Suites de Poitou-Tate pour les complexes de tores à deux termes

Cyril Demarche

8 mars 2010

Résumé

On considère un complexe de tores de longueur 2 défini sur un corps de nombres k. On établit des résultats de dualité locale et globale pour l'hypercohomologie (étale ou galoisienne) de ce complexe. On obtient notamment une suite de Poitou-Tate pour de tels complexes, généralisant les suites de Poitou-Tate pour les modules galoisiens finis ou les tores. Les résultats généraux obtenus ici pour les complexes de tores constituent l'ingrédient essentiel dans des résultats récents de l'auteur sur l'approximation forte dans les groupes linéaires connexes et sur des théorèmes de dualité sur la cohomologie galoisienne (non-abélienne) de tels groupes.

Abstract

We consider a complex of tori of length 2 defined over a number field k. We establish here some local and global duality theorems for the (étale or Galois) hypercohomology of such a complex. We prove the existence of a Poitou-Tate exact sequence for such a complex, which generalizes the Poitou-Tate exact sequences for finite Galois modules and tori. The general results proven here lie at the root of recent results by the author about the defect of strong approximation in connected linear algebraic groups and about some arithmetic duality theorems for the (non-abelian) Galois cohomology of such groups.

1 Introduction

Les théorèmes de dualité pour la cohomologie galoisienne des groupes algébriques commutatifs sur les corps locaux et globaux constituent parmi les plus importants résultats en arithmétique.

Un premier résultat bien connu est le théorème de dualité locale pour les modules galoisiens finis (voir par exemple [18], corollaire I.2.3). On dispose aussi des résultats de Tate-Nakayama et Tate pour les tores et les variétés abéliennes sur des corps locaux, résultats généralisés par Harari et Szamuely (pour des variétés semi-abéliennes et plus généralement les 1-motifs sur un corps local) : voir [13], théorème 2.3.

Concernant les théorèmes de dualité globale, on dispose du théorème de Tate pour les modules galoisiens finis, à savoir : si F est un module galoisien fini sur un corps de nombres k, on dispose d'accouplements naturels non-dégénérés entre groupes finis

$$Ш^i(F) \times Ш^{3-i}(F^*) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

où F^* est le dual de Cartier de F, et $i = 1, 2$ (voir [18], théorème 4.10.(a)). Un autre exemple de résultat de dualité globale est donné par le théorème de Cassels-Tate pour les variétés abéliennes, ainsi que par le théorème analogue pour les tores, souvent attribué à Kottwitz (voir par exemple l'appendice de [16], où les preuves ne sont parfois pas complètes). Ces deux résultats ont été généralisés par Harari et Szamuely : si k est un corps de nombres et M est un 1-motif sur k (on note M^* son dual), alors on dispose d'un accouplement canonique

$$Ш^i(M) \times Ш^{2-i}(M^*) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

$(i = 0, 1)$ qui est non-dégénéré modulo les sous-groupes divisibles (voir [13], théorème 4.8, corollaire 4.9, propositions 4.12 et 5.1).

Enfin, on peut rassembler les théorèmes de dualité locale et globale dans une suite exacte dite de Poitou-Tate : voir [13], théorème 5.6 pour les 1-motifs, et [18], théorème 4.10 pour les modules galoisiens finis. On citera également au passage les résultats de Gonzales-Aviles (voir [10]) à propos des théorèmes de dualité sur les corps locaux et globaux de caractéristique positive.

L'objectif de ce texte est de démontrer de nouveaux théorèmes de dualité, locale et globale, pour l'hypercohomologie des complexes de tores de longueur 2, qui généralisent notamment les résultats pour les tores et les modules finis rappelés plus haut. On retrouve en particulier (par une méthode différente) certains des résultats de l'appendice de [16], ainsi que des résultats de Nyssen (voir [20]). Notons cependant que les résultats obtenus dans ce texte (et notamment la suite de Poitou-Tate du théorème 6.1, cruciale en vue des applications à l'approximation forte dans les groupes connexes) ne se déduisent pas des résultats de [16] et [20]. Ces résultats de dualité ont notamment des applications pour le calcul de la cohomologie galoisienne des groupes linéaires connexes : on citera par exemple les travaux de Borovoi (notamment [3] et [4] section 4), ceux de Kottwitz et Shelstad (voir [16]), et les résultats de l'auteur dans [6].

