# Obstruction de descente et obstruction de Brauer-Manin étale

Cyril Demarche

11 août 2008

**Résumé**

Soit $X$ une variété projective lisse géométriquement intègre sur un corps de nombres. On considère deux obstructions au principe de Hasse sur $X$ : l'obstruction de Brauer-Manin appliquée aux revêtements étales de $X$ et l'obstruction de descente sur $X$. On démontre que la première est plus forte que la seconde. En combinant ce résultat avec un exemple récent de Poonen, on en déduit que l'obstruction de descente est insuffisante pour expliquer tous les contrexemples au principe de Hasse.

**Abstract**

Let $X$ be a smooth, projective and geometrically integral variety over a number field. We consider two obstructions to the Hasse principle on $X$ : the Brauer-Manin obstruction applied to étale covers of $X$ and the descent obstruction on $X$. We prove that the first one is stronger than the second one. Combining this result with a recent example of Poonen shows that the descent obstruction is not sufficient to explain all counterexamples to the Hasse principle.

---

*Mots clés* : principe de Hasse, points rationnels, obstruction de Brauer-Manin, obstruction de descente, cohomologie galoisienne, torseur.

*Keywords* : Hasse principle, rational point, Brauer-Manin obstruction, descent obstruction, Galois cohomology, torsor.

*MSC* : primary : 11G35 ; secondary : 14G05, 11E72

# 1 Introduction

Dans tout ce texte, une variété est un schéma séparé de type fini sur un corps, et un groupe algébrique est un schéma en groupes séparé de type fini sur un corps. Si $k$ est un corps, et $\overline{k}$ une clôture algébrique de $k$, un $k$-groupe algébrique $G$ est dit fini si $G(\overline{k})$ est fini (i.e. si $G$ est fini comme $k$-schéma).

Soit $k$ un corps de nombres. Pour toute $k$-variété $Y$, on notera $Y(\mathbf{A}_k)$ l'ensemble de ses points adéliques, défini de la façon suivante : si $\mathcal{Y}$ est un modèle de $Y$ sur un ouvert $U = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{k,S})$ (si $S$ est un ensemble fini de places de $k$, $\mathcal{O}_{k,S}$ désigne l'ensemble des éléments de $k$ entiers hors de $S$) du spectre de l'anneau des entiers de $k$, $Y(\mathbf{A}_k)$ est défini comme étant le produit restreint $\prod'_v Y(k_v)$ par rapport aux sous-ensembles $\mathcal{Y}(\mathcal{O}_v)$, $v \notin S$. Cet ensemble est muni de la topologie produit restreint (chaque $Y(k_v)$ étant muni de la topologie $v$-adique). Si $Y$ est propre, cet ensemble coïncide avec le produit direct des $Y(k_v)$.

On rappelle l'existence de l'accouplement dit de Brauer-Manin

$$\begin{array}{ccc} Y(\mathbf{A}_k) \times \mathrm{Br}(Y) & \longrightarrow & \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \\ (P, A) & \longmapsto & \langle A, P \rangle_{\mathrm{BM}} := \sum_{v \in \Omega_k} j_v(A(P_v)) \end{array}$$

(voir par exemple [11], section 5.2), où $\mathrm{Br}(Y)$ désigne le groupe de Brauer cohomologique de la variété $Y$, à savoir $\mathrm{Br}(Y) := H^2_{\text{ét}}(Y, \mathbf{G}_m)$, $j_v : \mathrm{Br}(k_v) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ est l'invariant donné par la théorie du corps de classes local, $A(P_v) \in \mathrm{Br}(k_v)$ est l'évaluation de $A \in \mathrm{Br}(Y)$ en $P_v \in Y(k_v)$ . On peut alors définir l'ensemble de Brauer-Manin

$$Y(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}} := \{P \in Y(\mathbf{A}_k) : \langle A, P \rangle_{\mathrm{BM}} = 0, \forall A \in \mathrm{Br}(Y)\}$$

Grâce à la loi de réciprocité de la théorie du corps de classes global, on sait que $Y(k) \subset Y(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}}$.

Désormais, $X$ est une $k$-variété projective.

Pour tout groupe algébrique $G$ sur $k$, pour tout $X$-torseur $f : Y \xrightarrow{G} X$ sous $G$, et tout cocycle $\sigma \in Z^1(k, G)$, on notera $f^\sigma : Y^\sigma \xrightarrow{G^\sigma} X$ le $X$-torseur $f$ tordu par le cocycle $\sigma$ (voir par exemple [11] p. 20, ou définition 1). En outre, si $\sigma$ est un 1-cocycle à valeurs dans $G$, on notera $[\sigma]$ sa classe dans $H^1(k, G)$. Soit $f : Y \xrightarrow{G} X$ un torseur sous un $k$-groupe $G$ ; on considérera l'ensemble de descente de $f$ défini par

$$X(\mathbf{A}_k)^f := \bigcup_{[\sigma] \in H^1(k,G)} f^\sigma(Y^\sigma(\mathbf{A}_k))$$

**Remarque.** Une définition équivalente de l'ensemble de descente $X(\mathbf{A}_k)^f$ est donnée par exemple dans [6], définition 4.2, à savoir que $X(\mathbf{A}_k)^f$ est l'ensemble des points adéliques $(P_v)$ de $X$ tels que l'évaluation $([Y](P_v)) \in \prod_v H^1(k_v, G)$ provienne d'une classe globale dans $H^1(k,G)$, i.e. $([Y](P_v)) \in \mathrm{Im}\,(H^1(k,G) \to \prod_v H^1(k_v,G))$. On peut montrer l'équivalence entre les deux définitions en écrivant $G$ comme une extension d'un groupe fini par un groupe connexe, et en utilisant le théorème de Lang qui assure que $H^1_{\text{ét}}(\mathcal{O}_v, \mathcal{G}') = 0$ pour presque toute place $v$, où $\mathcal{G}'$ est un modèle de la composante neutre de $G$ sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_k)$. En effet, cela permet de montrer que $X(\mathbf{A}_k)^f = \bigcup_{[\sigma]\in H^1(k,G)} f^\sigma(\prod_{v\in\Omega_k} Y^\sigma(k_v))$ (voir par exemple [12], lemme 2.3), et alors il est clair que les deux définitions coïncident.

On définit alors, comme dans [8] (sections 3.2 et 3.3), les deux ensembles suivants :

$$X(\mathbf{A}_k)^{\text{ét, Br}} := \bigcap_{\substack{f : Y \xrightarrow{G} X \\ G \text{ fini}}} \bigcup_{[\sigma]\in H^1(k,G)} f^\sigma(Y^\sigma(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}})$$

et

$$X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{desc}} := \bigcap_{\substack{f : Y \xrightarrow{G} X \\ G \text{ linéaire}}} X(\mathbf{A}_k)^f = \bigcap_{\substack{f : Y \xrightarrow{G} X \\ G \text{ linéaire}}} \bigcup_{[\sigma]\in H^1(k,G)} f^\sigma(Y^\sigma(\mathbf{A}_k))$$

On cherche à comparer ces deux ensembles, qui définissent tous les deux des obstructions au principe de Hasse pour la variété $X$, appelées respectivement obstruction de Brauer-Manin étale et obstruction de descente. En effet, on sait que pour tout $X$-torseur $Y \xrightarrow{G} X$, on a (voir par exemple [11], p 22) :

$$X(k) = \bigcup_{[\sigma]\in H^1(k,G)} f^\sigma(Y^\sigma(k))$$

Cela implique bien en particulier que l'on a des inclusions $X(k) \subset X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{desc}}$ et $X(k) \subset X(\mathbf{A}_k)^{\text{ét, Br}}$. Cela permet de définir des obstructions au principe de Hasse, qui sont plus fines que l'obstruction de Brauer-Manin ($X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{desc}}$ et $X(\mathbf{A}_k)^{\text{ét, Br}}$ sont en effet contenus dans $X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}}$ : pour le premier, c'est évident, et pour le second, c'est la conséquence d'un résultat de Gabber que l'on peut trouver dans [3]).

En 1999, Skorobogatov (voir [10]) a construit un contrexemple $X$ au principe de Hasse pour lequel $X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}} \neq \emptyset$, mais $X(\mathbf{A}_k)^{\text{ét, Br}} = X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{desc}} = \emptyset$. Plus récemment, Poonen (voir [8]) a fabriqué des exemples de variétés $X$ pour lesquelles l'obstruction de Brauer-Manin étale est insuffisante pour expliquer la vacuité de $X(\mathbf{A}_k)$ : pour ces variétés, l'ensemble $X(\mathbf{A}_k)$ est vide, mais $X(\mathbf{A}_k)^{\text{ét, Br}}$ (et a forciori $X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}}$) ne l'est pas.

