LE GROUPE FONDAMENTAL ÉTALE D'UN ESPACE HOMOGÈNE D'UN GROUPE ALGÉBRIQUE LINÉAIRE

CYRIL DEMARCHE

RÉSUMÉ. Soit X un espace homogène d'un groupe algébrique linéaire connexe G sur un corps k algébriquement clos d'exposant caractéristique p. Soit $x \in X(k)$. On désigne par H le stabilisateur de x dans G et on suppose H connexe ou abélien.

Dans ce texte, on calcule explicitement la partie première à p du groupe fondamental étale $\pi_1^{\text{ét}}(X,x)$ de X, en termes des groupes de caractères de G et H.

On donne une application de cette formule à une variante de la conjecture des sections pour les espaces homogènes.

ABSTRACT. Let X be a homogeneous space of a connected linear algebraic group G defined over an algebraic closed field k of characteristic exponent p. Let $x \in X(k)$. We denote by H the stabilizer of x in G and we assumed that H is connected or abelian.

In this text, we compute explicitely the prime-to-p-part of the étale fundamental group $\pi_1^{\text{ét}}(X,x)$ in terms of the character groups of G and H.

As an application, we prove a variant of the section conjecture for homogeneous spaces.

0. INTRODUCTION

Soit k un corps algébriquement clos d'exposant caractéristique $p \geq 1$. Le groupe fondamental étale des groupes algébriques connexes sur k et de leurs espaces homogènes a été étudié récemment par Brion et Szamuely dans [BS13]. Ces auteurs ont notamment décrit les revêtements galoisiens premiers à p de ces espaces homogènes et en ont déduit une majoration du rang de leur groupe fondamental premier à p (voir [BS13], théorème 1.2).

Dans ce texte, on s'intéresse au cas où le groupe ambiant est linéaire, et on précise les résultats sus-mentionnés, en démontrant une formule explicite pour le groupe fondamental d'un espace homogène (sous une certaine hypothèse de connexité sur les stabilisateurs). Si X est un espace homogène sur k d'un k-groupe linéaire connexe G à stabilisateur H connexe ou abélien, notre formule fait intervenir les groupes de caractères de G et H.

0.1. Dans les trois premières parties de ce texte, k est un corps algébriquement clos d'exposant caractéristique $p \geq 1$, et une variété sur k est un k-schéma intègre, séparé et de type fini. Par convention, tous les revêtements étales galoisiens sont supposés connexes.

Soit X une variété sur k, et soit $x \in X(k)$.

On désigne par $\pi_1^{\text{ét}}(X,x)$ le groupe fondamental étale de la variété pointée (X,x) ; voir [SGA1, exposé V]. C'est un groupe topologique profini. De même, on note $\pi_1^{\text{ét}}(X,x)^{(p')}$ le quotient maximal premier à p du groupe fondamental étale de X.

Dans toute la suite, on note $\mathbb{Z}_{(p')}$ le produit direct des anneaux $\mathbb{Z}_\ell$ pour $\ell \neq p$, et on note aussi $\mathbb{Z}_{(p')}(1) := \pi_1^{\text{ét}}(\mathbb{G}_{m,k}, 1)^{(p')}$.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary: 14F35, 14M17, 20G20.

Key words and phrases. Étale fundamental group, homogeneous space, linear algebraic group.

L'auteur a bénéficié d'une aide de l'Agence Nationale de la Recherche portant la référence ANR-12-BL01-0005.

On définit également

$$\pi_1^{\text{ét}}(X,x)^{(p')}(-1) := \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathbb{Z}_{(p')}(1), \pi_1^{\text{ét}}(X,x)^{(p')}),$$

l'ensemble pointé des homomorphismes continus de $\mathbb{Z}_{(p')}(1)$ vers $\pi_1^{\text{ét}}(X,x)^{(p')}$.

Si on suppose que le groupe $\pi_1^{\text{ét}}(X,x)^{(p')}$ est abélien, alors $\pi_1^{\text{ét}}(X,x)^{(p')}(-1)$ est canoniquement un groupe abélien, qui est non canoniquement isomorphe au groupe $\pi_1^{\text{ét}}(X,x)^{(p')}$ (l'isomorphisme dépend du choix d'un isomorphisme entre $\mathbb{Z}_{(p')}(1)$ et $\mathbb{Z}_{(p')}$).

Par fonctorialité, un morphisme de k-variétés pointées $f\colon (\mathbb{G}_{m,k},1) \to (X,x)$ définit un élément

$$f_*^{\text{ét}} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\pi_1^{\text{ét}}(\mathbb{G}_{m,k},1)^{(p')}, \pi_1^{\text{ét}}(X,x)^{(p')}) = \pi_1^{\text{ét}}(X,x)(-1)^{(p')}.$$

Notations 0.2. Soit G un groupe algébrique linéaire connexe défini sur k. On utilise les notations suivantes :

G^{u} est le radical unipotent de G ;

$G^{\mathrm{red}} = G/G^{\mathrm{u}}$, qui est un groupe réductif ;

$G^{\mathrm{ss}} = [G^{\mathrm{red}}, G^{\mathrm{red}}]$, qui est semi-simple ;

G^{sc} est le revêtement universel de G^{ss}, il est simplement connexe ;

$G^{\mathrm{tor}} = G^{\mathrm{red}}/G^{\mathrm{ss}}$, qui est un tore ;

$G^{\mathrm{ssu}} = \ker(G \to G^{\mathrm{tor}})$, qui est une extension d'un groupe semi-simple connexe par un groupe unipotent.

On remarque que G^{tor} est le plus grand quotient torique de G et que G^{ssu} est connexe et sans caractères.

Si T est un tore sur k, on écrit T_* pour le groupe des cocaractères de T, c'est-à-dire $T_* := \mathrm{Hom}_k(\mathbb{G}_{m,k}, T)$. On a en particulier $T_* \cong \mathrm{Hom}(\widehat{T}, \mathbb{Z})$, où $\widehat{T}$ est le groupe des caractères de T.

Si H un groupe algébrique linéaire sur k, on écrit $\pi_0(H) = H/H^0$, où H^0 est la composante neutre de H.

0.3. Soit X un espace homogène d'un groupe algébrique linéaire connexe G défini sur k. On choisit un k-point $x \in X(k)$ et on pose $H = \mathrm{Stab}_G(x)$. On désigne par H^{mult} le groupe quotient maximal de H de type multiplicatif. On pose $H^{\mathrm{kercar}} := \ker(H \to H^{\mathrm{mult}})$. Alors H^{kercar} est l'intersection des noyaux de tous les caractères $\chi\colon H \to \mathbb{G}_{m,k}$ de H. On suppose :

(i) $\mathrm{Pic}(G) = 0$,

(ii) H^{kercar} est connexe.

On remarque que (i) est satisfait si et seulement si G^{ss} est simplement connexe (voir Sansuc [S81], Lemme 6.9 et Remarques 6.11.3) et que (ii) est satisfait si H est connexe ou si k est de caractéristique 0 et H est abélien.

On note $\widehat{G} := \mathrm{Hom}(G, \mathbb{G}_{m,k})$ et $\widehat{H} := \mathrm{Hom}(H, \mathbb{G}_{m,k})$. On écrit aussi

$$\mathrm{Ext}^0_{\mathbb{Z}}(\widehat{G} \to \widehat{H}, \mathbb{Z}) := \mathrm{Ext}^0_{\mathbb{Z}}([\widehat{G} \xrightarrow{i^*} \widehat{H}\rangle, \mathbb{Z}),$$

où $[\widehat{G} \xrightarrow{i^*} \widehat{H}\rangle$ est un complexe en degrés 0 et 1, et l'homomorphisme i^* est induit par l'inclusion $i\colon H \hookrightarrow G$ (voir § 2.1 ci-dessous pour la definition de $\mathrm{Ext}^0_{\mathbb{Z}}$).

En utilisant des résultats de Brion et Szamuely [BS13], on démontre dans ce texte le théorème suivant :

Théorème 0.4 (Théorème 3.1)**.** *Soit k un corps algébriquement clos d'exposant caractéristique $p \geq 1$. Soit G/k un groupe linéaire connexe lisse et X/k un espace homogène de G. Soit $x \in X(k)$, on pose $H := \mathrm{Stab}_G(x)$. On suppose que* $\mathrm{Pic}(G) = 0$*, H est lisse et H^{kercar} est connexe. Alors il existe un isomorphisme canonique de groupes topologiques abéliens :*

$$\mathrm{Ext}^0_{\mathbb{Z}}(\widehat{G} \to \widehat{H}, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p')} \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\text{ét}}(X,x)^{(p')}(-1).$$

Le théorème 0.4 généralise et précise le cas particulier du théorème 1.2(b) de [BS13] où G est un groupe linéaire, et a été inspiré par ce théorème de Brion et Szamuely. Remarquons également que l'hypothèse de lissité sur H peut être enlevée (voir [BS13], début de la section 3). Notons enfin que si k est de caractéristique nulle (i.e. $p = 1$) et si $H = 1$, alors ce théorème est un résultat classique de Merkurjev (voir [M98, § 10.1]) et Borovoi (voir [B98], proposition 1.13).

Dans la dernière partie de ce texte, on applique le théorème 0.4 à une variante de la conjecture des sections pour les espaces homogènes (voir le théorème 4.12). Ce résultat généralise des travaux de Stix (voir [S13], chapitre 13).

1. Paires auxiliaires

Dans cette partie, on rappelle les constructions de groupes et d'espaces homogènes auxiliaires, dont nous avons besoin pour notre démonstration du théorème 0.4. L'objectif est d'associer à un espace homogène X d'un k-groupe algébrique G vérifiant les hypothèses du théorème 0.4, des espaces homogènes Y, Z et W de certains k-groupes (G_Y, G_Z et G_W respectivement), avec des morphismes de paires

$$(G,X) \leftarrow (G_Y,Y) \to (G_Z,Z) \to (G_W,W),$$

qui vont permettre (dans les sections suivantes) de démontrer le théorème 0.4 successivement pour W, Z, Y et enfin pour X. On utilise pour cela des constructions de [B96], [BCTS08] et [BS12].

1.1. *Construction de l'espace homogène Y.* Soit X un espace homogène d'un k-groupe algébrique linéaire connexe lisse G défini sur un corps algébriquement clos k de caractéristique quelconque. On suppose que $\mathrm{Pic}(G) = 0$.

On choisit un k-point $x \in X(k)$. On note H le stabilisateur de x dans G. Pour l'étude du groupe fondamental de X, on peut supposer sans perte de généralité que H est lisse (voir [BS13], début de la section 3). On ne suppose pas en revanche que H est connexe.

On dispose d'un homomorphisme canonique $H^{\mathrm{mult}} \to G^{\mathrm{tor}}$, qui n'est généralement pas injectif.

Choisissons un plongement $j\colon H^{\mathrm{mult}} \hookrightarrow Q$ de H^{mult} dans un k-tore Q. On considère le plongement

$$j_*\colon H \to G \times_k Q, \qquad h \mapsto (h, j(m(h))),$$

où $m\colon H \to H^{\mathrm{mult}}$ est l'épimorphisme canonique. On pose

$$G_Y = G \times_k Q, \quad H_Y = j_*(H) \subset G_Y, \quad Y = G_Y/H_Y, \quad y = 1 \cdot H_Y \in Y(k).$$

La projection $\pi\colon G_Y = G \times Q \to G$ satisfait $\pi(H_Y) = H$, et elle induit une application $\pi_*\colon Y \to X$ telle que $\pi_*(y) = x$. On voit aisément que Y est un torseur sur X sous le tore Q. On obtient un morphisme de paires

$$(G_Y,Y) \to (G,X).$$

On remarque que l'homomorphisme $H_Y^{\mathrm{mult}} \to G_Y^{\mathrm{tor}}$ est injectif, donc

$$H_Y \cap G_Y^{\mathrm{ssu}} = H_Y^{\mathrm{kercar}} \cong H^{\mathrm{kercar}}.$$

1.2. *Construction de l'espace homogène Z.* On pose $G_Z = G_Y^{\mathrm{tor}} = G_Y/G_Y^{\mathrm{ssu}}$, où $G_Y^{\mathrm{ssu}} := \ker(G_Y \to G_Y^{\mathrm{tor}})$. On a un homomorphisme canonique $\mu\colon G_Y \to G_Z$. Alors G_Z est un k-tore et on a $\widehat{G_Z} = \widehat{G_Y}$.