Rappelons quelques notations avant d'énoncer le résultat principal. Si A est un groupe topologique abélien, on note A^D le groupe des morphismes de groupes continus $A \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. On munit ce groupe A^D de la topologie compacte-ouverte. On note $A^\wedge$ le complété de A pour la topologie des sous-groupes ouverts d'indice fini.

Si k est un corps, on note Γ_k son groupe de Galois absolu. Si C est un complexe de modules galoisiens sur k, et $i \in \mathbf{N}$, on note $\mathbf{H}^i(k, C) := \mathbf{H}^i(\Gamma_k, C(\overline{k}))$ le i-ème groupe d'hypercohomologie galoisienne. Si k est un corps de nombres et Ω_k l'ensemble des places de k, $\mathbf{P}^i(k, C)$ désigne le produit restreint des groupes $\mathbf{H}^i(\widehat{k}_v, C)$ par rapport aux groupes $\mathbf{H}^i(\widehat{\mathscr{O}}_v, \mathscr{C})$, où $\widehat{\mathscr{O}}_v$ désigne l'anneau des entiers du complété $\widehat{k}_v$ de k à la place v.

On peut désormais énoncer le résultat principal, à savoir une suite exacte de type Poitou-Tate pour certains complexes de tores, où les différents morphismes proviennent des théorèmes de dualité locale et globale :

Théorème (Théorème 6.1). *Soit $C = [T_1 \xrightarrow{\rho} T_2]$ un complexe de tores (T_1 est en degré -1) défini sur un corps de nombres k, avec $\mathrm{Ker}(\rho)$ fini. On note $\widehat{C} := [\widehat{T_2} \to \widehat{T_1}]$ le dual de Cartier de C. On a deux suites exactes de groupes topologiques, fonctorielles en C :*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbf{H}^{-1}(k, C) \arrow[r] & \mathbf{P}^{-1}(k, C) \arrow[r] & \mathbf{H}^2(k, \widehat{C})^D \arrow[d] \\
& \mathbf{H}^1(k, \widehat{C})^D \arrow[d] & \mathbf{P}^0(k, C)^\wedge \arrow[l] & \mathbf{H}^0(k, C)^\wedge \arrow[l] \\
& \mathbf{H}^1(k, C) \arrow[r] & \mathbf{P}^1(k, C) \arrow[r] & \mathbf{H}^0(k, \widehat{C})^D \arrow[d] \\
0 & \mathbf{H}^{-1}(k, \widehat{C})^D \arrow[l] & \mathbf{P}^2(k, C) \arrow[l] & \mathbf{H}^2(k, C) \arrow[l]\,,
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbf{H}^{-1}(k,\widehat{C})^{\wedge} \arrow[r] & \mathbf{P}^{-1}(k,\widehat{C})^{\wedge} \arrow[r] & \mathbf{H}^{2}(k,C)^{D} \arrow[d] \\
& \mathbf{H}^{1}(k,C)^{D} \arrow[d] & \mathbf{P}^{0}(k,\widehat{C}) \arrow[l] & \mathbf{H}^{0}(k,\widehat{C}) \arrow[l] \\
& \mathbf{H}^{1}(k,\widehat{C}) \arrow[r] & \mathbf{P}^{1}(k,\widehat{C})_{\mathrm{tors}} \arrow[r] & \left(\mathbf{H}^{0}(k,C)^{D}\right)_{\mathrm{tors}} \arrow[d] \\
0 & \mathbf{H}^{-1}(k,C)^{D} \arrow[l] & \mathbf{P}^{2}(k,\widehat{C}) \arrow[l] & \mathbf{H}^{2}(k,\widehat{C}) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Remarque 1.1. Ce théorème est crucial pour étudier le défaut d'approximation forte dans les groupes linéaires connexes et pour obtenir une suite de Poitou-Tate non-abélienne pour ces groupes (voir [6]).