On cherche ici à répondre à la question 3.1 posée par Poonen dans [8], ainsi qu'à la question similaire de Stoll dans [13] (fin de la section 7, paragraphe "A new obstruction ?") : a-t-on toujours une inclusion $X(\mathbf{A}_k)^{\text{ét, Br}} \subset X(\mathbf{A}_k)^{\text{desc}}$ ?

On se propose de démontrer le résultat suivant (voir théorème 1), qui répond à cette question par l'affirmative :

**Théorème.** *Soit $X$ une $k$-variété propre, lisse et géométriquement intègre. Alors $X(\mathbf{A}_k)^{\text{ét, Br}} \subset X(\mathbf{A}_k)^{\text{desc}}$.*

En particulier, cet énoncé permet de répondre à la question de Poonen, ce qui assure que l'obstruction de descente est insuffisante pour expliquer les contrexemples au principe de Hasse que sont les variétés considérées dans [8] (voir corollaire 2).

**Remarque.** Un résultat récent de Skorobogatov (voir [12], théorème 1.1), assure que l'inclusion inverse $X(\mathbf{A}_k)^{\text{desc}} \subset X(\mathbf{A}_k)^{\text{ét, Br}}$ est également vérifiée. Cela démontre donc que l'obstruction de descente et l'obstruction de Brauer-Manin étale sont en fait équivalentes.

**Remerciements.** Je remercie chaleureusement D. Harari pour son soutien et ses nombreux commentaires sur ce texte. Je remercie également J.L. Colliot-Thélène, B. Poonen et A. Skorobogatov pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

# 2 Énoncé du résultat et structure de la preuve

## 2.1 Notations et rappels

Avant d'énoncer et de démontrer le résultat principal de ce texte, on rappelle d'abord quelques définitions et quelques notations qui seront utiles pour la suite.

Soit $k$ un corps de caractéristique nulle. Fixons une clôture algébrique $\overline{k}$ de $k$. Dans tout le texte, si $Y$ est une $k$-variété, on notera $\overline{Y}$ la $\overline{k}$-variété déduite de $Y$ par extension des scalaires, i.e. $\overline{Y} := Y \times_k \overline{k}$. On notera aussi $\Gamma_k := \mathrm{Gal}(\overline{k}|k)$ le groupe de Galois absolu de $k$. Les ensembles de cohomologie considérés dans ce texte sont tous des ensembles de cohomologie étale (ou galoisienne). Tous les torseurs considérés ici seront, sauf mention explicite du contraire, des torseurs *à droite*.

On rappelle d'abord la définition de la torsion d'un torseur par un 1-cocycle (voir par exemple [6], définitions 1.7 et 1.8) :

**Définition 1.** *Soit $G$ un $k$-groupe algébrique, soit $\sigma \in Z^1(k, G)$ un 1-cocycle.*

- *Le $k$-groupe algébrique $G^\sigma$ est la $k$-forme intérieure de $G$ obtenue en quotientant $\overline{G}$ par l'action tordue de $\Gamma_k$ définie par $(\gamma, \overline{g}) \mapsto \sigma_\gamma({}^\gamma\overline{g})\sigma_\gamma^{-1}$ pour tout $\gamma \in \Gamma_k$ et tout $\overline{g} \in \overline{G}$.*

– *Soit $f : Y \xrightarrow{G} X$ un $X$-torseur (à droite) sous $G$. On suppose que $Y$ est une $k$-variété quasi-projective. Alors la forme tordue de $f$ par $\sigma$ est la $k$-variété quotient $Y^\sigma$ de $\overline{Y}$ par l'action de $\Gamma_k$ définie par $(\gamma, \overline{y}) \mapsto^\gamma \overline{y}.\sigma_\gamma^{-1}$. Cette variété est munie d'un morphisme canonique $Y^\sigma \to X$ qui munit $Y^\sigma$ d'une structure de $X$-torseur (à droite) sous $G^\sigma$.*

Dans le cas où $k$ est un corps de nombres et $X$ est une $k$-variété projective, cette définition permet ensuite de définir les ensembles $X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{desc}}$ et $X(\mathbf{A}_k)^{\text{ét, Br}}$ comme dans l'introduction (on notera que dans la construction de ces ensembles, les hypothèses de la définition 1 sont vérifiés, à savoir que les torseurs considérés sont quasi-projectifs).

Dans la preuve du résultat principal, on va utiliser quelques notions de cohomologie non-abélienne. On rappelle ici quelques définitions sur le sujet. Pour davantage de précisions, on pourra consulter [4] section 1, ou [1].

On commence par définir un automorphisme semi-linéaire (voir [6], définition 1.1) : soit $\overline{f} : \overline{Y} \to \operatorname{Spec} \overline{k}$ une $\overline{k}$-variété. Soit $\varphi \in \operatorname{Aut}(\overline{Y}/k)$. L'automorphisme $\varphi$ est dit *semi-linéaire* s'il existe un élément (nécessairement unique) $\gamma \in \Gamma_k$ tel que $\overline{f} \circ \varphi = (\gamma^*)^{-1} \circ \overline{f}$, où $\gamma^* : \operatorname{Spec} \overline{k} \to \operatorname{Spec} \overline{k}$ est induit par l'action de $\gamma$ sur $\overline{k}$. On notera $\operatorname{SAut}(\overline{Y}/k)$ le groupe des automorphismes semi-linéaires de $\overline{Y}$. On notera aussi $q : \operatorname{SAut}(\overline{Y}/k) \to \Gamma_k$ le morphisme défini par $q(\varphi) = \gamma$. Enfin, si $\overline{Y}$ est un $\overline{k}$-groupe algébrique, on notera $\operatorname{SAut}^{\mathrm{gr}}(\overline{Y}/k)$ le groupe des automorphismes semi-linéaires compatibles avec la structure de groupe, et $\operatorname{SOut}(\overline{Y}/k)$ le quotient de $\operatorname{SAut}^{\mathrm{gr}}(\overline{Y}/k)$ par le sous-groupe $\operatorname{Int}(\overline{Y})$ des automorphismes intérieurs de $\overline{Y}$ (de même, on note $\operatorname{Out}(\overline{Y}/k)$ le quotient du groupe $\operatorname{Aut}^{\mathrm{gr}}(\overline{Y}/k)$ (formés des éléments de $\operatorname{Aut}(\overline{Y}/k)$ respectant la structure de groupe) par les automorphismes intérieurs).

Plus généralement, si $X$ une $k$-variété, $\overline{Y}$ une $\overline{k}$-variété, et $\overline{Y} \to \overline{X}$ un morphisme, on définit $\operatorname{SAut}(\overline{Y}/X) := \operatorname{Aut}(\overline{Y}/X) \cap \operatorname{SAut}(\overline{Y}/k)$ (voir [6], définition 1.3). Enfin, ces groupes d'automorphismes linéaires sont munies d'une topologie faible (voir [6], définition 1.3), et on munit l'ensemble $\overline{Y}(\overline{k})$ de la topologie discrète.

On peut alors définir la notion de $k$-lien : si $\overline{G}$ est un $\overline{k}$ groupe algébrique, un *$k$-lien* sur $\overline{G}$ est un morphisme de groupes $\kappa : \Gamma_k \to \operatorname{SOut}(\overline{G}/k)$ qui scinde le morphisme $\operatorname{SOut}(\overline{G}/k) \to \Gamma_k$ et qui se relève en une section continue du morphisme $q : \operatorname{SAut}^{\mathrm{gr}}(\overline{G}/k) \to \Gamma_k$. Par exemple, si $\overline{G}$ est commutatif, la donnée d'un $k$-lien sur $\overline{G}$ équivaut à la donnée d'une section de $q$ qui soit un morphisme de groupes, ce qui équivaut à la donnée d'une $k$-forme de $\overline{G}$. À l'aide de ces notions, on peut enfin définir un $H^2$ non-abélien en termes de cocycles :

**Définition 2.** *Soit $L := (\overline{G}, \kappa)$ un $k$-lien sur un $\overline{k}$-groupe algébrique $\overline{G}$.*