L'inclusion $i\colon H \hookrightarrow G$ induit un homomorphisme $i^{\mathrm{mult}}\colon H^{\mathrm{mult}} \to G^{\mathrm{mult}} = G^{\mathrm{tor}}$. On obtient un plongement

$$\iota\colon H^{\mathrm{mult}} \hookrightarrow G^{\mathrm{tor}} \times_k Q, \quad h \mapsto (i^{\mathrm{mult}}(h), j(h)).$$

On pose

$$Z = Y/G_Y^{\mathrm{ssu}} = (G^{\mathrm{tor}} \times_k Q)/\iota(H^{\mathrm{mult}}),$$

alors on a une application $\mu_*\colon Y \to Z$, dont la fibre au-dessus du k-point $z := \mu_*(y) \in Z(k)$ est isomorphe à
$$G_Y^{\mathrm{ssu}}/(H_Y \cap G_Y^{\mathrm{ssu}}) \cong G^{\mathrm{ssu}}/H^{\mathrm{kercar}}.$$
La variété Z est un espace homogène du tore G_Z de stabilisateur $H_Z = H_Y^{\mathrm{mult}} \subset G_Y^{\mathrm{tor}} = G_Z$. On remarque que
$$\widehat{H_Z} = \widehat{H_Y^{\mathrm{mult}}} = \widehat{H_Y}.$$
Enfin, on a un morphisme de paires
$$(G_Y, Y) \to (G_Z, Z).$$

1.3. *Construction de l'espace homogène W.* On pose $G_W = G_Z/H_Z$, $W = Z$, $w = z$, alors W est un espace principal homogène du tore G_W. On a un morphisme naturel de paires
$$(G_Z, Z) \to (G_W, W).$$

2. Cas d'un stabilisateur connexe

Dans cette section, on s'intéresse à un cas particulier du théorème 0.4 (voir le théorème 2.4 ci-dessous), qui admet une preuve plus simple que ce dernier, via une suite exacte de fibration naturelle.

On commence par définir quelques notations.

2.1. Soit $K^\bullet$ un complexe borné dans une catégorie abélienne $\mathscr{A}$, et soit B un objet de $\mathscr{A}$. On définit
$$\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{A}}(K^\bullet, B) := \mathrm{Hom}_{D^b(\mathscr{A})}(K^\bullet, B[i]),$$
où $D^b(\mathscr{A})$ est la catégorie derivée des complexes bornés dans $\mathscr{A}$, et $B[i]$ est le complexe constitué d'un objet B en degré $-i$. Si A est un objet de $\mathscr{A}$, on a
$$\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{A}}(A[0], B) = \mathrm{Hom}_{D^b(\mathscr{A})}(A[0], B[i]) =: \mathrm{Ext}^i_{\mathscr{A}}(A, B),$$
voir [GM96, Def. III.5.3]. Par définition $\mathrm{Ext}^0_{\mathscr{A}}(A,B) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A,B)$.

En outre, si $f : A \to B$ est un morphisme dans $\mathscr{A}$, on note $[A \xrightarrow{f} B\rangle$ le complexe défini par f, avec A en degré 0, et on note $\langle A \xrightarrow{f} B] := [A \xrightarrow{f} B\rangle[1]$ (avec A en degré -1).

On considère la catégorie des $\mathbb{Z}$-modules (groupes abéliens), et on écrit $\mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}}$ pour Ext dans cette catégorie. Soit A un groupe abélien. On écrit A_{tors} pour le sous-groupe de torsion de A, et on pose $A_{\mathrm{s.t.}} := A/A_{\mathrm{tors}}$, alors $A_{\mathrm{s.t.}}$ est sans torsion. Il est clair que $\mathrm{Ext}^0_{\mathbb{Z}}(A,\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(A,\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(A_{\mathrm{s.t.}},\mathbb{Z})$.

Lemme 2.2 (bien connu)**.** *Soit A un groupe abélien de type fini, alors* $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A,\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(A_{\mathrm{tors}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

Démonstration. En utilisant la résolution injective de $\mathbb{Z}$
$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0,$$
on obtient que
$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A,\mathbb{Z}) \cong \mathrm{coker}\left(\mathrm{Hom}(A,\mathbb{Q}) \to \mathrm{Hom}(A,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\right).$$
Or on a les isomorphismes suivants :
$$\begin{aligned}\mathrm{coker}\left(\mathrm{Hom}(A,\mathbb{Q}) \to \mathrm{Hom}(A,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\right) &= \mathrm{coker}\left(\mathrm{Hom}(A_{\mathrm{s.t.}},\mathbb{Q}) \to \mathrm{Hom}(A,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\right)\\ &= \mathrm{Hom}(A,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})/\mathrm{Hom}(A_{\mathrm{s.t.}},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(A_{\mathrm{tors}},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}),\end{aligned}$$
où l'avant dernier isomorphisme utilise que $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A_{\mathrm{s.t.}},\mathbb{Z}) = 0$, ce qui est une conséquence du fait que A est de type fini. Cela conclut la preuve. □

On poursuit cette section par le lemme crucial suivant :

Lemme 2.3. *Soient G, G' deux k-groupes algébriques connexes et $f : (G,X,x) \to (G',X',x')$ un morphisme d'espaces homogènes à stabilisateurs respectifs $H := \mathrm{Stab}_G(x)$ et $H' := \mathrm{Stab}_{G'}(x')$, de sorte que le morphisme $G \to G'$ soit surjectif. On note $G_0 := \ker(G \to G')$ et $X_0 := f^{-1}(x')$. On suppose que H', H et G_0 sont connexes. Alors on a une suite exacte de groupes :*

$$\pi_1^{\text{ét}}(X_0,x)^{(p')} \to \pi_1^{\text{ét}}(X,x)^{(p')} \xrightarrow{f_*} \pi_1^{\text{ét}}(X',x')^{(p')} \to 1\,.$$

Démonstration. On définit les k-groupes linéaires $G_1 := G \times_{G'} H' = f^{-1}(H')$. Alors on a une suite exacte canonique

$$1 \to G_0 \to G_1 \to H' \to 1\,,$$

donc en particulier le groupe G_1 est connexe. Vérifions maintenant que X_0 est naturellement un espace homogène de G_1, de stabilisateur H : en restreignant l'action de G_1 sur X à la sous-variété X_0, on obtient un morphisme $m : G_1 \times X_0 \to X$. Vérifions que X_0 est stable par cette action de G_1, c'est-à-dire que le morphisme m se factorise en un morphisme $G_1 \times X_0 \to X_0$. L'image de G_1 par le morphisme $G \to G'$ est le sous-groupe H' de G', et l'image de X_0 par le morphisme f est le point x', dont le stabilisateur dans G' est exactement H'. Par conséquent, on voit que le morphisme composé $G_1 \times X_0 \xrightarrow{m} X \xrightarrow{f} X'$ est le morphisme constant égal à x' (i.e. il se factorise par $x' : \mathrm{Spec}(k) \to X'$), ce qui assure que le morphisme m se factorise par l'inclusion $X_0 = f^{-1}(x') \to X$, et donc m définit bien une action de G_1 sur X_0. Il est alors clair que cette action est transitive et que le stabilisateur de x pour cette action est exactement le sous-groupe H de G_1.

Montrons la surjectivité de f_*. En utilisant [SGA1], exposé IX, corollaire 5.6, il suffit de vérifier que f est un morphisme universellement submersif à fibres géométriquement connexes, ce qui résulte du fait que f est fidèlement plat et quasi-compact (voir [SGA3], exposé $\mathrm{VI_B}$, proposition 9.2.(xiii).a) : les deux morphismes $G \to G'$ et $G' \to X'$ sont fidèlement plats et de présentation finie), ainsi que du fait que G_1 est connexe.

Montrons maintenant l'exactitude de la suite en $\pi_1^{\text{ét}}(X)^{(p')}$. Pour cela, on utilise le théorème 1.2 de [BS13]. En effet, suivant [S09], corollaire 5.5.9, il suffit de montrer que pour tout revêtement étale galoisien $Y \to X$, de degré premier à p, tel que $Y \times_X X_0$ ait une section sur X_0, il existe un revêtement étale fini connexe $Y' \to X'$, de degré premier à p, tel qu'une composante connexe de $Y' \times_{X'} X$ soit munie d'un X-morphisme surjectif vers Y. Soit donc un revêtement étale galoisien $Y \to X$ (de degré premier à p) tel que $Y_0 := Y \times_X X_0$ admette une section $s_0 : X_0 \to Y_0$.

Comme H est connexe, le théorème 1.2 de [BS13] assure qu'il existe un groupe linéaire connexe $\widetilde{G}$, une isogénie centrale $\widetilde{G} \to G$ et un relevé $\widetilde{H}$ de H dans $\widetilde{G}$ tel que $Y = \widetilde{G}/\widetilde{H}$. On a donc un diagramme commutatif exact de la forme :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mu \arrow[r] & \widetilde{G} \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
 & & Y = \widetilde{G}/\widetilde{H} \arrow[r] & X = G/H\,, &
\end{tikzcd}$$

où μ est un k-groupe fini de type multiplicatif, central dans $\widetilde{G}$.

En outre, quitte à modifier la section s_0, on peut supposer que $y := s_0(x) \in Y_0(k)$ soit l'image de $1 \in \widetilde{G}(k)$ par le morphisme quotient $\widetilde{G} \to Y$.

On définit alors le k-groupe $\widetilde{G_1} := \widetilde{G} \times_G G_1$.

En considérant le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
& \widetilde{G} \arrow[rr] \arrow[dd] & & G \arrow[dd] \\
\widetilde{G_1} \arrow[ur] \arrow[rr] & & G_1 \arrow[ur] \arrow[dd] & \\
& Y \arrow[rr] & & X \\
Y_0 \arrow[ur] \arrow[rr] & & X_0 \arrow[ur] &
\end{tikzcd},$$

on obtient l'existence d'une flèche verticale $\widetilde{G_1} \to Y_0$ qui fait commuter le cube, et telle que le carré

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{G_1} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & G_1 \arrow[d] \\
Y_0 \arrow[r] & X_0
\end{tikzcd}$$

soit cartésien.

On en déduit que l'action de $\widetilde{G}$ sur Y induit une action de $\widetilde{G}_1$ sur Y_0 qui fait de Y_0 un espace homogène de $\widetilde{G}_1$, de sorte que le morphisme $(\widetilde{G_1}, Y_0) \to (G_1, X_0)$ est un morphisme d'espaces homogènes.

La section $s_0 : X_0 \to Y_0$ induit alors une section $s_1 : G_1 \to \widetilde{G_1}$ du morphisme π (comme morphisme de k-variétés) apparaissant dans le carré précédent. Par construction, puisque $s_0(x) = y$, on a $s_1(1) = 1$. Comme G_1 est connexe, le lemme de Rosenlicht assure que s_1 est un homomorphisme de groupes algébriques : pour la commodité de la lecture, on reproduit ici la preuve de ce fait donné dans la proposition 3.2 de [CT08]. Le morphisme de k-variétés $\theta : G_1 \times G_1 \to \widetilde{G}_1$ défini par $\theta(x,y) := s_1(xy)s_1(y)^{-1}s_1(x)^{-1}$ se factorise par le k-groupe de type multiplicatif μ, donc le lemme de Rosenlicht [CT08, 0.2] assure qu'il existe des morphismes de groupes algébriques $\alpha, \beta : G_1 \to \mu$ tels que $\theta(x,y) = \alpha(x)\beta(y)$. La condition $\theta(.,1) = \theta(1,.) = 1$ assure alors que $\alpha = \beta = 1$, donc $\theta = 1$, donc s_1 est un morphisme de groupes algébriques.