On obtient aussi une suite de Poitou-Tate analogue pour les groupes de type multiplicatif (voir théorème 6.3), généralisant les suites usuelles de Poitou-Tate pour les modules galoisiens finis (voir [18], théorème I.4.10) et pour les tores (voir le théorème 5.6 de Harari et Szamuely dans [13]).

Le plan du texte est le suivant : on montre d'abord les théorèmes de dualité locale à la section 3, puis on établit des résutats de dualité en cohomologie étale à l'aide du théorème d'Artin-Verdier (section 4). Ensuite, la section 5 est consacrée à la démonstration des théorèmes de dualité globale. Enfin, on obtient les suites exactes de type Poitou-Tate à la section 6, et on fait le lien avec une suite en hypercohomologie obtenue par Borovoi.

Remarque 1.2. Pour certains résultats dont les preuves sont analogues à d'autres résultats bien connus, on ne donne pas ici les détails des démonstrations (voir sections 3 et 4). Des preuves complètes de ces faits sont disponibles dans [7].

Notations On définit ici quelques notations générales utiles pour la suite. Si A est un groupe topologique, A^D désigne le groupe des morphismes de groupes continus $A \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. On munit ce groupe A^D de la topologie compacte-ouverte. On note $A^\wedge$ le complété de A pour la topologie des sous-groupes ouverts distingués d'indice fini, et si A est abélien, $A_\wedge$ désigne le groupe $\varprojlim_n A/n$ (où $A/n := A/nA$ par définition). En outre, pour un groupe abélien A, on note ${}_nA$ le sous-groupe de n-torsion de A. On considère également le module de Tate de A, à savoir le groupe $T(A) := \varprojlim_n {}_nA$; de même, si G est un schéma en groupes de type multiplicatif et de type fini sur une base S, on note ${}_nG$ le sous-groupe de type multiplicatif noyau de la multiplication par n sur G (voir [8], proposition 2.2). Enfin, pour un groupe abélien A et un nombre premier l, on note $A\{l\}$ le sous-groupe de torsion l-primaire de A, $\overline{A}$ le quotient de A par son sous-groupe divisible maximal, $\overline{A}\{l\}$ le quotient de $A\{l\}$ par son sous-groupe divisible maximal, et $A^{(l)}$ la limite projective $\varprojlim_n A/l^n$.

2 Quelques préliminaires sur les complexes de tores

Définition 2.1. Soit S un schéma. On appelle complexe de tores sur S la donnée de deux S-tores (au sens de [8], Exposé IX, définition 1.3) T_1 et T_2, et d'un morphisme de S-tores $\rho : T_1 \to T_2$. On note $C := \left[T_1 \xrightarrow{\rho} T_2\right]$ le complexe de S-tores ainsi obtenu, où T_1 est en degré -1 et T_2 en degré 0.

Étant donné un tel complexe, on note $\widehat{T_i}$ le dual de Cartier de T_i : c'est un schéma en groupes qui, localement pour la topologie étale, est un schéma en groupes constant défini par un $\mathbf{Z}$-module libre de type fini (si S est de dimension 1, $\widehat{T}$ est un faisceau $\mathbf{Z}$-constructible au sens de [18], à savoir qu'il existe un revêtement étale fini d'un ouvert dense de S sur lequel $\mathscr{F}$ est le faisceau constant associé à un groupe abélien de type fini et les tiges $\mathscr{F}$ hors de cet ouvert sont de type fini comme groupes abéliens). On note $\widehat{C}$ le complexe de faisceaux $\left[\widehat{T_2} \xrightarrow{\widehat{\rho}} \widehat{T_1}\right]$, où $\widehat{\rho}$ est le morphisme dual de ρ. On travaille dans la catégorie des faisceaux en groupes abéliens sur le site fppf de la base S, et dans la catégorie dérivée associée à la catégorie des complexes bornés de faisceaux fppf.