– *Un 2-cocycle à coefficients dans $L$ est un couple $(f, g)$ d'applications continues $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \Gamma_k & \longrightarrow & \operatorname{SAut}(\overline{G}/k) \\ s & \longmapsto & f_s \end{array} \right.$ et $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \Gamma_k \times \Gamma_k & \longrightarrow & \overline{G}(\overline{k}) \\ (s,t) & \longmapsto & g_{s,t} \end{array} \right.$ vérifiant les* *conditions suivantes :*

$$\begin{cases} f \bmod \mathrm{Int}(\overline{G}) = \kappa \\ f_s \circ f_t = \mathrm{int}(g_{s,t}) \circ f_{st} \\ f_s(g_{t,u}) g_{s,tu} = g_{s,t} g_{st,u} \end{cases}$$

*On note $Z^2(k, L)$ l'ensemble des 2-cocycles à coefficients dans $L$.*

– *Deux 2-cocycles $(f, g)$ et $(f', g')$ sont dits équivalents s'il existe une application continue $h : \Gamma_k \to \overline{G}(\overline{k})$ telle que*

$$\begin{cases} f'_s &= \mathrm{int}(h_s) \circ f_s \\ g'_{s,t} &= h_s f_s(h_t) g_{s,t} h_{st}^{-1} \end{cases}$$

*La classe d'équivalence d'un élément $(f, g) \in Z^2(k, L)$ est notée $[(f, g)]$. L'ensemble des classes d'équivalence est noté $H^2(k, L)$.*

– *Un 2-cocycle $(f, g)$ est dit neutre si $g_{s,t} = 1$ pour tout $s, t \in \Gamma_k$. Une classe $\alpha \in H^2(k, L)$ est dite neutre si elle est représentée par un 2-cocycle neutre.*

En particulier, si $\overline{G}$ est commutatif, et si $L$ est un $k$-lien sur $\overline{G}$, $H^2(k, L)$ s'identifie au groupe abélien usuel $H^2(k, G)$ où $G$ est la $k$-forme de $\overline{G}$ associée au $k$-lien $L$.

Pour finir, on rappelle la définition du type d'un torseur sous un tore (voir par exemple [11], section 2.3) : soit $T$ un $k$-tore, $M := \mathrm{Hom}_{\overline{k}-\mathrm{groupes}}(\overline{T}, \overline{\mathbf{G}_m})$ son module des caractères et $Y \xrightarrow{T} X$ un $X$-torseur sous $T$. On appelle *type* du torseur $Y \to X$ le morphisme $\lambda : M \to \mathrm{Pic}(\overline{X})$ défini de la façon suivante : si $\chi : \overline{T} \to \overline{\mathbf{G}_m}$ est un élément de $M$, $\lambda(\chi)$ est la classe dans $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ du $\overline{X}$-torseur sous $\overline{\mathbf{G}_m}$ obtenu en poussant en avant le torseur $Y \xrightarrow{T} X$ par le caractère $\chi : \overline{T} \to \overline{\mathbf{G}_m}$.

## 2.2 Énoncé du résultat et structure de la preuve

L'objectif de ce texte est donc de prouver le théorème suivant :

**Théorème 1.** *Soit $k$ un corps de nombres, soit $X$ une $k$-variété propre, lisse et géométriquement intègre. Alors $X(\mathbf{A}_k)^{\text{ét, Br}} \subset X(\mathbf{A}_k)^{\text{desc}}$.*

Comme mentionné dans l'introduction, ce résultat permet de répondre à la question posée par Poonen dans [8] :

**Corollaire 2.** *Soit $k$ un corps de nombres, soit $X/k$ la variété construite par Poonen dans [8]. Alors $X$ est un contrexemple au principe de Hasse qui ne peut être expliqué par l'obstruction de descente, c'est-à-dire que l'on a $X(\mathbf{A}_k)^{\text{desc}} \neq \emptyset$ alors que $X(k) = \emptyset$.*

**Preuve du théorème 1** Soit $(P_v) \in X(\mathbf{A}_k)^{\text{ét, Br}}$. Soit $G$ un $k$ groupe algébrique linéaire. On se donne un $X$-torseur sous $G$ :

$$f : Y \to X$$

L'objectif est de montrer que le point $(P_v)$ se relève en un point de $Y^\tau(\mathbf{A}_k)$, pour un certain cocycle $\tau$ à valeurs dans $G$. On remarque que dans le cas extrême où $G$ est fini, ce résultat est évident puisque $(P_v) \in X(\mathbf{A}_k)^{\text{ét, Br}}$, et dans l'autre cas extrême où $G$ est connexe, c'est un résultat de Harari (voir [5], théorème 2 (2)) en utilisant l'inclusion évidente $X(\mathbf{A}_k)^{\text{ét, Br}} \subset X(\mathbf{A}_k)^{\text{Br}}$. Le point clé de la preuve du théorème 1 va consister à ramener en quelque sorte le cas général au cas connexe et au théorème 2 (2) de [5], grâce à la proposition 4 qui suit.

On commence par rappeler un résultat de Stoll :

**Lemme 3** (Stoll)**.** *Soit $X$ une $k$-variété projective lisse géométriquement intègre. Soit $(P_v) \in X(\mathbf{A}_k)^{\text{ét, Br}}$ et soit $g : Z \xrightarrow{F} X$ un $X$-torseur sous un $k$-groupe fini $F$. Alors il existe un $k$-groupe fini $F'$, un cocycle $\sigma \in Z^1(k, F)$, un $X$-torseur $X' \xrightarrow{F'} X$, un morphisme $p : F' \to F^\sigma$ et un morphisme $\psi : X' \to Z^\sigma$ faisant commuter le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd}
X' \times_X F' \arrow[r, "\psi \times p"] \arrow[d] & Z \times_X F^\sigma \arrow[d] \\
X' \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & Z^\sigma \arrow[d] \\
X \arrow[r, "="] & X
\end{tikzcd}$$

*et tels que la variété $X'$ soit géométriquement intègre et $(P_v)$ se relève en un point $(Q'_v) \in X'(\mathbf{A}_k)^{\text{Br}}$.*

*Démonstration :* On considère le $\overline{X}$-torseur $\overline{Z} \xrightarrow{\overline{F}} \overline{X}$. Suivant Stoll (voir la remarque précédant le lemme 5.6, ainsi que la preuve du lemme 5.7 dans [13]), il existe un $k$-groupe fini $F'$, un $X$-torseur $X' \xrightarrow{F'} X$ avec $X'$ connexe (sur $k$), un morphisme de groupes $\overline{F'} \to \overline{F}$ et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\overline{X'} \arrow[rr, "\overline{\psi}"] \arrow[dr, "\overline{F'}"'] & & \overline{Z} \arrow[dl, "\overline{F}"] \\
& \overline{X} &
\end{tikzcd}$$

de sorte que le morphisme $\overline{\psi}$ soit compatible aux actions respectives de $\overline{F'}$ sur $\overline{X'}$ et $\overline{F}$ sur $\overline{Z}$. Quitte à tordre $X' \to X$, on peut supposer que $(P_v)$ se relève dans

$X'(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}}$ (puisque $(P_v) \in X(\mathbf{A}_k)^{\text{ét, Br}}$). Dans ce cas, par le lemme 5.5 de [13], la variété $X'$ est géométriquement intègre. On applique alors le lemme 5.6 de [13] : il existe un cocycle $\sigma \in Z^1(k, F)$, un morphisme de $k$-groupes algébriques $F' \to F^\sigma$ et un morphisme $\psi$ s'insérant dans le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "F'"'] & & Z^\sigma \arrow[dl, "F^\sigma"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

et tel que $\psi$ soit compatible aux actions de $F'$ et $F^\sigma$, via le morphisme $F' \to F^\sigma$. Cela conclut la preuve du lemme. □

Le point principal de la preuve du théorème 1 est résumé dans la proposition suivante, qui sera démontrée dans la section suivante :

**Proposition 4.** *Soit $X$ une $k$-variété projective lisse géométriquement intègre. Soit $(P_v) \in X(\mathbf{A}_k)^{\text{ét, Br}}$ et soit $f : Y \xrightarrow{G} X$ un $X$-torseur sous un $k$-groupe algébrique linéaire $G$. Soit*

$$1 \to H \to G \to F \to 1$$

*une suite exacte de $k$-groupes linéaires, avec $H$ connexe et $F$ fini. On note $Z \xrightarrow{F} X$ le poussé en avant de $Y \to X$ par le morphisme $G \to F$. Soit alors $\sigma \in Z^1(k, F)$ un 1-cocycle donné par le lemme 3 appliqué au torseur $Z \to X$ et au point $(P_v)$.*

*Alors la classe $[\sigma] \in H^1(k, F)$ se relève en une classe $[\tau] \in H^1(k, G)$.*

**La proposition 4 implique le théorème 1** Supposons la proposition 4 démontrée, et déduisons-en le théorème 1. Soit $(P_v) \in X(\mathbf{A}_k)^{\text{ét, Br}}$. Soit $G$ un $k$ groupe algébrique linéaire. On note $H := G^\circ$ sa composante neutre. On a une suite exacte de groupes algébriques

$$1 \to H \to G \to F \to 1$$

$F$ étant un $k$-groupe algébrique fini, et $H$ étant linéaire connexe. On se donne un $X$-torseur sous $G$ :

$$f : Y \to X$$

On peut décomposer ce torseur en deux torseurs, l'un sous le groupe connexe $H$ et l'autre sous le groupe fini $F$ : on a un dessin de la forme

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "H"] \arrow[dd, bend left, "G"] \\ Z \arrow[d, "F"] \\ X \end{tikzcd}$$

L'objectif est de montrer que le point $(P_v)$ se relève en un point de $Y^\tau(\mathbf{A}_k)$, pour un certain cocycle $\tau$ à valeurs dans $G$.