Remarquons également que l'on dispose d'un diagramme commutatif de suites exactes courtes centrales (où la suite exacte supérieure est obtenue en tirant en arrière la suite exacte inférieure par le morphisme injectif $G_1 \to G$) :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mu \arrow[r] \arrow[d, "="] & \widetilde{G_1} \arrow[r, "\pi"'] \arrow[d] & G_1 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[l, bend right, "s_1"'] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mu \arrow[r] & \widetilde{G} \arrow[r] & G \arrow[r] & 1 .
\end{tikzcd}$$

La section s_1 permet d'identifier $\widetilde{G_1}$ avec le produit direct $G_1 \times \mu$, et donc G_1 avec la composante neutre de $\widetilde{G}_1$. En particulier, via s_1, G_1 est un sous-groupe distingué de $\widetilde{G}$. Avec ces identifications, $\widetilde{H}$ est un sous-groupe de G_1 dans le groupe $\widetilde{G}$.

On définit alors $Y' := \widetilde{G}/G_1$.

Si on note maintenant q l'isogénie initiale $q : \widetilde{G} \to G$, on a un diagramme commutatif de suites exactes courtes

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \widetilde{H} \arrow[r] \arrow[d] & q^{-1}(H) \arrow[r] \arrow[d] & \mu \arrow[r] \arrow[d, "="] & 1 \\
1 \arrow[r] & G_1 \arrow[r] & \widetilde{G_1} \arrow[r] & \mu \arrow[r] & 1 ,
\end{tikzcd}$$

qui assure que le carré suivant

$$\begin{tikzcd}
Y = \widetilde{G}/\widetilde{H} \arrow[r] \arrow[d] & X = \widetilde{G}/q^{-1}(H) \arrow[d] \\
Y' = \widetilde{G}/G_1 \arrow[r] & X' = \widetilde{G}/\widetilde{G_1}
\end{tikzcd}$$

est cartésien, et que les deux morphismes horizontaux sont des torseurs connexes sous le groupe fini de type multiplicatif μ.

En particulier, le morphisme $Y' \to X'$ est un revêtement étale fini connexe, tel que $Y' \times_{X'} X \cong Y$ au-dessus de X. Cela conclut la preuve de l'exactitude de la suite du lemme. □

On déduit du lemme précédent le cas particulier suivant du théorème 0.4 :

Théorème 2.4. *Soit k un corps algébriquement clos d'exposant caractéristique $p \geq 1$. Soit G/k un groupe linéaire connexe lisse et X/k un espace homogène de G. Soit $x \in X(k)$, on pose $H := \mathrm{Stab}_G(x)$. On suppose que $\mathrm{Pic}(G) = 0$ et que H est lisse et connexe. Alors il existe un isomorphisme canonique de groupes abéliens :*

$$\operatorname{coker}\left(H_*^{\mathrm{tor}} \xrightarrow{i_*} G_*^{\mathrm{tor}}\right) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p')} \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\text{ét}}(X,x)^{(p')}(-1).$$

Démontrons le théoreme 2.4 : on va traiter d'abord le cas des tores (partie 2.5), puis des groupes linéaires connexes (voir 2.7), et enfin celui des espaces homogènes (cf 2.12).

2.5. *Cas des tores*

Lemme 2.6 (bien connu)**.** *Soit T un tore défini sur k. Alors il y a un isomorphisme canonique et fonctoriel $T_* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p')} \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\text{ét}}(T)^{(p')}(-1)$.*

Démonstration. Soit $Y \to T$ un revêtement étale galoisien de degré n premier à p. Par [M72] ou [BS13, Prop. 1.1(a)], le revêtement $Y \to T$ a une structure d'isogénie centrale $T' \to T$. Il en résulte que $Y \to T$ est dominé par l'isogénie $\varphi_n \colon T \to T,\ t \mapsto t^n$. On pose $T_n = \ker \varphi_n$ (considéré comme un groupe abstrait), alors $T_n = \mu_n \otimes_{\mathbb{Z}} T_*$. On a :

$$\begin{aligned}
\pi_1^{\text{ét}}(T)^{(p')}(-1) &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathbb{Z}_{(p')}(1), \pi_1^{\text{ét}}(T)^{(p')}) = \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathbb{Z}_{(p')}(1), T_n) \\
&= \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mu_n, \mu_n \otimes_{\mathbb{Z}} T_*) = \varprojlim \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} T_* = \mathbb{Z}_{(p')} \otimes_{\mathbb{Z}} T_*.
\end{aligned}$$

□

2.7. *Cas des groupes linéaires connexes*

On rappelle qu'un k-groupe semi-simple est dit simplement connexe si toute isogénie centrale $G' \to G$, avec G' réductif, est un isomorphisme.

Lemme 2.8 (bien connu)**.** *Soit G :*

(a) un groupe unipotent connexe sur k, ou

(b) un groupe semi-simple simplement connexe sur k.

Alors $\pi_1^{\text{ét}}(G)^{(p')} = 1$.

Démonstration. Par [M72] ou [BS13, Prop. 1.1(a)], tout revêtement étale galoisien $Y \to G$ de degré n premier à p admet une structure d'une isogénie centrale $G' \to G$, mais G comme dans (a) ou (b) n'admet pas d'isogénie centrale non triviale de degré premier à p. □

On considère maintenant le cas d'un groupe linéaire connexe lisse quelconque G. Soit T_G un tore maximal de G^{red} et $T_{G^{\mathrm{sc}}}$ un tore maximal de G^{sc} dont l'image dans G^{red} est contenue dans T_G. On définit alors (voir [B98])

$$\pi_1^{\mathrm{alg}}(G) := \operatorname{coker}(T_{G^{\mathrm{sc}}*} \to T_{G*}) = T_{G*}/\mathrm{Im}(T_{G^{\mathrm{sc}}*}) .$$

Remarque 2.9. Dans le cas particulier où $\mathrm{Pic}(G) = 0$ (ce qui équivaut au fait que G^{ss} soit simplement connexe), la formule précédente se simplifie en $\pi_1^{\mathrm{alg}}(G) = G^{\mathrm{tor}}{}_*$.

Proposition 2.10. *Soit G un k-groupe linéaire connexe lisse. Alors on a un isomorphisme canonique*

$$\pi_1^{\mathrm{alg}}(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p')} \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\text{ét}}(G)^{(p')}(-1) .$$

Démonstration. Tout d'abord, on se ramène au cas où G est réductif : en effet, le morphisme $G \to G^{\mathrm{red}}$ satisfait les hypothèses du lemme 2.3, donc on en déduit une suite exacte

$$\pi_1^{\text{ét}}(G^{\mathrm{u}})^{(p')} \to \pi_1^{\text{ét}}(G)^{(p')} \to \pi_1^{\text{ét}}(G^{\mathrm{red}})^{(p')} \to 0 .$$

Or $\pi_1^{\text{ét}}(G^{\mathrm{u}})^{(p')} = 0$ d'après le lemme 2.8(a), donc on a un isomorphisme $\pi_1^{\text{ét}}(G)^{(p')} \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\text{ét}}(G^{\mathrm{red}})^{(p')}$ et on peut donc supposer G réductif.

Dans ce cas, en utilisant par exemple [CT08, 3.1], il existe une résolution de G, notée

$$1 \to S \to G' \to G \to 1 , \tag{2.1}$$

où S est un k-tore central et G' est un k-groupe réductif tel que G'^{ss} est simplement connexe.

Montrons la proposition pour G'. On dispose d'une suite exacte courte

$$1 \to G'^{\mathrm{ss}} \to G' \to G'^{\mathrm{tor}} \to 1 ,$$

où G'^{ss} est semi-simple simplement connexe. On considère le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[r] & \operatorname{coker}(T_{G'^{\mathrm{ss}}*} \to T_{G'*}) \otimes \mathbb{Z}_{(p')} \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\cong"] & G'^{\mathrm{tor}}_* \otimes \mathbb{Z}_{(p')} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\ \pi_1^{\text{ét}}(G'^{\mathrm{ss}})^{(p')}(-1) \arrow[rr] & & \pi_1^{\text{ét}}(G')^{(p')}(-1) \arrow[r] & \pi_1^{\text{ét}}(G'^{\mathrm{tor}})^{(p')}(-1) \arrow[r] & 0 . \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

Par le lemme 2.3, la deuxième ligne du diagramme est exacte, et on a $\pi_1^{\text{ét}}(G'^{\mathrm{ss}})^{(p')}(-1) = 0$ d'après le lemme 2.8(b), car G'^{ss} est simplement connexe. De la suite exacte courte

$$1 \to T_{G'^{\mathrm{ss}}} \to T_{G'} \to G'^{\mathrm{tor}} \to 1$$

on obtient une suite exacte courte

$$0 \to T_{G'^{\mathrm{ss}}*} \to T_{G'*} \to G'^{\mathrm{tor}}_* \to 0,$$

d'où des isomorphismes

$$\operatorname{coker}(T_{G'^{\mathrm{ss}}*} \to T_{G'*}) \xrightarrow{\sim} G'^{\mathrm{tor}}_* \quad \text{et} \quad \operatorname{coker}(T_{G'^{\mathrm{ss}}*} \to T_{G'*}) \otimes \mathbb{Z}_{(p')} \xrightarrow{\sim} G'^{\mathrm{tor}}_* \otimes \mathbb{Z}_{(p')}$$

et l'exactitude de la première ligne du diagramme (2.2). Ce diagramme induit un isomorphisme canonique en pointillés, ce qui démontre la proposition pour G'.

Déduisons-en le résultat pour G. On applique le lemme 2.3 à la suite exacte courte (2.1), et on obtient le diagramme commutatif suivant, dont la seconde ligne est exacte :

$$\begin{tikzcd} S_* \otimes \mathbb{Z}_{(p')} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \pi_1^{\mathrm{alg}}(G') \otimes \mathbb{Z}_{(p')} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \pi_1^{\mathrm{alg}}(G) \otimes \mathbb{Z}_{(p')} \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 0 \\ \pi_1^{\text{ét}}(S,1)^{(p')}(-1) \arrow[r] & \pi_1^{\text{ét}}(G',1)^{(p')}(-1) \arrow[r] & \pi_1^{\text{ét}}(G,1)^{(p')}(-1) \arrow[r] & 0 . \end{tikzcd}$$

De la suite exacte (2.1) on obtient une suite exacte courte (voir [BGA14], théorème 3.8 ou lemme 3.13) :

$$0 \to S_* \to \pi_1^{\mathrm{alg}}(G') \to \pi_1^{\mathrm{alg}}(G) \to 0,$$

d'où, en vertu de l'exactitude à droite du produit tensoriel, l'exactitude de la première ligne du diagramme. Ce diagramme assure finalement l'existence de l'isomorphisme canonique en pointillés et conclut la preuve de la proposition 2.10. $\square$

Corollaire 2.11 (cf. [M72, Lemme 3 et bas de la page 152], voir aussi [BS13, Prop. 1.1(b)])**.** *Le groupe* $\pi_1^{\text{ét}}(G)^{(p')}(-1)$ *est un quotient de* $T_{G*} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p')}$*, où* T_G *est un tore maximal de* G*.*

2.12. *Démonstration du théorème 2.4.* On remarque que l'on a toujours un morphisme canonique $\operatorname{coker}\left(\pi_1^{\text{alg}}(H) \to \pi_1^{\text{alg}}(G)\right) \to \operatorname{coker}(H_*^{\text{tor}} \to G_*^{\text{tor}})$. On applique alors le lemme 2.3 au morphisme $(G,G) \to (G,X)$, et on obtient le diagramme commutatif suivant dont la seconde ligne est exacte :

$$\begin{tikzcd}
\pi_1^{\text{alg}}(H) \otimes \mathbb{Z}_{(p')} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \pi_1^{\text{alg}}(G) \otimes \mathbb{Z}_{(p')} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \operatorname{coker}(H_*^{\text{tor}} \to G_*^{\text{tor}}) \otimes \mathbb{Z}_{(p')} \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 0 \\
\pi_1^{\text{ét}}(H,1)^{(p')}(-1) \arrow[r] & \pi_1^{\text{ét}}(G,1)^{(p')}(-1) \arrow[r] & \pi_1^{\text{ét}}(X,x)^{(p')}(-1) \arrow[r] & 0\,.
\end{tikzcd} \tag{2.3}$$

De la suite exacte courte

$$1 \to H^{\text{ss}} \to H^{\text{red}} \to H^{\text{tor}} \to 1$$

on déduit une suite exacte courte

$$0 \to \pi_1^{\text{alg}}(H^{\text{ss}}) \to \pi_1^{\text{alg}}(H) \to H_*^{\text{tor}} \to 0,$$

voir [BKG04, Lemme 3.7] et [CT08, Prop. 6.8] (dans [BKG04] et [CT08], il est supposé que le corps k est de caractéristique nulle, mais la suite est exacte pour k de caractéristique quelconque, voir [GA13, Thm. 3.14] et [BGA14, Thm. 3.8]).