On construit alors un accouplement naturel $C \otimes^{\mathbf{L}} \widehat{C} \to \mathbf{G}_m[1]$, fonctoriel en C, qui prolonge l'accouplement bien connu $T \otimes \widehat{T} \to \mathbf{G}_m$ pour un tore T : $\widehat{C}$ est un complexe de faisceaux plats sur S, donc le produit tensoriel dérivé $C \otimes^{\mathbf{L}} \widehat{C}$ coïncide avec le complexe "produit tensoriel total" (voir [22], 10.5.5 et 10.6.2). L'objet $C \otimes^{\mathbf{L}} \widehat{C}$ est donc représenté par le complexe $\left[T_1 \otimes \widehat{T_2} \to (T_1 \otimes \widehat{T_1}) \oplus (T_2 \otimes \widehat{T_2}) \to T_2 \otimes \widehat{T_1}\right]$, la première flèche étant $(t_1, \widehat{t_2}) \mapsto t_1 \otimes \widehat{\rho}(\widehat{t_2}) - \rho(t_1) \otimes \widehat{t_2}$ et la seconde $t_1 \otimes \widehat{t_1} + t_2 \otimes \widehat{t_2} \mapsto \rho(t_1) \otimes \widehat{t_1} + t_2 \otimes \widehat{\rho}(\widehat{t_2})$. On dispose alors du morphisme canonique $(T_1 \otimes \widehat{T_1}) \oplus (T_2 \otimes \widehat{T_2}) \to \mathbf{G}_m \oplus \mathbf{G}_m$, qui composé avec le produit $\mathbf{G}_m \oplus \mathbf{G}_m \to \mathbf{G}_m$ fournit un morphisme $(T_1 \otimes \widehat{T_1}) \oplus (T_2 \otimes \widehat{T_2}) \to \mathbf{G}_m$. Celui-ci induit clairement un morphisme de complexes

$$C \otimes^{\mathbf{L}} \widehat{C} \to \mathbf{G}_m[1]\,.$$

Dans le cas où $C = [0 \to T]$ ou $C = [T \to 0]$, on retrouve l'accouplement usuel entre un tore T et son dual $\widehat{T}$.

Réalisations n-adiques On définit ici les réalisations n-adiques d'un complexe $C = [T_1 \xrightarrow{\rho} T_2]$ sur S.

Définition 2.2. On pose, pour $n \geq 1$, $T_{\mathbf{Z}/n}(C) := H^0(C[-1] \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$ et $T_{\mathbf{Z}/n}(\widehat{C}) := H^0(\widehat{C}[-1] \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$. Ce sont des faisceaux fppf en groupes abéliens.

Lemme 2.3. *Le faisceau fppf $T_{\mathbf{Z}/n}(C)$ est représentable par un schéma en groupes de type multiplicatif fini sur S, et $T_{\mathbf{Z}/n}(\widehat{C})$ est représentable par le groupe constant tordu fini dual $\underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr}}(T_{\mathbf{Z}/n}(C), \mathbf{G}_m)$, et on a des triangles exacts naturels, fonctoriels en C, dans la catégorie dérivée des faisceaux abéliens fppf sur S :*

$$ {}_n\mathrm{Ker}(\rho)[2] \to C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n \to T_{\mathbf{Z}/n}(C)[1] \to {}_n\mathrm{Ker}(\rho)[3]\,, \tag{1}$$

$$T_{\mathbf{Z}/n}(\widehat{C})[1] \to \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n \to \widehat{{}_n\mathrm{Ker}(\rho)} \to T_{\mathbf{Z}/n}(\widehat{C})[2]\,, \tag{2}$$

où $\widehat{{}_n\mathrm{Ker}(\rho)}$ désigne le dual de Cartier du groupe ${}_n\mathrm{Ker}(\rho)$.

Démonstration. En utilisant la résolution plate $(\mathbf{Z} \xrightarrow{n} \mathbf{Z})$ de $\mathbf{Z}/n$, on voit que $C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n$ s'identifie au complexe $\left[T_1 \xrightarrow{n \oplus \rho} T_1 \oplus T_2 \xrightarrow{(t_1, t_2) \mapsto \rho(t_1)/t_2^n} T_2\right]$, où T_1 est en degré -2 (voir [22], lemme 10.6.2). On note $\rho - n$ le second morphisme. Celui-ci est surjectif, par conséquent ce complexe est quasi-isomorphe à $\left[T_1 \xrightarrow{n \oplus \rho} \mathrm{Ker}(\rho - n)\right]$. Or on dispose du diagramme commutatif suivant, dont les lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & {}_n\mathrm{Ker}(\rho) \arrow[r] \arrow[d, "n \oplus \rho"] & T_1 \arrow[r, "n \oplus \rho"] \arrow[d, "n \oplus \rho"] & \mathrm{Im}(n \oplus \rho) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(\rho - n) \arrow[r, "="] & \mathrm{Ker}(\rho - n) \arrow[r] & 0\,.
\end{tikzcd}$$