On applique la proposition 4 au torseur $f : Y \xrightarrow{G} X$, au point $(P_v)$ et à la suite exacte $1 \to H \to G \to F \to 1$. On obtient alors un cocycle $\sigma \in Z^1(k, F)$ et un diagramme

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "F'"'] & & Z^\sigma \arrow[dl, "F^\sigma"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

satisfaisant les propriétés du lemme 3, et par la proposition 4, on sait que la classe $[\sigma] \in H^1(k, F)$ ainsi définie se relève en une classe $[\tau] \in H^1(k, G)$. On considère alors le $X$-torseur tordu $Y^\tau \xrightarrow{G^\tau} X$. Ce torseur est naturellement muni d'une structure de $Z^\sigma$-torseur sous $H^\tau$, c'est-à-dire que l'on a un dessin de la forme :

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d, "H^\tau"] & Y^\tau \arrow[d, "H^\tau"] \arrow[dd, bend left, "G^\tau"] \\ X' \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "F'"] & Z^\sigma \arrow[d, "F^\sigma"] \\ X \arrow[r, "="] & X \end{tikzcd}$$

où $R$ est défini comme le produit fibré de $X'$ et $Y^\tau$ au-dessus de $Z^\sigma$.

Le groupe $H^\tau$ étant une $k$-forme de $H$, il est linéaire connexe. On peut donc lui appliquer le théorème 2 (2) de [5] (on rappelle que $X'$ est géométriquement intègre), à savoir que l'ensemble $X'(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}}$ est contenu dans l'ensemble de descente du torseur $R \xrightarrow{H^\tau} X'$, donc en particulier le point $(Q'_v) \in X'(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}}$ est l'image d'un point $(R'_v) \in R^\mu(\mathbf{A}_k)$ pour un certain $[\mu] \in H^1(k, H^\tau)$. Poussons alors le point $(R'_v)$ dans $(Y^\tau)^\mu$. On obtient ainsi un point $(R_v) \in (Y^\tau)^\mu(\mathbf{A}_k)$ au-dessus de $(Q_v) := (\psi(Q'_v))$. Cela signifie qu'il existe une classe globale $a \in H^1(k, H^\tau)$ telle que $a_v = [R](Q'_v)$, i.e. $a_v = [Y^\tau](Q_v)$ dans $H^1(k_v, H^\tau)$ pour toute place $v$, ce qui implique que $b_v = [Y^\tau](P_v)$ dans $H^1(k_v, G^\tau)$, où $b \in H^1(k, G^\tau)$ est l'image de $a$ (en effet, $(Q_v)$ relève $(P_v)$ dans $Z^\sigma(\mathbf{A}_k)$). On applique alors la bijection de torsion par $\tau$, $t_\tau : H^1(k, G^\tau) \to H^1(k, G)$ (voir par exemple [9], section I.5.3), et on obtient une classe $c := t_\tau(b) \in H^1(k, G)$ telle que $c_v = [Y](P_v)$ dans $H^1(k_v, G)$ pour toute place $v$ de $k$, c'est-à-dire que $(P_v) \in X(\mathbf{A}_k)^f = \bigcup_{[\nu] \in H^1(k,G)} f^\nu(Y^\nu(\mathbf{A}_k))$ (voir la première remarque de l'introduction), ce qui conclut la preuve du théorème 1. On a donc démontré le théorème 1, en admettant la proposition 4. □

# 3 Preuve de la proposition 4

On se place sous les hypothèses de la proposition 4, avec les mêmes notations. Pour tout $k$-groupe algébrique linéaire connexe $H$, on notera $H^{\mathrm{red}}$ le quotient de $H$ par son radical unipotent $R_u(H)$, $H^{\mathrm{ss}}$ le sous-groupe dérivé de $H^{\mathrm{red}}$, et $H^{\mathrm{tor}}$ le quotient de $H^{\mathrm{red}}$ par $H^{\mathrm{ss}}$. Ainsi, $H^{\mathrm{red}}$ est un groupe réductif (connexe), $H^{\mathrm{ss}}$ est un groupe semi-simple et $H^{\mathrm{tor}}$ est un $k$-tore.

Considérons pour commencer la suite exacte de la proposition 4 :

$$1 \to H \to G \to F \to 1$$

En quotientant $H$ et $G$ par le radical unipotent de $H$, puis en quotientant à nouveau par le sous-groupe dérivé $H^{\mathrm{ss}}$ ($R_u(G)$ et $H^{\mathrm{ss}}$ sont des sous-groupes caractéristiques de $H$ et $H^{\mathrm{red}}$ respectivement), on obtient le diagramme exact suivant :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & H \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] \arrow[d, "="] & 1 \\
0 \arrow[r] & H^{\mathrm{tor}} \arrow[r] & G' \arrow[r] & F \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Dans toute la suite, on notera $T := H^{\mathrm{tor}}$ le quotient torique de $H$.

Le groupe $T$ étant abélien, la suite exacte ainsi obtenue induit une action par conjugaison de $F$ sur $T$. On peut donc faire agir $\Gamma_k$ sur $T(\overline{k})$ via le cocycle $\sigma$, et on obtient ainsi l'action tordue suivante : $\gamma.h := \widetilde{\sigma_\gamma}.{}^\gamma h.\widetilde{\sigma_\gamma}^{-1}$ pour $\gamma \in \Gamma_k$ et $h \in T(\overline{k})$, $\widetilde{\sigma_\gamma}$ désignant un relevé quelconque de $\sigma_\gamma$ dans $G'$. On notera alors $T^\sigma$ le $k$-tore ainsi obtenu, en tordant $T$ par cette action de $\sigma$.

Voyons désormais le cocycle $\sigma$ (défini dans l'énoncé de la proposition 4, à partir du lemme 3) comme un espace principal homogène (à droite) de $F$ sur $k$, que l'on notera $U \xrightarrow{F} \mathrm{Spec}\ k$. La $k$-variété $U$ est définie de la façon suivante : $U(\overline{k}) := F(\overline{k})$ et l'action de $\Gamma_k$ sur $U(\overline{k})$ est donnée par $(\gamma, f) \mapsto \sigma_\gamma.({}^\gamma f)$ pour $\gamma \in \Gamma_k$ et $f \in U(\overline{k}) = F(\overline{k})$, le produit désignant le produit dans le groupe $F(\overline{k})$. La variété $U$ est ainsi un $k$-torseur (à droite) sous $F$, dont la classe dans $H^1(k, F)$ est exactement $[\sigma]$. Le morphisme quotient $G \to F$ munit $U$ d'une structure d'espace homogène de $G$ sur $k$, à stabilisateur géométrique connexe $\overline{H}$.