En particulier, le morphisme naturel $\pi_1^{\text{alg}}(H) \to H_*^{\text{tor}}$ est surjectif. D'autre part, comme G^{ss} est simplement connexe, on a $\pi_1^{\text{alg}}(G) = G_*^{\text{tor}}$ (voir remarque 2.9).

On obtient donc que

$$\operatorname{coker}\left(\pi_1^{\text{alg}}(H) \to \pi_1^{\text{alg}}(G)\right) = \operatorname{coker}\left(H_*^{\text{tor}} \to G_*^{\text{tor}}\right) \tag{2.4}$$

et que

$$\operatorname{coker}\left(\pi_1^{\text{alg}}(H) \otimes \mathbb{Z}_{(p')} \to \pi_1^{\text{alg}}(G) \otimes \mathbb{Z}_{(p')}\right) = \operatorname{coker}\left(H_*^{\text{tor}} \to G_*^{\text{tor}}\right) \otimes \mathbb{Z}_{(p')}\,,$$

donc la première ligne du diagramme (2.3) est exacte. Finalement, ce diagramme permet bien de définir l'isomorphisme souhaité (en pointillés)

$$\operatorname{coker}\left(H_*^{\text{tor}} \to G_*^{\text{tor}}\right) \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\text{ét}}(X,x)^{(p')}(-1)\,.$$

$\square$

3. Cas d'un stabilisateur non nécessairement connexe

Dans cette section, on généralise le théorème de la section précédente et on démontre le résultat principal de l'article, à savoir le théorème qui suit (voir le théorème 0.4 de l'introduction) :

Théorème 3.1. *Soit* k *un corps algébriquement clos d'exposant caractéristique* $p \geq 1$*. Soit* G/k *un groupe linéaire connexe lisse et* X/k *un espace homogène de* G*. Soit* $x \in X(k)$*, on pose* $H := \operatorname{Stab}_G(x)$*. On suppose que* $\operatorname{Pic}(G) = 0$*,* H *est lisse et* H^{kercar} *est connexe. Alors il existe un isomorphisme canonique de groupes abéliens :*

$$\operatorname{Ext}^0_{\mathbb{Z}}(\widehat{G} \to \widehat{H}, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p')} \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\text{ét}}(X,x)^{(p')}(-1)\,.$$

Pour prouver le théorème 3.1, on commence par étendre le théorème 1.2(a) de [BS13] en supprimant l'hypothèse de connexité sur le stabilisateur :

Proposition 3.2. *Soit G un k-groupe connexe lisse, X un k-espace homogène de G, $x \in X(k)$. Soit $\widetilde{X} \to X$ un revêtement étale galoisien de degré premier à p. Alors il existe une isogénie centrale $\pi : \widetilde{G} \to G$ et un sous-groupe d'indice fini $\widetilde{H}$ de $\pi^{-1}(H)$ tel que le morphisme naturel $\widetilde{G}/\widetilde{H} \to X$ se factorise en un isomorphisme $\widetilde{G}/\widetilde{H} \xrightarrow{\sim} \widetilde{X}$.*

Remarque 3.3. On peut montrer plus précisément que le morphisme π identifie $\widetilde{H}$ à un sous-groupe d'indice fini de H.

Démonstration. On fixe un point $\widetilde{x} \in \widetilde{X}(k)$ au-dessus de x. On considère le morphisme quotient $\varphi : G \to X$ défini par l'action de G sur le point x, et on considère le diagramme cartésien suivant :

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\widetilde{\varphi}"] \arrow[d, "\pi"] & \widetilde{X} \arrow[d] \\ G \arrow[r, "\varphi"] & X, \end{tikzcd}$$

où $Y = G \times_X \widetilde{X}$. On note F la fibre de Y au-dessus de $1 \in G(k)$, et on note $\Gamma = \mathrm{Aut}(Y/G)$, alors Γ agit transitivement sur F. La variété Y n'est pas connexe en général. On note $\widetilde{G}$ la composante connexe de Y contenant le point marqué $y = (1, \widetilde{x})$. Alors la restriction $\pi_{\widetilde{G}}$ de π à $\widetilde{G}$ est un revêtement étale de G.

Prouvons que $\pi_{\widetilde{G}} : \widetilde{G} \to G$ est un revêtement galoisien. On définit $F_{\widetilde{G}} = F \cap \widetilde{G}$ et

$$\Gamma_{\widetilde{G}} = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(y) \in F_{\widetilde{G}}\} .$$

Alors $\Gamma_{\widetilde{G}} = \mathrm{Stab}_\Gamma(\widetilde{G})$, donc $\Gamma_{\widetilde{G}}$ est un sous-groupe de Γ, $\Gamma_{\widetilde{G}}$ agit sur $\widetilde{G}$ au-dessus G, et $\Gamma_{\widetilde{G}}$ agit transitivement sur $F_{\widetilde{G}}$. On voit que $\mathrm{Aut}(\widetilde{G}/G)$ agit transitivement sur $F_{\widetilde{G}}$, donc $\widetilde{G} \to G$ est un revêtement galoisien.

Alors la proposition 1.1(a) de [BS13] assure que la variété $\widetilde{G}$ a une structure de groupe algébrique sur k, telle que $\pi_{\widetilde{G}} : \widetilde{G} \to G$ soit une isogénie centrale de k-groupes. On peut supposer que $1_{\widetilde{G}} = y := (1_G, \widetilde{x})$. Or on dispose du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \widetilde{G} \arrow[r, "\widetilde{\varphi}_{\widetilde{G}}"] \arrow[d, "\pi_{\widetilde{G}}"] & \widetilde{X} \arrow[d] \\ G \arrow[r, "\varphi"] & X. \end{tikzcd}$$

On définit $\widetilde{H} := \widetilde{\varphi}_{\widetilde{G}}^{-1}(\widetilde{x})$.

Montrons que $\widetilde{H}$ est un sous-groupe algébrique de $\widetilde{G}$. On fixe $h \in \widetilde{H}(k)$. Pour $g = 1_{\widetilde{G}} \in \widetilde{G}(k)$ on a

$$\widetilde{\varphi}_{\widetilde{G}}(gh) = \widetilde{\varphi}_{\widetilde{G}}(h) = \widetilde{x} = \widetilde{\varphi}_{\widetilde{G}}(g).$$

Comme $\widetilde{G}$ est connexe, le corollaire 5.3.3 de [S09] assure que $\widetilde{\varphi}_{\widetilde{G}}(gh) = \widetilde{\varphi}_{\widetilde{G}}(g)$ pour tout $g \in G(k)$. On voit que si $h \in \widetilde{H}(k)$, le morphisme $\widetilde{\varphi}_{\widetilde{G}}$ est h-invariant à droite. Inversement, si le morphisme $\widetilde{\varphi}_{\widetilde{G}}$ est h-invariant à droite, alors $\widetilde{\varphi}_{\widetilde{G}}(h) = \widetilde{x}$ et donc $h \in \widetilde{H}(k)$. Ainsi $\widetilde{H} \subset \widetilde{G}$ est le stabilisateur de $\widetilde{\varphi}_{\widetilde{G}}$ et c'est donc un sous-groupe algebrique.

Comme le morphisme $\widetilde{\varphi}_{\widetilde{G}}$ est $\widetilde{H}$-invariant, il induit un morphisme naturel $\overline{\varphi}_{\widetilde{G}} : \widetilde{G}/\widetilde{H} \to \widetilde{X}$ qui est un revêtement étale fini connexe. La définition de $\widetilde{H}$ assure que la fibre de $\overline{\varphi}_{\widetilde{G}}$ au-dessus de $\widetilde{x}$ consiste en un seul point, donc $\overline{\varphi}_{\widetilde{G}}$ est un isomorphisme de variétés. □

On montre ensuite la variante suivante du lemme 2.3 :

Lemme 3.4. *Soient G, G' deux k-groupes algébriques connexes et $f : (G, X, x) \to (G', X', x')$ un morphisme d'espaces homogènes à stabilisateurs respectifs $H := \mathrm{Stab}_G(x)$ et $H' := \mathrm{Stab}_{G'}(x')$, de sorte que les morphismes $G \to G'$ et $H \to H'$ soient surjectifs. On* *note* $G_0 := \ker(G \to G')$ *et* $X_0 := f^{-1}(x')$. *On suppose* G_0 *connexe. Alors on a une suite exacte de groupes :*

$$\pi_1^{\text{ét}}(X_0,x)^{(p')} \to \pi_1^{\text{ét}}(X,x)^{(p')} \xrightarrow{f_*} \pi_1^{\text{ét}}(X',x')^{(p')} \to 1 .$$

Démonstration. On vérifie que X_0 est naturellement un espace homogène de G_0, de stabilisateur $H_0 := \ker(H \to H')$.

Montrons d'abord la surjectivité de f_*. En utilisant [SGA1], exposé IX, corollaire 5.6, il suffit de vérifier que f est un morphisme universellement submersif à fibres géométriquement connexes, ce qui résulte du fait que f est fidèlement plat et quasi-compact, ainsi que du fait que G_0 est connexe.

Montrons maintenant l'exactitude de la suite en $\pi_1^{\text{ét}}(X)^{(p')}$. Pour cela, on utilise la proposition 3.2 et des arguments similaires à ceux de la preuve du lemme 2.3. Soit un revêtement étale galoisien $Y \to X$ (de degré premier à p) tel que $Y_0 := Y \times_X X_0$ admette une section $s_0 : X_0 \to Y_0$. La proposition 3.2 assure qu'il existe un groupe linéaire connexe $\widetilde{G}$, une isogénie centrale $\pi : \widetilde{G} \to G$ et un sous-groupe $\widetilde{H}$ de $\widetilde{G}$ d'indice fini dans $\pi^{-1}(H)$ tel que le morphisme naturel $\widetilde{G}/\widetilde{H} \to X$ se factorise en un isomorphisme $\widetilde{G}/\widetilde{H} \to Y$. On définit le k-groupe $\widetilde{G_0} := \widetilde{G} \times_G G_0$. Puisque G_0 est connexe, la section $s_0 : X_0 \to Y_0$ induit une section $\widetilde{s_0} : G_0 \to \widetilde{G_0}$, dont on vérifie que c'est un morphisme de groupes. Cela permet d'identifier G_0 avec la composante neutre de $\widetilde{G_0}$, et donc de voir G_0 comme un sous-groupe distingué de $\widetilde{G}$. On note alors $\widetilde{G}' := \widetilde{G}/G_0$. Définissons Y' comme le quotient de $\widetilde{G}'$ par l'image $\widetilde{H}/\widetilde{H_0}$ de $\widetilde{H}$ dans $\widetilde{G}'$. Alors $Y' \to X'$ est un revêtement étale fini connexe, et par construction on a $Y' \times_{X'} X \cong \widetilde{G}/\widetilde{H}$ au-dessus de X, donc on a une factorisation $Y' \times_{X'} X \cong \widetilde{G}/\widetilde{H} \xrightarrow{\sim} Y \to X$. Cela conclut la preuve de l'exactitude de la suite du lemme. □