Par définition, $T_{\mathbf{Z}/n}(C) = \mathrm{Ker}(\rho - n)/\mathrm{Im}(n \oplus \rho)$, et la troisième flèche verticale est injective, donc le complexe $[\mathrm{Im}(n \oplus \rho) \to \mathrm{Ker}(\rho - n)]$ est quasi-isomorphe à $T_{\mathbf{Z}/n}(C)$. Ce diagramme s'identifie au triangle (1), dans la catégorie dérivée (voir par exemple [22], 10.4.9). Deux applications successives du lemme du serpent assurent que l'on a une suite exacte de faisceaux ${}_nT_1 \xrightarrow{\rho} {}_nT_2 \to \mathrm{Ker}(\rho - n)/\mathrm{Im}(n \oplus \rho) \to 0$. Or la catégorie des S-schémas en groupes de type multiplicatif de type fini est une catégorie abélienne (voir [8], Exposé 9, corollaire 2.8), et ${}_nT_i$ est un S-schéma en groupes de type multiplicatif fini (voir [8], Exposé 9, proposition 2.2), donc $T_{\mathbf{Z}/n}(C)$ est bien un S-schéma en groupes de type multiplicatif fini.

Montrons désormais le second triangle exact : $\widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n$ s'identifie cette fois à $\left[\widehat{T_2} \xrightarrow{n \oplus \widehat{\rho}} \widehat{T_2} \oplus \widehat{T_1} \xrightarrow{\widehat{\rho} - n} \widehat{T_1}\right]$, avec $\widehat{T_2}$ en degré -2. Or $\widehat{T_2}$ est sans torsion, donc $n \oplus \widehat{\rho}$ est injectif. Donc $\widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n$ est quasi-isomorphe au complexe $\left[\left(\widehat{T_2} \oplus \widehat{T_1}\right)/\mathrm{Im}(n \oplus \widehat{\rho}) \xrightarrow{\widehat{\rho} - n} \widehat{T_1}\right]$. On en déduit que $T_{\mathbf{Z}/n}(\widehat{C}) = \mathrm{Ker}(\widehat{\rho} - n)/\mathrm{Im}(n \oplus \widehat{\rho})$, ainsi que le diagramme commutatif suivant, à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T_{\mathbf{Z}/n}(\widehat{C}) \arrow[r] \arrow[d] & \left(\widehat{T_2} \oplus \widehat{T_1}\right)/\mathrm{Im}(n \oplus \widehat{\rho}) \arrow[r, "\widehat{\rho}-n"] \arrow[d, "\widehat{\rho}-n"] & \mathrm{Im}(\widehat{\rho} - n) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \widehat{T_1} \arrow[r, "="] & \widehat{T_1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

qui fournit le triangle (2), car $\left[\mathrm{Im}(\widehat{\rho} - n) \hookrightarrow \widehat{T_1}\right]$ est quasi-isomorphe à $\widehat{T_1}/\mathrm{Im}(\widehat{\rho} - n) \cong \widehat{{}_n\mathrm{Ker}(\rho)}$.

Montrons que $T_{\mathbf{Z}/n}(C)$ et $T_{\mathbf{Z}/n}(\widehat{C})$ se correspondent via l'équivalence de catégories entre S-schémas en groupes de type multiplicatif de type fini et S-groupes constants tordus finiment engendrés (voir [8], Exposé 10, corollaire 5.9) : en utilisant le triangle exact $C \xrightarrow{n} C \to C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n \to C[1]$ (et son dual), on voit que l'accouplement canonique $C \otimes^{\mathbf{L}} \widehat{C} \to \mathbf{G}_m[1]$, défini plus haut, induit un accouplement