Dans une telle situation, Springer a construit un $k$-lien $\kappa_\sigma$ sur $\overline{H}$ et une classe $\eta_\sigma \in H^2(k, \kappa_\sigma)$ associés à l'espace homogène $U$. On rappelle brièvement cette construction (voir par exemple [4] (5.1) ou [1], 7.7) : on fixe un point $u_0 \in U(\overline{k})$ (dans toute la suite, on choisira pour $u_0$ le point de $U(\overline{k})$ correspondant au neutre $1 \in F(k)$), son stabilisateur dans $\overline{G}$ est le sous-groupe $\overline{H}$. Il existe alors une application localement constante

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_k & \longrightarrow & \overline{G}(\overline{k}) \\ \gamma & \longmapsto & g_\gamma \end{array}$$

telle que pour tout $\gamma \in \Gamma_k$, on ait ${}^\gamma u_0 = u_0.g_\gamma$. On vérifie alors que pour $\gamma \in \Gamma_k$, l'application $\mathrm{int}(g_\gamma) \circ \gamma^*$ est un automorphisme semi-linéaire de $\overline{G}$ qui laisse $\overline{H}$ invariant. On note $f_\gamma$ sa restriction à $\overline{H}$ : $f_\gamma \in \mathrm{SAut}^{\mathrm{gr}}(\overline{H}/k)$. Alors l'application $\kappa_\sigma : \gamma \mapsto f_\gamma \mod \mathrm{Int}(\overline{H})$ définit un $k$-lien sur $\overline{H}$, et si $g_{\gamma,\tau} := g_\gamma({}^\gamma g_\tau)g_{\gamma\tau}^{-1}$, la classe de Springer $\eta_\sigma$ est par définition la classe du 2-cocycle $(f, g)$ dans $H^2(k, \kappa_\sigma)$. La principale propriété de la classe $\eta_\sigma$ est la suivante (voir [4] section (5.1) ) : $\eta_\sigma$ est neutre dans $H^2(k, \kappa_\sigma)$ si et seulement si l'espace homogène $U$ de $G$ est dominé par un espace principal homogène de $G$, i.e. si et seulement si il existe un espace principal homogème $V$ de $G$ et un morphisme $V \to U$ qui est $G$-équivariant. En particulier, $\eta_\sigma$ est neutre si et seulement si $[\sigma] \in H^1(k, F)$ se relève dans $H^1(k, G)$.

Suivant Borovoi (voir [1], 6.1.2.), on dispose alors des morphismes d'abélianisation suivants :

$$H^2(k, \kappa_\sigma) \xrightarrow{\mathrm{ab}^2} H^2_{\mathrm{ab}}(k, \kappa_\sigma) \xrightarrow{t_{\mathrm{ab}}} H^2(k, S^\sigma)$$

où $S^\sigma$ est la $k$-forme de $\overline{T}$ canoniquement associée au $k$-lien sur $\overline{T}$ induit par le lien $\kappa_\sigma$. On notera $\eta'_\sigma \in H^2(k, S^\sigma)$ l'image de $\eta_\sigma$ par la composée de ces morphismes. On dispose alors du lemme suivant :

**Lemme 5.** *Sous les hypothèses de la proposition 4, et avec les notations précédentes :*

1. *La classe de Springer $\eta_\sigma \in H^2(k, \kappa_\sigma)$ associée au cocycle $\sigma$ est une classe localement neutre en toute place $v$ de $k$.*
2. *Les $k$-tores $S^\sigma$ et $T^\sigma$ sont isomorphes.*

**Preuve du lemme 5**

1. Pour toute place $v$ de $k$, le fait que $Z^\sigma$ admette un $k_v$-point $Q_v$ assure que $[\sigma_v] \in H^1(k_v, G)$ coïncide avec la classe de $[Z](P_v)$. Or cette dernière est l'image de $[Y](P_v) \in H^1(k_v, G)$, donc $[\sigma_v]$ se relève dans $H^1(k_v, G)$, donc $(\eta_\sigma)_v \in H^2(k_v, \kappa_\sigma)$ est une classe neutre.
2. Revenons à la construction de $S^\sigma$ : on fixe $u_0 \in U(\overline{k})$, correspondant à l'élément neutre $1 \in F(\overline{k}) = U(\overline{k})$, et pour tout $\gamma \in \Gamma_k$, un point $g_\gamma \in \overline{G}$ tel que ${}^\gamma u_0 = u_0.g_\gamma$ dans $\overline{U}$, de sorte que l'application $\gamma \mapsto g_\gamma$ soit localement constante. Le lien $\kappa_\sigma$ induit, via la surjection $H \to T$, un $k$-lien $\kappa'_\sigma$ sur $\overline{T}$, défini par la formule suivante :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_k & \longrightarrow & \mathrm{SAut}^{\mathrm{gr}}(\overline{T}/k) \\ \gamma & \longmapsto & (\overline{h} \mapsto \overline{g_\gamma.({}^\gamma h).g_\gamma^{-1}}) \end{array}$$

où pour tout élément $h \in H$, $\overline{h}$ désigne son image dans $T$. Ce morphisme définit la $k$-forme $S^\sigma$, alors que $T^\sigma$ est quant à lui défini par le morphisme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_k & \longrightarrow & \mathrm{SAut}^{\mathrm{gr}}(\overline{T}/k) \\ \gamma & \longmapsto & (\overline{h} \mapsto \overline{\widetilde{\sigma_\gamma}.({}^\gamma h).\widetilde{\sigma_\gamma}^{-1}}) \end{array}$$

Il suffit donc de vérifier que pour tout $\gamma \in \Gamma_k$, $g_\gamma \in \overline{G}$ s'envoie sur $\sigma_\gamma \in \overline{F}$ par le morphisme quotient $G \xrightarrow{\pi} F$. Or ceci est clair par la formule qui définit les $g_\gamma$ : on a ${}^\gamma u_0 = \sigma_\gamma.1 = \sigma_\gamma$ dans $F(\overline{k})$ (c'est la définition de l'action de $\Gamma_k$ sur $\overline{U}$, sachant que $1 \in F(k)$), et par ailleurs ${}^\gamma u_0 = u_0.g_\gamma = 1.\pi(g_\gamma) = \pi(g_\gamma)$ dans $F(\overline{k})$ (le premier produit est l'action de $G$ sur $U$ et le second est le produit dans $F(\overline{k})$). Cette formule assure que $\pi(g_\gamma) = \sigma_\gamma$, ce qui prouve le k-isomorphisme $S^\sigma \cong T^\sigma$.

□

En résumé, on donc montré que la classe de Springer $\eta_\sigma \in H^2(k, \kappa_\sigma)$ s'envoyait par la flèche d'abélianisation sur $\eta'_\sigma \in Ш^2(k, T^\sigma)$, où

$$Ш^2(k, T^\sigma) := \left\{ \alpha \in H^2(k, T^\sigma) : \alpha_v = 0 \in H^2(k_v, T^\sigma) \text{ pour tout place } v \text{ de } k \right\}$$

On cherche désormais à identifier cette classe $\eta'_\sigma$. Pour cela, on remarque que le torseur $Y \xrightarrow{H} Z$ fournit un torseur intermédiaire $W \xrightarrow{T} Z$ après quotient par le sous-groupe dérivé de $H$. On note $\lambda : M \to \mathrm{Pic}(\overline{Z})$ le type de ce torseur, où $M$ désigne le module des caractères du tore $T = H^{\mathrm{tor}}$ (voir section 2.1, ou [11] section 2.3, pour la définition du type d'un torseur sous un tore). L'application $\lambda$ est un morphisme de $\Gamma_k$-modules. Notons $M^\sigma$ le module des caractères du tore $T^\sigma$. Alors $M$ et $M^\sigma$ (resp. $\mathrm{Pic}(\overline{Z})$ et $\mathrm{Pic}(\overline{Z^\sigma})$) sont isomorphes comme groupes abéliens. Donc $\lambda$ induit un morphisme de groupes abéliens $\lambda^\sigma : M^\sigma \to \mathrm{Pic}(\overline{Z^\sigma})$.

**Lemme 6.** *Sous les hypothèses de la proposition 4, et avec les mêmes notations, l'application* $\lambda^\sigma : M^\sigma \to \mathrm{Pic}(\overline{Z^\sigma})$ *est un morphisme de* $\Gamma_k$*-modules.*

**Preuve du lemme 6** Le groupe $\overline{F}$ agit sur $\overline{T}$, sur $M$, sur $\overline{Z}$ et sur $\mathrm{Pic}(\overline{Z})$ de la façon suivante :
- $F$ agit à gauche sur $T$ par conjugaison : $(f, t) \mapsto gtg^{-1}$.
- $F$ agit à gauche sur $M$ via : $(f, \chi) \mapsto (f.\chi : t \mapsto \chi(g^{-1}tg))$.
- $F$ agit à droite sur $Z$ via la structure de $X$-torseur sous $F$ dont est muni $Z$.
- $F$ agit à gauche sur $\mathrm{Pic}(\overline{Z})$ via l'action précénte : si $f : \overline{Z} \to \overline{Z}$ désigne l'action de $f \in F$ sur $\overline{Z}$, et si $L \in \mathrm{Pic}(\overline{Z})$, alors $f.L := f^*L$.

Montrons alors que pour ces actions naturelles, le morphisme $\lambda : M \to \mathrm{Pic}(\overline{Z})$ est $\overline{F}$-équivariant.