3.5. *Démonstration du théorème 3.1.* Si X est un espace homogène satisfaisant les hypothèses du théorème 3.1, on reprend les constructions auxiliaires de la section 1. On dispose des morphismes surjectifs de paires

$$(G,X) \leftarrow (G_Y,Y) \to (G_Z,Z) \to (G_W,W) .$$

On vérifie facilement que chacun des deux premiers morphismes de paires vérifie les hypothèses du lemme 3.4. Par conséquent, le lemme 3.4 assure que les suites naturelles suivantes

$$\pi_1^{\text{ét}}(G^{\text{ssu}}/H^{\text{kercar}},y)^{(p')} \to \pi_1^{\text{ét}}(Y,y)^{(p')} \to \pi_1^{\text{ét}}(Z,z)^{(p')} \to 1$$
$$\pi_1^{\text{ét}}(Q,1)^{(p')} \to \pi_1^{\text{ét}}(Y,y)^{(p')} \to \pi_1^{\text{ét}}(X,x)^{(p')} \to 1$$

sont exactes. Puisque le morphisme $G^{\text{ssu}} \to G^{\text{ssu}}/H^{\text{kercar}}$ est universellement submersif et à fibres géométriquement connexes, le corollaire 5.6 de [SGA1], exposé IX, assure que le morphisme $\pi_1^{\text{ét}}(G^{\text{ssu}},1)^{(p')} \to \pi_1^{\text{ét}}(G^{\text{ssu}}/H^{\text{kercar}},y)^{(p')}$ est surjectif. Or $\pi_1^{\text{ét}}(G^{\text{ssu}},1)^{(p')} = 0$ car G^{ssu} est extension d'un groupe semi-simple simplement connexe par un groupe unipotent (voir les lemmes 2.3 et 2.8). Donc finalement $\pi_1^{\text{ét}}(G^{\text{ssu}}/H^{\text{kercar}},y)^{(p')} = 0$, et on a un isomorphisme canonique

$$\pi_1^{\text{ét}}(Y,y)^{(p')} \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\text{ét}}(Z,z)^{(p')} . \tag{3.1}$$

On va maintenant démontrer le théorème pour (G_W,W), puis pour (G_Z,Z), puis pour (G_Y,Y), et enfin pour (G,X).

Comme W est un espace principal homogène du tore G_W, par le lemme 2.6 il y a un isomorphisme canonique $G_{W*} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p')} \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\text{ét}}(W,w)^{(p')}(-1)$. Puisque $G_{W*} = \mathrm{Hom}(\widehat{G_W},\mathbb{Z}) = \mathrm{Ext}^0_{\mathbb{Z}}(\widehat{G_W},\mathbb{Z})$, on obtient un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Ext}^0_{\mathbb{Z}}(\widehat{G_W},\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p')} \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\text{ét}}(W,w)^{(p')}(-1),$$

ce qui démontre le théorème pour (G_W,W).

Puisque le morphisme évident de complexes $\widehat{G_W} \to [\widehat{G_Z} \to \widehat{H_Z}\rangle$ est un quasi-isomorphisme, on a $\mathrm{Ext}^0_{\mathbb{Z}}(\widehat{G_W},\mathbb{Z}) = \mathrm{Ext}^0_{\mathbb{Z}}([\widehat{G_Z} \to \widehat{H_Z}\rangle,\mathbb{Z})$ et donc, puisque $W = Z$, on obtient un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Ext}^0_{\mathbb{Z}}([\widehat{G_Z} \to \widehat{H_Z}\rangle,\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_{(p')} \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\text{ét}}(Z,z)^{(p')}(-1)\,, \tag{3.2}$$

ce qui démontre le théorème pour (G_Z,Z).

On sait que $\widehat{G_Y} = \widehat{G_Z}$ et $\widehat{H_Y} = \widehat{H_Z}$, donc on déduit de (3.1) et (3.2) un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Ext}^0_{\mathbb{Z}}([\widehat{G_Y} \to \widehat{H_Y}\rangle,\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_{(p')} \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\text{ét}}(Y,y)^{(p')}(-1)\,,$$

ce qui démontre le théorème pour (G_Y,Y).

Déduisons-en maintenant le théorème pour (G,X). On remarque d'abord que l'on a une suite exacte de complexes

$$0 \to [\widehat{G} \to \widehat{H}\rangle \to [\widehat{G_Y} \to \widehat{H}\rangle \to [\widehat{Q} \to 0\rangle \to 0,$$

d'où on déduit une suite exacte

$$\mathrm{Ext}^0_{\mathbb{Z}}(\widehat{Q},\mathbb{Z}) \to \mathrm{Ext}^0_{\mathbb{Z}}(\widehat{G_Y} \to \widehat{H},\mathbb{Z}) \to \mathrm{Ext}^0_{\mathbb{Z}}(\widehat{G} \to \widehat{H},\mathbb{Z}) \to 0 \tag{3.3}$$

(car d'après le lemme 2.2, $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\widehat{Q},\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(\widehat{Q}_{\text{tors}},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$).

Considérons alors le diagramme suivant à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^0_{\mathbb{Z}}(\widehat{Q},\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_{(p')} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] \arrow[dr, phantom, "\boxed{1}"] & \mathrm{Ext}^0_{\mathbb{Z}}(\widehat{G_Y} \to \widehat{H_Y},\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_{(p')} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Ext}^0_{\mathbb{Z}}(\widehat{G} \to \widehat{H},\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_{(p')} \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 0 \\
\pi_1^{\text{ét}}(Q,1)^{(p')}(-1) \arrow[r, "\lambda_*"] & \pi_1^{\text{ét}}(Y,y)^{(p')}(-1) \arrow[r, "\varphi_*"] & \pi_1^{\text{ét}}(X,x)^{(p')}(-1) \arrow[r] & 0\,,
\end{tikzcd} \tag{3.4}$$

dont l'exactitude de la seconde ligne a été démontrée plus haut, et dont celle de la première provient de la suite exacte (3.3) et de l'exactitude à droite du produit tensoriel.

Montrons que le rectangle $\boxed{1}$ est commutatif : On considère le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^0_{\mathbb{Z}}(\widehat{Q},\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_{(p')} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] \arrow[dr, phantom, "\boxed{1}"] & \mathrm{Ext}^0_{\mathbb{Z}}(\widehat{G_Y} \to \widehat{H_Y},\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_{(p')} \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\cong"] \arrow[dr, phantom, "\boxed{2}"] & \mathrm{Ext}^0_{\mathbb{Z}}(\widehat{G_Z} \to \widehat{H_Z},\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_{(p')} \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\cong"] \arrow[dr, phantom, "\boxed{3}"] & \mathrm{Ext}^0_{\mathbb{Z}}(\widehat{G_W},\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_{(p')} \arrow[d, "\cong"] \\
\pi_1^{\text{ét}}(Q,1)^{(p')}(-1) \arrow[r, "\lambda_*"] & \pi_1^{\text{ét}}(Y,y)^{(p')}(-1) \arrow[r, "\cong"] & \pi_1^{\text{ét}}(Z,z)^{(p')}(-1) \arrow[r, "\cong"] & \pi_1^{\text{ét}}(W,w)^{(p')}(-1).
\end{tikzcd}$$

Par construction, les rectangles $\boxed{2}$ et $\boxed{3}$ commutent. On voit facilement que le grand rectangle $\boxed{1} \cup \boxed{2} \cup \boxed{3}$ commute (par exemple, en utilisant la fonctorialité du Lemme 2.6). Il en résulte que le rectangle $\boxed{1}$ commute.

Le diagramme (3.4) permet bien de définir la flèche en pointillés, dont on démontre maintenant qu'elle ne dépend pas du plongement $j : H^{\text{tor}} \to Q$: en § 1.1, le torseur $Y \to X$ a été construit à partir d'un plongement $j\colon H^{\text{mult}} \hookrightarrow Q$. Si on choisit un autre plongement $j'\colon H^{\text{mult}} \hookrightarrow Q'$, on obtient un autre torseur $Y' \to X$ sous Q'. On pose $Q'' = Q \times_k Q'$, et on note $j''\colon H^{\text{mult}} \hookrightarrow Q''$ le plongement diagonal. On obtient un torseur $Y'' \to X$ sous Q'' dominant à la fois Y et Y', et on en déduit facilement que le morphisme en pointillés ne dépend pas du choix du plongement $j\colon H^{\text{mult}} \hookrightarrow Q$.

Finalement, cela démontre (via le lemme des cinq) que l'on a bien un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Ext}^0_{\mathbb{Z}}(\widehat{G} \to \widehat{H},\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_{(p')} \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\text{ét}}(X,x)^{(p')}(-1)\,,$$

ce qui conclut la preuve du théorème 3.1. $\square$

4. Une variante de la conjecture des sections pour les espaces homogènes

L'objectif de cette partie est de donner une application des résultats principaux (à savoir les théorèmes 2.4 et 3.1) à l'analogue de la conjecture faible des sections pour les espaces homogènes. On renvoie à [S13] pour des généralités à propos de ces questions. La motivation principale de cette application est le théorème 182 de [S13] (et plus généralement les résultats du chapitre 13 de [S13]) affirmant que sur un corps p-adique ou sur un corps de nombres totalement imaginaire, un torseur sous un groupe linéaire connexe admet un point rationnel si et seulement la suite exacte fondamentale pour ce torseur admet une section. Il est donc naturel de se demander si ce résultat s'étend à des espaces homogènes non principaux.

Dans toute cette partie, k désigne un "bon corps de dimension cohomologique au plus 2" de caractéristique nulle, au sens de la section 3.4 de [BCTS08]. Ces corps satisfont les propriétés suivantes : pour tout k-groupe G semi-simple simplement connexe, $H^1(k,G)=1$ et pour tout k-lien L lié par un $\overline{k}$-groupe semi-simple, $H^2(k,L)$ contient une unique classe, qui est neutre. On notera Γ_k le groupe de Galois absolu de k.

Par exemple, un corps local non archimédien ou un corps de nombres totalement imaginaire est un tel corps.

4.1. *Torsion par* $\mathbb{Z}(1)$.

Soit K un corps de caractéristique nulle et $\overline{K}$ une clôture algébrique de K. On rappelle qu'un module galoisien sur K est un groupe abélien discret sur lequel le groupe de Galois absolu de K agit continûment.

On note $D^b_{\text{ét}}(K)$ la catégorie dérivée des complexes bornés de faisceaux étales sur $\mathrm{Spec}(K)$.

On définit $\mathbb{Z}(1) := \mathbb{G}_m[-1] = \overline{K}^*[-1]$ dans la catégorie $D^b_{\text{ét}}(K)$. Cette définition est un cas très particulier des constructions des complexes motiviques (étales) $\mathbb{Z}(n)$ que l'on trouve par exemple dans [B86]. On n'utilisera dans ce texte que le complexe $\mathbb{Z}(1)$ défini ci-dessus.

Pour tout $A \in D^b_{\text{ét}}(K)$, on pose $A(1) := A \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}(1)$, où $\otimes^{\mathbb{L}}_{\mathbb{Z}}$ désigne le produit tensoriel dérivé. On a par exemple des isomorphismes naturels pour tout $n \geq 1$

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(1) \cong \mu_n .$$

Remarquons que l'on dispose d'un morphisme canonique

$$\mathbb{Z}(1) \to \widehat{\mathbb{Z}}(1)$$

dans $D^b_{\text{ét}}(K)$, défini par le système projectif de triangles exacts

$$\mu_n \to \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m \to \mu_n[1] .$$

Remarquons également pour la suite que pour tout module galoisien profini A, on dispose d'un isomorphisme canonique de modules galoisiens :

$$A(-1) \otimes_{\widehat{\mathbb{Z}}} \widehat{\mathbb{Z}}(1) \xrightarrow{\sim} A .$$

4.2. *Complétion profinie et cohomologie galoisienne.* On commence par montrer un lemme de cohomologie galoisienne (voir [S13], corollaire 177 pour un résultat analogue) :

Lemme 4.3. *Soit K un corps et A un module galoisien de type fini. On note $A^\wedge := A \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}}$ le complété profini de A. Alors l'application naturelle*

$$H^2(K,A(1)) \to H^2(K,A \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}}(1) = H^2(K,A^\wedge \otimes_{\widehat{\mathbb{Z}}} \widehat{\mathbb{Z}}(1))$$

est injective.