$$(C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \otimes^{\mathbf{L}} (\widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \to \mathbf{G}_m[2]\,,$$

d'où en particulier un accouplement $T_{\mathbf{Z}/n}(C) \times T_{\mathbf{Z}/n}(\widehat{C}) \to \mathbf{G}_m$. Or on a une suite exacte naturelle ${}_nT_1 \xrightarrow{\rho} {}_nT_2 \to T_{\mathbf{Z}/n}(C) \to 0$, et on montre de même la suite exacte suivante : $0 \to T_{\mathbf{Z}/n}(\widehat{C}) \to \widehat{T_2}/n \xrightarrow{\widehat{\rho}} \widehat{T_1}/n$.

Alors on conclut immédiatement que $T_{\mathbf{Z}/n}(\widehat{C})$ est constant tordu, et qu'il s'identifie canoniquement au dual de $T_{\mathbf{Z}/n}(C)$, en remarquant que ${}_nT_i$ est le dual de $\widehat{T}_i/n$ pour $i = 1, 2$. □

Remarque 2.4. Dans sa thèse [15], P. Jossen a présenté un formalisme très général pour construire les modules de Tate l-adiques de complexes (dits "modérés") de faisceaux fppf sur une base quelconque comme objets dans une catégorie dérivée de faisceaux l-divisibles localement constants (voir le chapitre 2 de [15]). En particulier, son travail s'applique à des complexes de tores. Les constructions de cette section, ainsi que certains des résultats qui suivent, peuvent se reformuler dans le langage qu'il a développé.

3 Théorèmes de dualité locale

Soit K un corps complet pour une valuation discrète, à corps résiduel fini $\mathbf{F}$, $\mathscr{O}$ son anneau des entiers. Soit $C := \left[T_1 \xrightarrow{\rho} T_2\right]$ un complexe de K-tores.

Topologie On munit $\mathbf{H}^i(K,C)$ de la topologie discrète, sauf pour $i=-1,0$: pour $i=-1$, $\mathbf{H}^{-1}(K,C)$ est muni de la topologie induite par celle de $T_1(K)$ via $\mathbf{H}^{-1}(K,C)=\mathrm{Ker}(T_1(K)\to T_2(K))$. Pour $i=0$, on considère la suite exacte de groupes abéliens

$$T_1(K)\xrightarrow{\rho}T_2(K)\to\mathbf{H}^0(K,C)\to H^1(K,T_1)\,.$$

On sait que l'image de $T_1(K)$ par ρ s'identifie à un sous-groupe fermé de $T_2(K)$, et par conséquent le quotient topologique $T_2(K)/\rho(T_1(K))$ est un groupe topologique séparé. La suite exacte permet d'identifier ce quotient à un sous-groupe d'indice fini de $\mathbf{H}^0(K,C)$ (le groupe $H^1(K,T_2)$ est fini par [18], I, théorème 2.1), et on munit ce sous-groupe d'indice fini de la topologie quotient sur $T_2(K)/\rho(T_1(K))$, ce qui définit une topologie sur $\mathbf{H}^0(K,C)$. Le morphisme $T_2(K)\to\mathbf{H}^0(K,C)$ est alors continu et ouvert, et $\mathbf{H}^0(K,C)$ est séparé.

L'accouplement $C\otimes^{\mathbf{L}}\widehat{C}\to\mathbf{G}_m[1]$ induit, via le cup produit, un morphisme sur les groupes d'hypercohomologie $\mathbf{H}^i(K,C)\times\mathbf{H}^{1-i}(K,\widehat{C})\to H^1(K,\mathbf{G}_m[1])\cong H^2(K,\mathbf{G}_m)\xrightarrow{j_K}\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ où j_K est l'invariant donné par la théorie du corps de classes local. On a alors le théorème de dualité locale suivant (voir aussi [20]) :

Théorème 3.1. *Le cup-produit $\mathbf{H}^i(K,C)\times\mathbf{H}^{1-i}(K,\widehat{C})\to\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ réalise des dualités parfaites, fonctorielles en C, entre les groupes suivants :*

