathrm{f}}$ par un $\bar{K}$-groupe abélien, mais en fait on a un morphisme naturel et surjectif de K-liens $L_{X'} \to L^{\mathrm{f}}$ qui envoie $\eta_{X'}$ en η^{f}. De plus, lorsque X possède un K-point, il est facile de voir que cette construction fournit un espace homogène X' qui possède aussi un K-point et le morphisme $\bar{F} \to \bar{H}^{\mathrm{f}}$ est alors défini sur K (une autre façon de se convaincre de ce fait est de suivre la preuve dans [LA16]). Ce fait devrait être utile pour obtenir des résultats inconditionnels sur (BMPH) pour des stabilisateurs non connexes à partir de résultats positifs pour des stabilisateurs finis, suivant l'exemple de [LA16, §5].

Références

[BCTS08] **M. Borovoi, J.-L. Colliot-Thélène, A. Skorobogatov.** The elementary obstruction and homogeneous spaces. *Duke Math. J.* 141(2), 321–364, 2008.

[BLR90] **S. Bosch, W. Lütkebohmert, M. Raynaud.** *Néron models.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), No. **21**. Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[Bor93] **M. Borovoi.** Abelianization of the second nonabelian Galois cohomology. *Duke Math. J.* 72(1), 217–239, 1993.

[Bor96] **M. Borovoi.** The Brauer-Manin obstructions for homogeneous spaces with connected or abelian stabilizer. *J. Reine Angew. Math.* 473, 181–194, 1996.

[Bre95] **L. Breen.** *On the classification of 2-gerbes and 2-stacks.* Astérisque No 225, Société Mathématique de France, Paris, 1994.

[CT03] **J.-L. Colliot-Thélène.** Points rationnels sur les fibrations. *Higher dimensional varieties and rational points (Budapest, 2001)*, 171–221, Bolyai Soc. Math. Stud., 12, *Springer, Berlin*, 2003.

[CTS07] **J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc.** The rationality problem for fields of invariants under linear algebraic groups (with special regards to the Brauer group). *Algebraic groups and homogeneous spaces*, 113–186, Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math., *Tata Inst. Fund. Res., Mumbai*, 2007.

[Dem10] **C. Demarche.** Groupe de Brauer non ramifié d'espaces homogènes à stabilisateurs finis. *Math. Ann.* 346(4), 949–968, 2010.

[FSS98] **Y. Z. Flicker, C. Scheiderer, R. Sujatha.** Grothendieck's theorem on non-abelian H^2 and local-global principles. *J. Amer. Math. Soc.* 11(3), 731–750, 1998.

[Flo06] **M. Florence** Points rationnels sur les espaces homogènes et leurs compactifications. *Transformation Groups* 11(2), 161–176, 2006.

[Gir64] **J. Giraud.** Méthode de la Descente. *Bull. Soc. Math. France Mém* 2, III-1–VIII-150, 1964.

[Gir71] **J. Giraud.** *Cohomologie non abélienne*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, No. **179**. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.

[LA14] **G. Lucchini Arteche.** Approximation faible et principe de Hasse pour des espaces homogènes à stabilisateur fini résoluble. *Math. Ann.* 360, 1021–1039, 2014.

[LA16] **G. Lucchini Arteche.** Weak approximation for homogeneous spaces : reduction to the case with finite stabilizer. À paraître dans *Mathematical Research Letters*.

[San81] **J.-J. Sansuc.** Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres. *J. Reine Angew. Math.* 327, 12–80, 1981.

[Sko01] **A. Skorobogatov.** *Torsors and rational points*, Cambridge Tracts in Mathematics, No. **144**. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[Spr66] **T. A. Springer.** Nonabelian H^2 in Galois cohomology. *Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups (Proc. Sympos. Pure Math., Boulder, Colo., 1965)*, 164–182, *Amer. Math. Soc., Providence, RI*, 1966.

[Spr98] **T. A. Springer.** *Linear algebraic groups*, Progress in Mathematics, No. **9**. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, second edition, 1998.

[Wat79] **W. C. Waterhouse.** *Introduction to affine group schemes*. Graduate Texts in Mathematics, No **66**. Springer-Verlag, New York, 1979.