Démonstration. On sait qu'il existe deux modules galoisiens libres de type fini L_1 et L_2, et une suite exacte courte de modules galoisiens

$$0 \to L_1 \xrightarrow{\rho_*} L_2 \to A \to 0 .$$

Il existe alors deux K-tores T_1 et T_2 tels que $T_{i*} = L_i$ comme modules galoisiens, et le morphisme ρ_* provient d'un morphisme de K-tores $\rho : T_1 \to T_2$. On voit facilement que par construction $\ker(\rho)$ est un K-groupe fini.

On note alors $C := \langle T_1 \xrightarrow{\rho} T_2]$ le complexe de tores correspondant, où le tore T_1 est placé en degré -1.

On considère la suite exacte de systèmes projectifs

$$0 \to ({}_nC)_{n\in\mathbb{N}} \to (C_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{([n])_{n\in\mathbb{N}}} C \to 0$$

où ${}_nC$ désigne le complexe $\langle {}_nT_1 \to {}_nT_2]$ avec ${}_nT_i$ le sous-groupe de n-torsion de T_i, et C_n désigne le complexe C muni du morphisme $C_n \xrightarrow{[n]} C$ de multiplication par n. La suite exacte longue de cohomologie (au sens de Jannsen, cf [J88]) associée est la suivante :

$$H^1(K, ({}_nC)_{n\in\mathbb{N}}) \to H^1(K, (C_n)_{n\in\mathbb{N}}) \to H^1(K, C) \xrightarrow{\partial} H^2(K, ({}_nC)_{n\in\mathbb{N}}) .$$

Or l'application $H^1(K, (C_n)_{n\in\mathbb{N}}) \to H^1(K, C)$ se factorise au travers du sous-groupe divisible maximal $\mathrm{Div}\left(H^1(K,C)\right)$ de $H^1(K,C)$, et le groupe $H^1(K,C)$ s'identifie canoniquement au groupe $H^2(K, A(1))$ via les isomorphismes canoniques $L_i(1) \cong T_i[-1]$ (on rappelle que pour un K-tore T, on a des isomorphismes canoniques $T_* \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}(1) \cong (T_* \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{K}^*)[-1] \cong T(\overline{K})[-1]$ dans $D^b_{\text{ét}}(K)$). Enfin, le groupe $H^2(K, ({}_nC)_{n\in\mathbb{N}})$ s'identifie au groupe $H^2(K, \langle \pi_1^{\text{ét}}(\overline{T_1}) \to \pi_1^{\text{ét}}(\overline{T_2})])$, i.e. au groupe $H^2(K, A^\wedge \otimes_{\widehat{\mathbb{Z}}} \widehat{\mathbb{Z}}(1))$, via les isomorphismes de modules galoisiens $L_i^\wedge \otimes_{\widehat{\mathbb{Z}}} \widehat{\mathbb{Z}}(1) \cong \pi_1^{\text{ét}}(\overline{T_i})$. Donc finalement, la suite exacte précédente induit une suite exacte

$$\mathrm{Div}\left(H^1(K,C)\right) \to H^2(K, A(1)) \xrightarrow{\partial} H^2(K, A^\wedge \otimes_{\widehat{\mathbb{Z}}} \widehat{\mathbb{Z}}(1)) , \tag{4.1}$$

où le morphisme ∂ coïncide avec l'application induite par le morphisme naturel $A(1) \to A \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}}(1) = A^\wedge \otimes_{\widehat{\mathbb{Z}}} \widehat{\mathbb{Z}}(1)$.

Pour terminer la preuve du lemme, on considère le triangle exact naturel

$$\ker(\rho)[1] \to C \to T_2/T_1 \to \ker(\rho)[2] ,$$

qui induit une suite exacte en cohomologie galoisienne :

$$H^2(K, \ker(\rho)) \to H^1(K,C) \to H^1(K, T_2/T_1) .$$

Or le théorème 90 de Hilbert assure que le groupe $H^1(K, T_2/T_1)$ est de n-torsion, où n est le degré d'une extension de K déployant le K-tore T_2/T_1, et le groupe $H^2(K, \ker(\rho))$ est de m-torsion, où m est l'exposant de $\ker(\rho)$. Par conséquent, le groupe $H^1(K,C)$ est de N-torsion, avec $N := mn$. Cela assure que $\mathrm{Div}\left(H^1(K,C)\right) = 0$, donc grâce à la suite exacte (4.1), on obtient bien que l'application naturelle

$$H^2(K, A(1)) \to H^2(K, A^\wedge \otimes_{\widehat{\mathbb{Z}}} \widehat{\mathbb{Z}}(1))$$

est injective. $\square$

4.4. *Abélianisation de la cohomologie non abélienne.*

Soit K un corps de caractéristique nulle, G un K-groupe linéaire connexe et X un espace homogène de G dont on note $\overline{H}$ le stabilisateur, supposé connexe, d'un point géométrique.

La structure d'espace homogène sur X permet de munir $\overline{H}$ d'une structure de K-lien (voir par exemple [B93], 7.1 ou [G71], définition IV.5.1.3), noté abusivement $\underline{\mathrm{lien}}(\overline{H})$ (la dépendance en X est sous-entendue). On note, en sous-entendant là encore la dépendance en X, $H^1(K,G,\overline{H})$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de K-espaces homogènes de G dont le K-lien associé est $\underline{\mathrm{lien}}(\overline{H})$. On a alors une application naturelle :

$$H^1(K,G,\overline{H}) \to H^2(K,\overline{H}),$$

qui associe à un espace homogène Y de G, dont le lien associé est $\underline{\mathrm{lien}}(\overline{H})$, la gerbe des relèvements de Y en un torseur sous G (voir [G71], IV, 5.1).

Construisons une application d'abélianisation

$$\mathrm{ab}_{G,\overline{H}} : H^1(K,G,\overline{H}) \to H^1_{\mathrm{ab}}(K,G,\overline{H}),$$

où $H^1_{\mathrm{ab}}(K,G,\overline{H})$ est le groupe abélien d'hypercohomologie galoisienne

$$H^1_{\mathrm{ab}}(K,G,\overline{H}) := H^1(K, \langle H^{\mathrm{tor}} \to G^{\mathrm{tor}}]),$$

où H^{tor} est en degré -1 et désigne la K-forme de $\overline{H}^{\mathrm{tor}}$ définie par le K-lien sur $\overline{H}^{\mathrm{tor}}$ induit par le K-lien $\underline{\mathrm{lien}}(\overline{H})$.

Pour cela, on définit d'abord $\underline{\mathrm{TORS}}(G)$ comme la K-gerbe (étale) des torseurs sous G (voir [G71], 1.4.5) et on note $H^1(K,\langle\overline{H} \to G])$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de couples $(\mathscr{M},m)$, où $\mathscr{M}$ est une K-gerbe liée par $\underline{\mathrm{lien}}(\overline{H})$ et $m : \mathscr{M} \to \underline{\mathrm{TORS}}(G)$ est un morphisme de K-gerbes lié par le morphisme canonique de K-liens $\underline{\mathrm{lien}}(\overline{H}) \to \underline{\mathrm{lien}}(G)$.

Remarquons au passage que si les groupes G et $\overline{H}$ sont commutatifs, alors $\underline{\mathrm{lien}}(\overline{H})$ définit une K-forme H de $\overline{H}$ et l'ensemble $H^1(K,\langle\overline{H} \to G])$ est muni d'une structure de groupe canonique (via le produit contracté des gerbes [G71, IV, 2.4]) qui identifie ce groupe $H^1(K,\langle\overline{H} \to G])$ au groupe d'hypercohomologie galoisienne du complexe de K-groupes commutatifs $\langle H \to G]$ (voir notamment [G71, IV, Prop. 3.4.2]).

On peut alors construire une application

$$\mathrm{ab}'_{G,\overline{H}} : H^1(K,G,\overline{H}) \to H^1(K,\langle\overline{H} \to G])$$

de la façon suivante : l'application $\mathrm{ab}'_{G,\overline{H}}$ associe à la classe d'isomorphisme d'un espace homogène Y de G sur K la gerbe $\mathscr{M}_Y$ des relèvements de Y en un K-torseur sous G, munie du morphisme d'oubli évident $m : \mathscr{M}_Y \to \underline{\mathrm{TORS}}(G)$ qui envoie un K-torseur P sous G dominant Y sur le K-torseur P sous G (en oubliant la flèche $P \to Y$).

Pour obtenir la flèche $\mathrm{ab}_{G,\overline{H}}$, on compose l'application $\mathrm{ab}'_{G,\overline{H}} : H^1(K,G,\overline{H}) \to H^1(K,\langle\overline{H} \to G])$ avec l'application naturelle $\pi_* : H^1(K,\langle\overline{H} \to G]) \to H^1(K,\langle H^{\mathrm{tor}} \to G^{\mathrm{tor}}])$ définie grâce au carré commutatif suivant de morphismes de liens (les morphismes verticaux sont des épimorphismes de liens) :

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathrm{lien}}(\overline{H}) \arrow[r] \arrow[d, "\pi_H"] & \underline{\mathrm{lien}}(G) \arrow[d, "\pi_G"] \\ \underline{\mathrm{lien}}(H^{\mathrm{tor}}) \arrow[r] & \underline{\mathrm{lien}}(G^{\mathrm{tor}}). \end{tikzcd}$$

Une fois l'application $\mathrm{ab}_{G,\overline{H}}$ construite, il est immédiat de constater qu'elle s'inscrit dans un diagramme commutatif naturel :

(4.2)
$$\begin{tikzcd} H^1(K,G,\overline{H}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{ab}_{G,\overline{H}}"] & H^2(K,\overline{H}) \arrow[d, "\mathrm{ab}^2_{\overline{H}}"] \\ H^1(K,\langle H^{\mathrm{tor}} \to G^{\mathrm{tor}}]) \arrow[r] & H^2(K,H^{\mathrm{tor}}), \end{tikzcd}$$

où la flèche $\mathrm{ab}^2_{\overline{H}}$ est définie par exemple par Borovoi dans [B93].

Remarque 4.5. On peut trouver une description explicite de l'application $\mathrm{ab}_{G,\overline{H}}$ dans la section 1 de [B99].

4.6. *Le groupe fondamental algébrique d'un espace homogène sur K.*

L'énoncé général suivant est une version Galois-équivariante du théorème 2.4 :

Théorème 4.7. *Soit K un corps de caractéristique nulle, G/K un groupe linéaire connexe et X/K un espace homogène de G. Soit $x \in X(\overline{K})$, on pose $\overline{H} := \mathrm{Stab}_{\overline{G}}(x)$. On suppose que* $\mathrm{Pic}(\overline{G}) = 0$ *et que $\overline{H}$ est connexe. Alors il existe un isomorphisme canonique de modules galoisiens*

$$\pi_1^{\mathrm{alg}}(\overline{X}) \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}}(1) \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\text{ét}}(\overline{X}),$$

avec $\pi_1^{\mathrm{alg}}(\overline{X}) := \mathrm{Ext}^0_{\mathbb{Z}}(\widehat{G} \to \widehat{H}, \mathbb{Z}) \cong \mathrm{coker}\left(\overline{H}_*^{\mathrm{tor}} \to G_*^{\mathrm{tor}}\right)$.

Remarque 4.8. Le groupe $\widehat{H}$ des caractères de $\overline{H}$ est naturellement un module galoisien, grâce au K-lien défini par X. De même, $\overline{H}^{\mathrm{tor}}$ est naturellement un K-tore et $\overline{H}^{\mathrm{tor}} \to G^{\mathrm{tor}}$ est un morphisme de K-tores.