- *le groupe profini $\mathbf{H}^{-1}(K,C)^\wedge$ et le groupe discret $\mathbf{H}^2(K,\widehat{C})$.*
- *le groupe profini $\mathbf{H}^0(K,C)^\wedge$ et le groupe discret $\mathbf{H}^1(K,\widehat{C})$.*
- *le groupe discret $\mathbf{H}^1(K,C)$ et le groupe profini $\mathbf{H}^0(K,\widehat{C})^\wedge$.*
- *le groupe discret $\mathbf{H}^2(K,C)$ et le groupe profini $\mathbf{H}^{-1}(K,\widehat{C})^\wedge$.*

Démonstration. Ce résultat s'obtient par dévissage à partir de la dualité locale de Tate-Nakayama pour les tores (voir [18], corollaires I.2.3 et I.2.4), en prenant garde lors de la complétion profinie de certaines suites exactes de groupes topologiques (voir l'appendice de [13]). Voir également la preuve du théorème 2.3 de [13]. □

On se place désormais dans la situation suivante : soit $\mathscr{C}=[\mathscr{T}_1\xrightarrow{\rho}\mathscr{T}_2]$ un complexe de tores sur Spec $\mathscr{O}$. On note T_1 (resp. T_2, resp. C) la fibre générique de $\mathscr{T}_1$ (resp. $\mathscr{T}_2$, resp. $\mathscr{C}$). On définit alors $\mathbf{H}^i_{\mathrm{nr}}(K,C)$ comme l'image de $\mathbf{H}^i(\mathscr{O},\mathscr{C})$ dans $\mathbf{H}^i(K,C)$. On rappelle que dans le cas des tores, le groupe $H^1(\mathscr{O},\mathscr{T}_i)$ est trivial (c'est la conjonction de [17], III.3.11 a) et du théorème de Lang).

Lemme 3.2. *Soit $\mathscr{F}$ un faisceau (étale) localement constant $\mathbf{Z}$-constructible sans torsion sur* Spec $\mathscr{O}$.
Alors le morphisme $H^2(\mathscr{O},\mathscr{F})\to H^2(K,\mathscr{F})$ est injectif.

Démonstration. On note K^{nr} l'extension maximale non ramifiée de K, et $\mathscr{O}^{\mathrm{nr}}$ son anneau des entiers. On a $H^1(\mathscr{O}^{\mathrm{nr}},\mathscr{F})=H^2(\mathscr{O}^{\mathrm{nr}},\mathscr{F})=0$ car l'anneau strictement hensélien $\mathscr{O}^{\mathrm{nr}}$ est acyclique pour la topologie étale (voir [9], corollaire 1.19). En outre, $\mathscr{O}^{\mathrm{nr}}$ est simplement connexe (pour la topologie étale), donc $\mathscr{F}$ est un faisceau constant $\mathbf{Z}^k$ sur $\mathscr{O}^{\mathrm{nr}}$, et donc $H^1(K^{\mathrm{nr}},\mathscr{F})=0$. Par conséquent, les suites exactes en bas degrés associées aux suites spectrales de Hochschild-Serre : $H^p(\mathbf{F},H^q(\mathscr{O}^{\mathrm{nr}},\mathscr{F}))\Rightarrow H^{p+q}(\mathscr{O},\mathscr{F})$ et $H^p(\mathbf{F},H^q(K^{\mathrm{nr}},\mathscr{F}))\Rightarrow H^{p+q}(K,\mathscr{F})$ induisent le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
H^2(\mathbf{F},H^0(\mathscr{O}^{\mathrm{nr}},\mathscr{F})) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & H^2(\mathscr{O},\mathscr{F}) \arrow[d] \\
H^2(\mathbf{F},H^0(K^{\mathrm{nr}},\mathscr{F})) \arrow[r, "\simeq"] & \mathrm{Ker}\left(H^2(K,\mathscr{F})\to H^0(\mathbf{F},H^2(K^{\mathrm{nr}},\mathscr{F}))\right)\,.
\end{tikzcd}$$

Or la flèche verticale de gauche est un isomorphisme, donc celle de droite également. □