Soit $f \in \overline{F}$, et $g \in \overline{G'}$ relevant $f$. On a alors un diagramme commutatif de morphismes de $\overline{k}$-variétés :

$$\begin{tikzcd} \overline{W} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi"] & \overline{W} \arrow[d, "\pi"] \\ \overline{Z} \arrow[r, "f"] & \overline{Z} \end{tikzcd}$$

les morphismes horizontaux étant les actions naturelles de $\overline{G'}$ sur $\overline{W}$ et de $\overline{F}$ sur $\overline{Z}$. Ce diagramme induit un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\overline{W} \times_{\overline{Z}} \mathbf{G}_{m,\overline{Z}} \arrow[r, "g"] \arrow[d] & \overline{W} \times_{\overline{Z}} \mathbf{G}_{m,\overline{Z}} \arrow[d] \\
\overline{W} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi"] & \overline{W} \arrow[d, "\pi"] \\
\overline{Z} \arrow[r, "f"] & \overline{Z}
\end{tikzcd}$$

l'action sur $\mathbf{G}_{m,\overline{Z}}$ étant induite par le morphisme $\overline{Z} \xrightarrow{f} \overline{Z}$ et l'identité sur $\mathbf{G}_{m,\overline{k}}$.

Soit alors $\chi \in M$ un caractère de $\overline{T}$. On dispose de deux actions à gauche de $\overline{T}$ sur la variété $\overline{W} \times_{\overline{Z}} \mathbf{G}_{m,\overline{Z}}$ : la première est l'action classique, à savoir $t._{\chi}(w,\mu) := (w.t^{-1}, \chi(t)\mu)$, la seconde étant l'action "tordue" par $f$, à savoir l'action associée au caractère $f.\chi$ : $t._{f.\chi}(w,\mu) := (w.t^{-1}, (f.\chi)(t).\mu)$, où l'action de $F$ sur $M$ est celle définie plus haut : $(f.\chi)(t) := \chi(g^{-1}.t.g)$. Si l'on quotiente $\overline{W} \times_{\overline{Z}} \mathbf{G}_{m,\overline{Z}}$ par la première action de $\overline{T}$, on obtient un torseur à droite $\overline{W}_{\chi} \xrightarrow{\mathbf{G}_m} \overline{Z}$ dont la classe dans $\mathrm{Pic}(\overline{Z})$ est par définition le type du torseur $\overline{W} \xrightarrow{\overline{T}} \overline{Z}$ évalué en $\chi$, i.e. $\lambda(\chi)$ (voir par exemple [11], lemme 2.3.1 (i)). De même, quand on quotiente $\overline{W} \times_{\overline{Z}} \mathbf{G}_{m,\overline{Z}}$ par la seconde action de $\overline{T}$ (tordue par $f$), on obtient un torseur $\overline{W}_{f.\chi} \xrightarrow{\mathbf{G}_m} \overline{Z}$, dont la classe est exactement $\lambda(f.\chi)$.

Considérons alors le morphisme $\phi = g : \overline{W} \times_{\overline{Z}} \mathbf{G}_{m,\overline{Z}} \to \overline{W} \times_{\overline{Z}} \mathbf{G}_{m,\overline{Z}}$ introduit précédemment. On vérifie aisément la formule suivante :

$$\phi(t._{f.\chi}(w,\mu)) = (g^{-1}.t.g)._{\chi}\phi(w,\mu) = (f^{-1}.t)._{\chi}\phi(w,\mu)$$

où les actions de $\overline{T}$ dans les deux membres de l'égalité sont les deux actions définies plus haut. Cette formule assure que le morphisme $\phi$ passe au quotient par les actions respectives de $\overline{T}$ au départ et à l'arrivée. Donc $\phi$ induit un morphisme

$$\widetilde{\phi} : \overline{W}_{f.\chi} \to \overline{W}_{\chi}$$

et on vérifie que ce morphisme s'inscrit dans le diagramme cartésien suivant :

$$\begin{tikzcd}
\overline{W}_{f.\chi} \arrow[r, "\widetilde{\phi}"] \arrow[d, "\mathbf{G}_m"] & \overline{W}_{\chi} \arrow[d, "\mathbf{G}_m"] \\
\overline{Z} \arrow[r, "f"] & \overline{Z}
\end{tikzcd}$$

qui assure que la classe $[\overline{W}_{f.\chi}]$ du torseur $\overline{W}_{f.\chi} \xrightarrow{\mathbf{G}_m} \overline{Z}$ dans le groupe de Picard de $\overline{Z}$ s'obtient en faisant agir $f$ sur la classe $[\overline{W}_\chi]$ du torseur $\overline{W}_\chi \xrightarrow{\mathbf{G}_m} \overline{Z}$, c'est-à-dire que l'on a bien la relation $[\overline{W}_{f.\chi}] = f^*[\overline{W}_\chi]$, ce qui se réécrit

$$\lambda(f.\chi) = f.\lambda(\chi)$$

i.e. $\lambda$ est $\overline{F}$-équivariant.

On conclut la preuve du lemme 6 de la façon suivante : pour tout $\gamma \in \Gamma_k$, on note ${}^{\gamma\prime}m$ l'action de $\gamma$ sur $M^\sigma$ et $\mathrm{Pic}(\overline{Z^\sigma})$, et ${}^{\gamma}m$ l'action de $\gamma$ sur $M$ et $\mathrm{Pic}(\overline{Z})$. On a alors $\lambda({}^{\gamma\prime}\chi) = \lambda(({}^{\gamma}\chi) \circ \mathrm{int}(\sigma_\gamma^{-1})) = \lambda(\sigma_\gamma.({}^{\gamma}\chi))$ par définition (où $\mathrm{int}(a) : t \mapsto ata^{-1}$). Or par la $\overline{F}$-équivariance de $\lambda$, on a la relation $\lambda(\sigma_\gamma.({}^{\gamma}\chi)) = \sigma_\gamma.\lambda({}^{\gamma}\chi)$, et enfin $\lambda$ est Galois-équivariant pour l'action non-tordue, i.e. $\lambda({}^{\gamma}\chi) = {}^{\gamma}\lambda(\chi)$, d'où $\sigma_\gamma.\lambda({}^{\gamma}\chi) = \sigma_\gamma.{}^{\gamma}\lambda(\chi) = {}^{\gamma\prime}\lambda(\chi)$, donc en conclusion, on a bien montré que

$$\lambda({}^{\gamma\prime}\chi) = {}^{\gamma\prime}\lambda(\chi)$$

ce qui prouve le lemme 6. □

**Remarque.** Ce lemme est à rapprocher de la preuve de la proposition 2.5. de [7].

On déduit de ce $\Gamma_k$-morphisme $\lambda^\sigma$ un nouveau morphisme de $\Gamma_k$-modules, noté $\lambda' : M^\sigma \to \mathrm{Pic}(\overline{X'})$, obtenu en composant $\lambda^\sigma$ avec le morphisme naturel $\mathrm{Pic}(\overline{Z^\sigma}) \to \mathrm{Pic}(\overline{X'})$. Puisque $\overline{k}[X']^* = \overline{k}^*$ (en effet, $X'$ est géométriquement intègre par construction, et $X$ est propre, $X' \to X$ est étale, donc $X'$ est propre), ce morphisme définit un élément $\partial(\lambda') \in H^2(k, T^\sigma)$ via la suite exacte de la théorie de la descente abélienne (voir par exemple [2], théorème 1.5.1, ou [11] corollaire 2.3.9) :

$$0 \to H^1(k, T^\sigma) \to H^1(X', T^\sigma) \xrightarrow{\text{type}} \mathrm{Hom}_k(M^\sigma, \mathrm{Pic}(\overline{X'})) \xrightarrow{\partial} H^2(k, T^\sigma) \tag{1}$$

On va alors identifier cet élément $\partial(\lambda')$ avec l'élément $\eta'_\sigma$ dans $H^2(k, T^\sigma)$. Remarquons également que la suite exacte

$$0 \to T \to G' \to F \to 1$$

et l'élément $[\sigma] \in H^1(k, F)$ définissent un élément $\Delta(\sigma) \in H^2(k, T^\sigma)$ qui est l'obstruction à relever $[\sigma]$ en un élément de $H^1(k, G')$ (voir [9], I.5.6).