Démonstration. On rappelle que l'on dispose du module galoisien $\pi_1^{\mathrm{alg}}(\overline{G}) := T_{G*}/T_{G^{\mathrm{sc}}*} \cong G_*^{\mathrm{tor}}$, et on définit le module galoisien $\pi_1^{\mathrm{alg}}(\overline{X}) := \mathrm{Ext}^0_{\mathbb{Z}}(\widehat{G} \to \widehat{H}, \mathbb{Z}) \cong \mathrm{coker}\left(\overline{H}_*^{\mathrm{tor}} \to G_*^{\mathrm{tor}}\right)$.

Fixons un tore maximal $T_{\overline{H}}$ de $\overline{H}^{\mathrm{red}}$, et considérons le diagramme commutatif suivant de groupes abéliens :

$$\begin{tikzcd}
T_{\overline{H}*} \otimes \widehat{\mathbb{Z}}(1) \arrow[r] \arrow[d, "c_H"] & \pi_1^{\mathrm{alg}}(\overline{G}) \otimes \widehat{\mathbb{Z}}(1) \arrow[r, "\pi_x^{\mathrm{alg}}"] \arrow[d, "c_G", "\simeq"'] & \pi_1^{\mathrm{alg}}(\overline{X}) \otimes \widehat{\mathbb{Z}}(1) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "c_X"] & 0 \\
\pi_1^{\text{ét}}(\overline{H}^{\mathrm{red}}) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \pi_1^{\text{ét}}(\overline{G}) \arrow[r, "\pi_x^{\text{ét}}"] \arrow[d, "="] & \pi_1^{\text{ét}}(\overline{X}) \arrow[r] \arrow[d, "="] & 0 \\
\pi_1^{\text{ét}}(\overline{H}) \arrow[r] & \pi_1^{\text{ét}}(\overline{G}) \arrow[r, "\pi_x^{\text{ét}}"] & \pi_1^{\text{ét}}(\overline{X}) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd} \tag{4.3}$$

où $\pi_x : \overline{G} \to \overline{X}$ désigne le $\overline{K}$-morphisme $g \mapsto g \cdot x$. Le morphisme de groupes c_H est surjectif par le corollaire 2.11, c_G est un isomorphisme de modules galoisiens par la proposition 1.13 de [B98] (ou la preuve du lemme 2.6). En outre, les trois lignes du diagramme (4.3) sont des suites exactes de groupes abéliens : pour la première, c'est la définition de $\pi_1^{\mathrm{alg}}(\overline{X})$; pour les deux autres, cela résulte du lemme 2.3.

On en déduit donc un morphisme canonique de groupes abéliens $c_X : \pi_1^{\mathrm{alg}}(\overline{X}) \otimes \widehat{\mathbb{Z}}(1) \to \pi_1^{\text{ét}}(\overline{X})$. Une chasse au diagramme dans (4.3) assure que c_X est un isomorphisme de groupes.

Montrons maintenant que c_X est un isomorphisme de modules galoisiens : on sait que c_G et π_x^{alg} sont des morphismes de modules galoisiens. La commutativité du carré supérieur droit de (4.3) assure qu'il suffit donc de vérifier que $\pi_x^{\text{ét}} : \pi_1^{\text{ét}}(\overline{G}) \to \pi_1^{\text{ét}}(\overline{X})$ est un morphisme de modules galoisiens.

Soit $\gamma \in \Gamma_K$ et $g_\gamma \in G(\overline{K})$ tel que ${}^\gamma x = g_\gamma \cdot x$. On considère le diagramme commutatif suivant de groupes abéliens, dont les morphismes verticaux sont des isomorphismes de groupes :

$$\begin{tikzcd}
\pi_1^{\text{ét}}(\overline{G}) \arrow[r, "\pi_x^{\text{ét}}"] \arrow[d, "\gamma_*"] & \pi_1^{\text{ét}}(\overline{X}, x) \arrow[d, "\gamma_*"] \\
\pi_1^{\text{ét}}(\overline{G}) \arrow[r, "\pi_{\gamma_x}^{\text{ét}}"] \arrow[d, "c_{g_\gamma}"] & \pi_1^{\text{ét}}(\overline{X}, {}^\gamma x) \arrow[d, "="] \\
\pi_1^{\text{ét}}(\overline{G}) \arrow[r, "\pi_x^{\text{ét}}"] & \pi_1^{\text{ét}}(\overline{X}, x),
\end{tikzcd}$$

où c_{g_γ} est induit par la conjugaison par g_γ dans $\overline{G}$. On rappelle que l'on a un isomorphisme canonique $\pi_1^{\text{ét}}(\overline{X}, {}^\gamma x) \cong \pi_1^{\text{ét}}(\overline{X}, x)$ car $\pi_1^{\text{ét}}(\overline{X}, x)$ est commutatif et que le morphisme c_{g_γ} : $\pi_1^{\text{ét}}(\overline{G}) \to \pi_1^{\text{ét}}(\overline{G})$ est l'identité.

Par conséquent, le morphisme $\pi_x^{\text{ét}} : \pi_1^{\text{ét}}(\overline{G}) \to \pi_1^{\text{ét}}(\overline{X})$ est Galois-équivariant, ce qui assure que c_X est un isomorphisme de modules galoisiens.

Cela conclut la preuve. □

4.9. *Conjecture des sections pour les espaces homogènes à stabilisateurs connexes.*

On montre le théorème suivant, qui concerne la conjecture (faible) des sections pour les espaces homogènes de groupes linéaires connexes à stabilisateurs connexes :

Théorème 4.10. *Soit k un bon corps de dimension cohomologique au plus 2 de caractéristique nulle, G un k-groupe linéaire connexe et X un k-espace homogène de G à stabilisateurs géométriques connexes. On note $\overline{H}$ le stabilisateur d'un point géométrique $\bar{x} \in X(\bar{k})$. On suppose* $\ker(\overline{H}^{\text{tor}} \to \overline{G}^{\text{tor}})$ *fini.*

Si la suite exacte fondamentale

$$1 \to \pi_1^{\text{ét}}(\overline{X}) \to \pi_1^{\text{ét}}(X) \to \Gamma_k \to 1$$

est scindée, alors $X(k) \neq \emptyset$.

Démonstration. Tout d'abord, on peut supposer que le groupe G est un groupe quasi-trivial (en remplaçant par exemple G par une résolution flasque de G : voir [CT08], 3.1). En particulier, on a $\text{Pic}(\overline{G}) = 0$.

La formule $\pi_1^{\text{alg}}(\overline{X}) = \text{Ext}^0_{\mathbb{Z}}(\widehat{G} \to \widehat{H}, \mathbb{Z})$, ainsi que l'hypothèse de finitude sur $\ker(\overline{H}^{\text{tor}} \to \overline{G}^{\text{tor}})$, assurent que l'on a un isomorphisme canonique dans $D^b_{\text{ét}}(k)$

$$\pi_1^{\text{alg}}(\overline{X})(1) \cong [H^{\text{tor}} \to G^{\text{tor}}\rangle \,,$$

donc l'application d'abélianisation précédemment définie (voir section 4.4) peut s'interpréter comme une application

$$\text{ab}_{G,\overline{H}} : H^1(k, G, \overline{H}) \to H^2(k, \pi_1^{\text{alg}}(\overline{X})(1)) \,.$$

Si l'on compose cette application avec l'application naturelle de complétion profinie (voir 4.1) et l'isomorphisme du théorème 4.7

$$c_X(1) : \pi_1^{\text{alg}}(\overline{X})(1) \to \pi_1^{\text{alg}}(\overline{X}) \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}}(1) \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\text{ét}}(\overline{X}) \,,$$

on obtient un diagramme commutatif naturel

$$\begin{tikzcd} H^1(k, G, \overline{H}) \arrow[r, "\text{ab}_{G,\overline{H}}"] \arrow[dr, "s"'] & H^2(k, \pi_1^{\text{alg}}(\overline{X})(1)) \arrow[d, "c_X(1)"] \\ & H^2(k, \pi_1^{\text{ét}}(\overline{X})) \,, \end{tikzcd} \tag{4.4}$$

dans lequel on vérifie maintenant que l'application composée

$$s : H^1(k, G, \overline{H}) \to H^2(k, \pi_1^{\text{ét}}(\overline{X}))$$

est l'opposée de l'application donnée par la conjecture des sections, à savoir l'application qui à un espace homogène Y de G associe la classe de la suite exacte fondamentale

$$1 \to \pi_1^{\text{ét}}(\overline{Y}) \to \pi_1^{\text{ét}}(Y) \to \Gamma_k \to 1$$

dans le groupe $H^2(k, \pi_1^{\text{ét}}(\overline{Y})) = H^2(k, \pi_1^{\text{ét}}(\overline{X}))$. Pour ce faire, on utilise une version des constructions de la section 1 valable sur un corps quelconque, sans supposer que l'espace homogène a un point rationnel (pour ces constructions, voir [BCTS08], preuve de la proposition 3.6) : on dispose en effet de morphismes surjectifs d'espaces homogènes

$$(G, X) \leftarrow (G_Y, Y) \to (G_Z, Z) \to (G_W, W)$$

définis sur k, analogues des constructions de la section 1. En particulier, Z est un k-torseur sous un tore et le morphisme $\pi_1^{\text{ét}}(Y) \to \pi_1^{\text{ét}}(Z)$ est un isomorphisme (voir 3.1). Par conséquent, pour comparer l'application s avec l'application donnée par la conjecture des sections, il suffit par fonctorialité de le faire pour Z, qui est un torseur sous un k-tore. Or ce cas est démontré par Stix à la proposition 174 de [S13], ce qui conclut la preuve de l'identification de l'application s.

Or le lemme 4.3 assure que le morphisme

$$c_X(1) : H^2(k, \pi_1^{\text{alg}}(\overline{X})(1)) \to H^2(k, \pi_1^{\text{alg}}(\overline{X}) \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}}(1)) \xrightarrow{\sim} H^2(k, \pi_1^{\text{ét}}(\overline{X}))$$

est injectif, donc si l'espace homogène X admet une section de sa suite exacte fondamentale, on déduit du diagramme (4.4) que

$$\mathrm{ab}_{G,\overline{H}}([X]) = 0 \in H^1_{\text{ab}}(k, G, \overline{H}) .$$

Si $\eta_X \in H^2(k, \overline{H})$ désigne la classe de la k-gerbe $\mathscr{M}_X$ associée à X, alors le diagramme (4.2) assure que $\mathrm{ab}^2_{\overline{H}}(\eta_X) = 0$. Comme k est un bon corps de dimension cohomologique $\leq$ 2, on sait que le noyau de $\mathrm{ab}^2_{\overline{H}}$ est formé des classes neutres dans $H^2(k, \overline{H})$ (voir [CTGP04], proposition 5.4), ce qui assure que η_X est neutre. Par conséquent, $\mathscr{M}_X(k) \neq \emptyset$, donc il existe un k-torseur P sous G et un morphisme G-équivariant $q : P \to X$.

Or le groupe G est quasi-trivial, donc en utilisant de nouveau l'hypothèse faite sur le corps k, on sait que $H^1(k, G) = 1$, donc $P(k) \neq \emptyset$, donc $X(k) \neq \emptyset$, ce qui termine la preuve du théorème. □

4.11. *Conjecture des sections pour les espaces homogènes quelconques.*

Dans cette partie, on généralise le théorème 4.10 en supprimant l'hypothèse de connexité sur les stabilisateurs.

Théorème 4.12. *Soit k un bon corps de dimension cohomologique au plus 2 de caractéristique nulle. Soit G un k-groupe linéaire connexe et X un k-espace homogène de G. On note $\overline{H}$ le stabilisateur d'un point géométrique $\overline{x} \in X(\overline{k})$. On suppose* $\ker(\overline{H}^{\text{tor}} \to \overline{G}^{\text{tor}})$ *fini.*

Si la suite exacte fondamentale

$$1 \to \pi_1^{\text{ét}}(\overline{X}) \to \pi_1^{\text{ét}}(X) \to \Gamma_k \to 1$$

est scindée, alors $X(k) \neq \emptyset$.

Démonstration. Géométriquement, la situation est la suivante : il existe une suite exacte courte de $\overline{k}$-groupes algébriques

$$1 \to \overline{H}^0 \to \overline{H} \to \overline{F} = \pi_0(\overline{H}) \to 1$$

avec $\overline{H}^0$ connexe et $\overline{F}$ fini. En notant $\overline{Y} := \overline{G}/\overline{H}^0$, on obtient un diagramme commutatif d'espaces homogènes de $\overline{G}$ sur $\overline{k}$:

$$\begin{tikzcd}
\overline{G} \arrow[dr, "\overline{H}^0"] \arrow[dd, "\overline{H}"'] & \\
& \overline{Y} = \overline{G}/\overline{H}^0 \arrow[dl, "\pi"', "\overline{F}"] \\
\overline{X} = \overline{G}/\overline{H} &
\end{tikzcd} .$$

Alors $\pi : \overline{Y} \to \overline{X}$ est un torseur sous $\overline{F}$, ce qui définit un morphisme surjectif naturel $\pi_1^{\text{ét}}(\overline{X}) \to \overline{F}$, qui est équivariant pour l'action extérieure du groupe de Galois sur ces deux groupes (autrement dit, c'est un morphisme surjectif de k-liens).

L'obstruction à descendre ce torseur $\overline{\pi} : \overline{Y} \to \overline{X}$ en un X-torseur $\pi : Y \to X$ sous une k-forme F du groupe $\overline{F}$ est alors une classe $\alpha_{\overline{Y}/X} \in H^2(k, \overline{F})$ (voir [HS02]), et l'application naturelle $\partial : H^2(k, \pi_1^{\text{ét}}(\overline{X})) \to H^2(k, \overline{F})$ envoie la classe s_X de l'extension fondamentale associée à X sur cette classe $\alpha_{\overline{Y}/X}$ (voir [HS02], section 3.1).

Or par hypothèse s_X est une classe neutre, donc $\alpha_{\overline{Y}/X} = \partial(s_X)$ est neutre dans $H^2(k, \overline{F})$, ce qui assure que le torseur $\overline{\pi} : \overline{Y} \to \overline{X}$ sous $\overline{F}$ descend en un X-torseur $\pi : Y \xrightarrow{F} X$ sous une k-forme F de $\overline{F}$. En outre, on voit facilement que l'action de $\overline{G}$ sur $\overline{Y}$ descend en une action de G sur Y de sorte que Y est un k-espace homogène de G (à stabilisateurs connexes) et $\pi : Y \to X$ est un morphisme G-équivariant.

Cependant, la classe fondamentale $s_Y \in H^2(k, \pi_1^{\text{ét}}(\overline{Y}))$ n'est pas nécessairement neutre.

On dispose du diagramme commutatif naturel suivant à lignes et colonnes exactes :

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & & \\
1 \arrow[r] & \pi_1^{\text{ét}}(\overline{Y}) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1^{\text{ét}}(Y) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma_k \arrow[r] \arrow[d, "="] & 1 \\
1 \arrow[r] & \pi_1^{\text{ét}}(\overline{X}) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1^{\text{ét}}(X) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma_k \arrow[r] & 1 \\
 & \overline{F} \arrow[r, "="] \arrow[d] & \overline{F} \arrow[d] & & \\
 & 1 & 1 & & .
\end{tikzcd}$$

Par hypothèse, la seconde ligne est scindée. L'obstruction à relever une section de cette ligne en une section de la première ligne est alors un 1-cocycle $\sigma : \Gamma_k \to \overline{F}$.

On voit alors que si l'on remplace le X-torseur $\pi : Y \to X$ sous F par le X-torseur tordu $\pi^\sigma : Y^\sigma \to X$ sous F^σ, alors la suite exacte fondamentale associée à Y^σ est scindée. Or Y^σ est naturellement un k-espace homogène sous G, dont les stabilisateurs géométriques sont isomorphes à $\overline{H}^0$, donc connexes. Et cet espace homogène vérifie toujours la condition de finitude de $\ker(\overline{H}^{\text{tor}} \to \overline{G}^{\text{tor}})$.

Alors le théorème 4.10 assure que $Y^\sigma(k) \neq \emptyset$, ce qui implique évidemment que $X(k) \neq \emptyset$. Cela conclut la preuve du théorème. $\square$

4.13. *À propos de l'hypothèse de finitude.*

On peut montrer que si X est un espace homogène défini sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$, alors la condition de finitude sur le noyau du morphisme $\overline{H}^{\text{tor}} \to \overline{G}^{\text{tor}}$ équivaut à une hypothèse topologique plus naturelle, à savoir la finitude du groupe $\pi_2^{\text{top}}(X(\mathbb{C}))$. Sur un corps K quelconque, cette condition de finitude est équivalente à l'hypothèse naturelle analogue de finitude de $\ker(\pi_1^{\text{ét}}(H) \to \pi_1^{\text{ét}}(G))$.

Ces hypothèses sont tout à fait naturelles pour espérer avoir la variante de la conjecture des sections étudiée ici : si la suite exacte fondamentale est scindée, on peut en effet définir une nouvelle obstruction faisant intervenir le deuxième groupe d'homotopie étale de X (cf [HS13], sections 9.4 et 9.6, par exemple). On peut donc s'attendre a priori à ce que la conjecture des sections soit valable seulement si cette obstruction supplémentaire, ainsi que les suivantes, sont triviales. Les exemples qui suivent illustrent la nécessité de cette hypothèse sur le deuxième groupe d'homotopie.

Notons d'abord qu'il existe bien des familles d'espaces homogènes avec un deuxième groupe d'homotopie fini et non trivial, et qui satisfont donc la conjecture faible des sections.

En revanche, le contre-exemple qui suit illustre le fait qu'en général, si le deuxième groupe d'homotopie est gros, alors la suite exacte fondamentale n'est pas suffisante pour décider de l'existence d'un point rationnel. Soit X une variété de Severi-Brauer sur un corps de nombres k totalement imaginaire, sans point rationnel, alors $\overline{X}$ est simplement connexe (car isomorphe à un espace projectif), donc la suite exacte fondamentale est toujours scindée. On sait en outre que $\pi_2^{\mathrm{top}}(X(\mathbb{C})) \cong \mathbb{Z}$. Ce contre-exemple assure que l'hypothèse de finitude pour $\pi_2^{\mathrm{top}}(X(\mathbb{C}))$ est nécessaire dans les théorèmes.

Dans le cas où X est un torseur sous un k-groupe linéaire connexe G, alors $\pi_2^{\mathrm{top}}(X(\mathbb{C})) = \pi_2^{\mathrm{top}}(G(\mathbb{C})) = 0$ si k est un corps de nombres totalement imaginaire, et plus généralement l'hypothèse de finitude est vérifiée sur un corps quelconque, donc le théorème s'applique aux torseurs : c'est le cas particulier démontré par Stix dans [S13], chapitre 13.

Notons pour finir une famile d'espaces homogènes X de groupes linéaires connexes G vérifiant l'hypothèse des théorèmes de cette section : c'est le cas si les stabilisateurs géométriques sont extensions d'un groupe fini par un groupe simplement connexe.

Remerciements : L'auteur remercie très chaleureusement Mikhail Borovoi, Jakob Stix et Tamás Szamuely pour de précieuses discussions.

RÉFÉRENCES

[B86] S. Bloch, *Algebraic cycles and higher K-theory,* Adv. in Math. **61** (1986), no. 3, 267–304.

[B93] M. Borovoi, *Abelianization of the second nonabelian Galois cohomology,* Duke Math. J. **72** (1993), 217–239.

[B96] M. Borovoi, *The Brauer-Manin obstructions for homogeneous spaces with connected or abelian stabilizer,* J. reine angew. Math. **473** (1996), 181–194.

[B98] M. Borovoi, *Abelian Galois cohomology of reductive groups,* Mem. Amer. Math. Soc. **132** (1998), no. 626.

[B99] M. Borovoi, *A cohomological obstruction to the Hasse principle for homogeneous spaces,* Math. Ann. **314** (1999), 491–504.

[BCTS08] M. Borovoi, J.-L. Colliot-Thélène and A. N. Skorobogatov, The elementary obstruction and homogeneous spaces, Duke Math. J. **141** (2008), 321–364.

[BGA14] M. Borovoi and G. A. González-Avilés, *The algebraic fundamental group of a reductive group scheme over an arbitrary base scheme,* Cent. Eur. J. Math. **12** (2014), no. 4, 545–558.

[BKG04] M. Borovoi, B. Kunyavskiĭ and P. Gille, *Arithmetical birational invariants of linear algebraic groups over two-dimensional geometric fields,* J. Algebra **276** (2004), no. 1, 292–339.

[BS12] M. Borovoi et T. M. Schlank, *A cohomological obstruction to weak approximation for homogeneous spaces,* Moscow Math. J. **12** (2012), 1–20.

[BS13] M. Brion et T. Szamuely, *Prime-to-p étale covers of algebraic groups,* Bull. Lond. Math. Soc. **45** (2013), no. 3, 602–612.

[CT08] J.-L. Colliot-Thélène, *Résolutions flasques des groupes linéaires connexes*, J. reine angew. Math. **618** (2008), 77–133.

[CTGP04] J.-L. Colliot-Thélène, P. Gille et R. Parimala, *Arithmetic of linear algebraic groups over* 2-*dimensional geometric fields*, Duke Math. J. **121** (2004), no. 2, 285–341.

[G71] J. Giraud, *Cohomologie non abélienne*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 179. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971. ix+467 pp.

[GM96] S. I. Gelfand and Yu. I. Manin, *Methods of Homological Algebra,* Springer-Verlag, Berlin 1996.

[GA13] C. D. González-Avilés, *Flasque resolutions of reductive group schemes,* Cent. Eur. J. Math. **11** (2013), no. 7, 1159–1176.

[HS02] D. Harari et A. Skorobogatov, *Non-abelian cohomology and rational points*, Compositio Math. **130**, No 3, 241–273 (2002).

[HS13] Y. Harpaz et T. Schlank, *Homotopy obstructions to rational points*, in *Torsors, étale homotopy and applications to rational points*, 280–423, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **405**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2013.

[J88] U. Jannsen, *Continuous étale cohomology*, Math. Annalen **280**, 207–245 (1988).

[M98] A. S. Merkurjev, *K-theory and algebraic groups*, European Congress of Mathematics, Vol. II (Budapest, 1996), pp. 43–72, Progr. Math., 169, Birkhäuser, Basel, 1998.

[M72] M. Miyanishi, *On the algebraic fundamental group of an algebraic group*, J. Math. Kyoto Univ. **12** (1972), 361–367.

[S81] J.-J. Sansuc, *Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres*, J. reine angew. Math. **327** (1981), 12–80.

[SGA1] A. Grothendieck, *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)*. Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie 1960-61, Lecture Notes in Math. **224**, Springer, Berlin, 1971.

[SGA3] M. Demazure et A. Grothendieck, *Schémas en groupes (SGA 3), Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie* 1962–64, , Lecture Notes Math., vol. **151**, **152**, **153**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1970.

[S13] J. Stix, *Rational Points and Arithmetic of Fundamental Groups. Evidence for the Section Conjecture*, Lecture Notes Math., vol. **2054**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 2013.

[S09] T. Szamuely, *Galois Groups and Fundamental Groups,* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 117. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

SORBONNE UNIVERSITÉS, UPMC UNIV PARIS 06, INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE JUSSIEU-PARIS RIVE GAUCHE, UMR 7586, CNRS, UNIV PARIS DIDEROT, SORBONNE PARIS CITÉ, F-75005, PARIS, FRANCE.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS, ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, 45 RUE D'ULM, 75230 PARIS CEDEX 05, FRANCE.

E-mail : `cyril.demarche@imj-prg.fr`