**Lemme 7.** *Sous les hypothèses de la proposition 4, les trois classes $\partial(\lambda')$, $\Delta(\sigma)$ et $\eta'_\sigma$ coïncident (au signe près) dans $H^2(k, T^\sigma)$.*

**Le lemme 7 implique la proposition 4** On conclut la preuve de la proposition 4 de la façon suivante : par le corollaire 6.1.3.(1) de [11], les faits que $X'(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}}$ soit non-vide et que $\overline{k}[X']^* = \overline{k}^*$ assurent l'existence d'un $X'$-torseur sous $T^\sigma$ de type $\lambda'$ (il suffisait pour cela d'avoir $X'(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}_{\lambda'}} \neq \emptyset$ : voir [11] p 113 pour la définition de $\mathrm{Br}_{\lambda'}$), ce qui assure que $\partial(\lambda') = 0$ par la théorie de la descente (voir la suite exacte (1)), et donc que $\eta'_\sigma = 0$ dans $H^2(k, T^\sigma)$ par le lemme 7. Pour finir, on utilise la proposition 6.5 de [1] qui assure que la nullité de $\eta'_\sigma$ implique que la classe $\eta_\sigma \in H^2(k, \kappa_\sigma)$ est neutre (puisque $\eta_\sigma$ est neutre localement partout par le lemme 5). Cela termine la preuve de la proposition 4, puisqu'alors $U$ est dominé par un espace principal homogène de $G$, dont la classe $[\tau] \in H^1(k, G)$ s'envoie sur $[\sigma] \in H^1(k, F)$. On a donc terminé la preuve de la proposition 4, en admettant le lemme 7. □

**Preuve du lemme 7** Avant tout, fixons pour tout $\gamma \in \Gamma_k$, un élément $a_\gamma \in \overline{G'}$ relevant $\sigma_\gamma \in \overline{F}$, de sorte que l'application $\gamma \mapsto a_\gamma$ soit localement constante.

Identifions d'abord les classes $\eta'_\sigma$ et $\Delta(\sigma)$ dans $H^2(k, T^\sigma)$ : d'après l'appendice de [1], $\eta_\sigma$ est représenté par un 2-cocycle non-abélien $(f, g)$, avec $f : \Gamma_k \to \mathrm{SAut}(\overline{H})$ et $g : \Gamma_k \times \Gamma_k \to \overline{H}$. On sait alors qu'un cocyle représentant $\eta'_\sigma$ est donné par $z' : \Gamma_k \times \Gamma_k \to \overline{T^\sigma}$ tel que $z'_{s,t} = r(g_{s,t})$, où $r : H \to T$ est le morphisme quotient naturel. Or $g_{s,t} = b_s.({}^s b_t).b_{st}^{-1}$, avec $b_s \in \overline{G}$ défini par ${}^s u_0 = u_0.b_s$, $u_0 \in \overline{U}$ étant par exemple le point de $U$ correspondant au neutre de $F$. Or on a vérifié dans la preuve du second point du lemme 5 qu'alors $b_s$ s'envoie sur $\sigma_s$ dans $\overline{F}$, ce qui assure que l'image de $b_s$ dans $\overline{G'}$ est un relevé de $\sigma_s$, que l'on peut donc supposer égal à $a_s$. Cela permet d'identifier le cocycle $z'_{s,t}$ à un cocycle cohomologue au cocycle $s, t \mapsto a_s.({}^s a_t).a_{st}^{-1}$, qui est un représentant de $\Delta(\sigma)$ (voir [9], I.5.6), ce qui permet bien d'identifier $\Delta(\sigma)$ et $\eta'_\sigma$ dans $H^2(k, T^\sigma)$ (au signe près).

Construisons désormais une nouvelle classe $\mathrm{Cl}(E) \in H^2(k, T^\sigma)$ coïncidant (au signe près) avec $\partial(\lambda')$. On s'intéresse pour cela au diagramme suivant, où $\phi : \overline{Z^\sigma} \to \overline{Z}$ est un isomorphisme de schémas :

$$\begin{tikzcd}
\overline{V'} \arrow[r, "\widetilde{\psi}"] \arrow[d, "\overline{T^\sigma}"] & \overline{V} \arrow[r, "\widetilde{\phi}"] \arrow[d, "\overline{T^\sigma}"] & \overline{W} \arrow[d, "\overline{T}"] \arrow[dd, bend left, "\overline{G'}"] \\
\overline{X'} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\overline{F'}"] & \overline{Z^\sigma} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\overline{F^\sigma}"] & \overline{Z} \arrow[d, "\overline{F}"] \\
\overline{X} \arrow[r, "="] & \overline{X} \arrow[r, "="] & \overline{X}
\end{tikzcd} \tag{2}$$

les deux carrés du haut étant cartésiens (i.e. $\overline{V}$ est défini comme le produit fibré de $\overline{W}$ et $\overline{Z^\sigma}$ au-dessus de $\overline{Z}$, et $\overline{V'}$ comme le produit fibré de $\overline{W}$ et $\overline{X'}$ au-dessus de $\overline{Z}$). Alors $\widetilde{\phi}$ est un isomorphisme de $\overline{Z}$-torseurs, et les trois torseurs $\overline{W} \to \overline{Z}$, $\overline{V} \to \overline{Z^\sigma}$ et

$\overline{V'} \to \overline{X'}$ ont pour types respectifs les morphismes de $\Gamma_k$-modules $\lambda : M \to \mathrm{Pic}(\overline{Z})$, $\lambda^\sigma : M^\sigma \to \mathrm{Pic}(\overline{Z^\sigma})$ et $\lambda' : M^\sigma \to \mathrm{Pic}(\overline{X'})$. Ces morphismes étant $\Gamma_k$-équivariants (grâce au lemme 6), on peut définir suivant Harari et Skorobogatov (voir [6], section 3.3) le sous-groupe $E := \mathrm{SAut}_{T^\sigma}(\overline{V'}/X')$ de $\mathrm{SAut}(\overline{V'}/X')$ formé des automorphismes semi-linéaires $\varphi$ tels que $\varphi(\overline{y}.\overline{t}) = \varphi(\overline{y}).({}^{q(\varphi)}\overline{t})$ pour tout $\overline{y} \in \overline{Y}$ et $\overline{t} \in \overline{T}$ (l'action de $q(\varphi)$ sur $\overline{t}$ est donnée par la $k$-forme $T^\sigma$ de $\overline{T}$). Ce groupe $E$ s'intègre alors dans la suite exacte suivante

$$1 \to T^\sigma(\overline{k}) \to E \xrightarrow{q'} \Gamma_k \to 1$$

et cela permet de définir une classe $\mathrm{Cl}(E) \in H^2(k, T^\sigma)$ qui est l'obstruction à descendre le torseur $\overline{V'} \to \overline{X'}$ en un $X'$-torseur de type $\lambda'$ (voir [6], section 3.3).

Alors les deux classes $\partial(\lambda')$ et $\mathrm{Cl}(E)$ coïncident au signe près dans $H^2(k, T^\sigma)$ : c'est exactement la proposition 3.7 de [6].

Pour finir la preuve du lemme 7, on va identifier (au signe près) $\mathrm{Cl}(E)$ et $\Delta(\sigma)$. Pour cela, on a besoin du résultat suivant (pour traiter le cas où $Z$ n'est pas géométriquement intègre) :

**Lemme 8.** *Sous les hypothèses de la proposition 4, on a un diagramme commutatif exact de la forme*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \overline{T^\sigma}(\overline{Z^\sigma}) \arrow[r] \arrow[d, "\psi^*"] & \mathrm{SAut}_{T^\sigma}(\overline{V}/Z^\sigma) \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\psi^*"] & \Gamma_k \arrow[r] \arrow[d, "="] & 1 \\ 1 \arrow[r] & \overline{T^\sigma}(\overline{X'}) = \overline{T^\sigma}(\overline{k}) \arrow[r] & E = \mathrm{SAut}_{T^\sigma}(\overline{V'}/X') \arrow[r, "q'"] & \Gamma_k \arrow[r] & 1 \end{tikzcd} \qquad (3)$$

**Le lemme 8 implique le lemme 7** On suppose le lemme 8 connu. On définit une section $\gamma \mapsto \varphi_\gamma$ de $q : \mathrm{SAut}_{T^\sigma}(\overline{V}/Z^\sigma) \to \Gamma_k$ de la façon suivante : pour $\gamma \in \Gamma_k$, on construit grâce au diagramme (2) un morphisme $\varphi_\gamma$ défini par :

$$\begin{array}{ccc} \overline{V} & \longrightarrow & \overline{V} \\ v & \longmapsto & \varphi_\gamma(v) := \widetilde{\phi}^{-1}({}^\gamma\widetilde{\phi}(v).a_\gamma^{-1}) \end{array}$$

où $a_\gamma \in \overline{G'}(\overline{k})$ agit sur $\overline{W}$ grâce à la structure de $\overline{X}$-torseur sous $\overline{G'}$ de $\overline{W}$. On vérifie facilement que $\gamma \mapsto \varphi_\gamma$ définit bien une section (ensembliste) de $q$. Avec le diagramme commutatif (3), on en déduit une section $\varphi' := \psi^* \circ \varphi$ de $q' : E \to \Gamma_k$.

On calcule alors $\varphi_s.\varphi_t.\varphi_{st}^{-1} \in \overline{T^\sigma}(\overline{Z^\sigma})$. On trouve facilement (en utilisant que $\overline{\phi}$ est $\overline{T^\sigma}$-équivariant) que $\varphi_s.\varphi_t.\varphi_{st}^{-1} = a_{st}.({}^s a_t)^{-1}.a_s^{-1}$ dans $\overline{T^\sigma}(\overline{Z^\sigma})$. Appliquons maintenant $\psi^* : \overline{T^\sigma}(\overline{Z^\sigma}) \to \overline{T^\sigma}(\overline{k})$ : on obtient alors, par commutativité du diagramme (3) et par construction de $\varphi'$ à partir de $\varphi$, l'égalité ${\varphi'}_s.{\varphi'}_t.{\varphi'}_{st}^{-1} = a_{st}.({}^s a_t)^{-1}.a_s^{-1}$ dans $\overline{T^\sigma}(\overline{k})$.

Or il se trouve que le 2-cocycle $s, t \mapsto a_s.({}^s a_t).a_{st}^{-1}$ est un représentant de la classe $\Delta(\sigma)$, et donc les classes $\Delta(\sigma)$ et $\mathrm{Cl}(E)$ coïncident au signe près dans $H^2(k, T^\sigma)$.

On a donc montré que $\Delta(\sigma) = \mathrm{Cl}(E)$ au signe près dans $H^2(k, T^\sigma)$, d'où le lemme 7. On a donc démontré le lemme 7, en admettant le lemme 8. $\square$

**Preuve du lemme 8** Suivant [6], section 3.3, l'exactitude de la seconde ligne est assurée par le fait que le morphisme $\lambda'$ correspondant est $\Gamma_k$-équivariant. L'exactitude de la première ligne est due à l'existence d'une section ensembliste $\varphi$ de $q$ (voir paragraphe précédent).

La flèche $\psi^* : \overline{T^\sigma}(\overline{Z^\sigma}) \to \overline{T^\sigma}(\overline{X'})$ du lemme 8 est la flèche naturelle induite par $\psi : X' \to Z^\sigma$.

Définissons désormais la flèche $\psi^* : \mathrm{SAut}_{T^\sigma}(\overline{V}/Z^\sigma) \to \mathrm{SAut}_{T^\sigma}(\overline{V'}/X')$. Soit $\gamma \in \Gamma_k$, et $\varphi \in \mathrm{SAut}_{T^\sigma}(\overline{V}/Z^\sigma)$ tel que $q(\varphi) = \gamma$. On considère le diagramme suivant de morphismes de schémas, les flèches $\mathrm{pr}_1$, $\widetilde{\psi}$, $\psi$ et can étant les flèches apparaissant dans le diagramme (2), et $\gamma^*$ désignant l'action de Galois de $\gamma$ sur $\overline{X'}$ :

$$\begin{tikzcd} \overline{V'} \arrow[r, "\varphi\circ\widetilde{\psi}"] \arrow[d, "\gamma^{*-1}\circ\mathrm{pr}_1"'] & \overline{V} \arrow[d, "\mathrm{can}"] \\ \overline{X'} \arrow[r, "\psi"] & \overline{Z^\sigma} \end{tikzcd}$$

Ce diagramme est commutatif, puisque si $v' \in \overline{V'}$, l'image de $\varphi(\widetilde{\psi}(v'))$ dans $\overline{Z^\sigma}$ coïncide avec $\gamma^{*-1}(z)$, où $z$ est l'image de $\widetilde{\psi}(v')$ dans $\overline{Z^\sigma}$. Or le morphisme $\psi : \overline{X'} \to \overline{Z^\sigma}$ est $\Gamma_k$-équivariant, donc cela assure que le carré précédent commute. Par conséquent, par propriété universelle du produit fibré, cela définit un unique morphisme $\beta : \overline{V'} \to \overline{V'}$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} \overline{V'} \arrow[dr, "\beta"] \arrow[drr, bend left, "\varphi\circ\widetilde{\psi}"] \arrow[ddr, bend right, "(\gamma^*)^{-1}\circ\mathrm{pr}_1"'] & & \\ & \overline{V'} \arrow[r, "\widetilde{\psi}"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & \overline{V} \arrow[d, "\mathrm{can}"] \\ & \overline{X'} \arrow[r, "\psi"] & \overline{Z^\sigma} \end{tikzcd} \tag{4}$$

Ce diagramme assure que $\beta$ est un élément de $\mathrm{SAut}_{T^\sigma}(\overline{V'}/X')$, tel que $q(\beta) = \gamma$.

On a donc construit une application $\psi^* : \mathrm{SAut}_{T^\sigma}(\overline{V}/Z^\sigma) \to \mathrm{SAut}_{T^\sigma}(\overline{V'}/X')$ définie par $\psi^*(\varphi) := \beta$. C'est un morphisme de groupes par unicité du morphisme $\beta$ dans le diagramme (4), et ce morphisme est bien compatible avec $q$. Pour finir, on vérifie que l'on a bien un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \overline{T^\sigma}(\overline{Z^\sigma}) \arrow[r] \arrow[d, "\psi^*"] & \mathrm{SAut}_{T^\sigma}(\overline{V}/Z^\sigma) \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\psi^*"] & \Gamma_k \arrow[r] \arrow[d, "="] & 1 \\
1 \arrow[r] & \overline{T^\sigma}(\overline{X'}) = \overline{T^\sigma}(\overline{k}) \arrow[r] & E = \mathrm{SAut}_{T^\sigma}(\overline{V'}/X') \arrow[r, "q'"] & \Gamma_k \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

en utilisant le fait que $\widetilde{\psi} : \overline{V'} \to \overline{V}$ est $\overline{T^\sigma}$-équivariant. Cela termine la preuve du lemme 8. □

# Références


[1] Mikhail V. Borovoi, *Abelianization of the second nonabelian Galois cohomology*, Duke Math. J. **72** (1993), no. 1, 217–239.

[2] Jean-Louis Colliot-Thélène and Jean-Jacques Sansuc, *La descente sur les variétés rationnelles. II*, Duke Math. J. **54** (1987), no. 2, 375–492.

[3] A. J. de Jong, *A result of Gabber*, disponible sur www.math.columbia.edu/∼dejong/papers/2-gabber.pdf.

[4] Yuval Z. Flicker, Claus Scheiderer, and Ramdorai Sujatha, *Grothendieck's theorem on non-abelian $H^2$ and local-global principles*, J. Amer. Math. Soc. **11** (1998), no. 3, 731–750.

[5] David Harari, *Groupes algébriques et points rationnels*, Math. Ann. **322** (2002), no. 4, 811–826.

[6] David Harari and Alexei Skorobogatov, *Non-abelian cohomology and rational points*, Compositio Math. **130** (2002), no. 3, 241–273.

[7] ———, *Non-abelian descent and the arithmetic of Enriques surfaces*, Int. Math. Res. Not. (2005), no. 52, 3203–3228.

[8] Bjorn Poonen, *Insufficency of the Brauer-Manin obstruction applied to étale covers*, disponible sur http ://math.mit.edu/∼poonen/papers/insufficency.pdf, 2008.

[9] Jean-Pierre Serre, *Cohomologie galoisienne*, fifth ed., Lecture Notes in Mathematics, vol. 5, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[10] Alexei Skorobogatov, *Beyond the Manin obstruction*, Invent. Math. **135** (1999), no. 2, 399–424.

[11] ———, *Torsors and rational points*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 144, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[12] ———, *The descent obstruction is equivalent to the étale Brauer-Manin obstruction*, disponible sur http ://www.ma.ic.ac.uk/∼anskor/EQU.PDF, 2008.

[13] Michael Stoll, *Finite descent obstructions and rational points on curves*, Algebra and Number Theory **1** (2007), no. 4, 349–391.

Cyril Demarche
Université Paris-Sud, Laboratoire de Mathématiques, F-91405 Orsay, France
cyril.demarche@math.u-psud.fr