Théorème 3.3. *Dans la dualité parfaite :* $\mathbf{H}^0(K,C)^\wedge \times \mathbf{H}^1(K,\widehat{C}) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$*, les sous-groupes* $\mathbf{H}^0_{\mathrm{nr}}(K,C)$ *et* $\mathbf{H}^1_{\mathrm{nr}}(K,\widehat{C})$ *sont les orthogonaux respectifs l'un de l'autre. De même, dans la dualité* $\mathbf{H}^1(K,C) \times \mathbf{H}^0(K,\widehat{C})^\wedge \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$*, les sous-groupes* $\mathbf{H}^1_{\mathrm{nr}}(K,C)$ *et* $\mathbf{H}^0_{\mathrm{nr}}(K,\widehat{C})^\wedge$ *sont les orthogonaux respectifs l'un de l'autre.*

Démonstration. On montre seulement le premier point, le second est similaire. Puisque $H^2(\mathscr{O},\mathbf{G}_m) = 0$, les accouplements $\mathbf{H}^0(K,C)^\wedge \times \mathbf{H}^1(K,\widehat{C}) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ et $\mathbf{H}^1(K,C) \times \mathbf{H}^0(K,\widehat{C})^\wedge \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ induisent des morphismes $\mathbf{H}^1(K,\widehat{C})/\mathbf{H}^1(\mathscr{O},\widehat{\mathscr{C}}) \to \mathbf{H}^0(\mathscr{O},\mathscr{C})^D$ et $\mathbf{H}^0(K,C)^\wedge/\mathbf{H}^0(\mathscr{O},\mathscr{C})^\wedge \to \mathbf{H}^1(\mathscr{O},\widehat{\mathscr{C}})^D$. Il suffit alors de montrer que ces morphismes sont injectifs. On se limite aussi au premier morphisme, l'étude du second est analogue. On considère le diagramme commutatif suivant, dont les lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
H^1(\mathscr{O},\widehat{\mathscr{T}_1}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{H}^1(\mathscr{O},\widehat{\mathscr{C}}) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(\mathscr{O},\widehat{\mathscr{T}_2}) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(\mathscr{O},\widehat{\mathscr{T}_1}) \arrow[d] \\
H^1(K,\widehat{T_1}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{H}^1(K,\widehat{C}) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(K,\widehat{T_2}) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(K,\widehat{T_1}) \arrow[d] \\
H^1(\mathscr{O},\mathscr{T}_1)^D = 0 \arrow[r] & \mathbf{H}^0(\mathscr{O},\mathscr{C})^D \arrow[r] & H^0(\mathscr{O},\mathscr{T}_2)^D \arrow[r] & H^0(\mathscr{O},\mathscr{T}_1)^D .
\end{tikzcd}$$

La troisième colonne est exacte (voir [13], lemme 2.11). Une chasse au diagramme utilisant le lemme 3.2 ainsi que la surjectivité de $H^1(\mathscr{O},\widehat{\mathscr{T}_1}) \to H^1(K,\widehat{T_1})$ (voir [13], page 105, second diagramme) assure que le morphisme $\mathbf{H}^1(K,\widehat{C})/\mathbf{H}^1(\mathscr{O},\widehat{\mathscr{C}}) \to \mathbf{H}^0(\mathscr{O},\mathscr{C})^D$ est injectif.
□

Traitons le cas du corps $\mathbf{R}$: pour cela, on introduit les groupes de cohomologie modifiés à la Tate $\widehat{\mathbf{H}}^i(\mathbf{R},C)$.

Proposition 3.4. *Soit* C *un complexe de tores sur* $\mathbf{R}$*. Alors le cup-produit induit une dualité parfaite de groupes finis, fonctorielle en* C *:*

$$\widehat{\mathbf{H}}^0(\mathbf{R},C) \times \widehat{\mathbf{H}}^1(\mathbf{R},\widehat{C}) \to \mathbf{Z}/2\,.$$

Démonstration. c'est un dévissage facile à partir du cas des tores. □

Pour finir, on énonce un analogue du théorème 3.1 pour le corps des fractions d'un anneau hensélien.

Théorème 3.5. *Soit* A *un anneau hensélien, de corps résiduel fini,* F *son corps des fractions. On suppose* F *de caractéristique* 0*. Soit* C *un complexe de tores sur* F*. Alors le cup-produit induit des dualités parfaites, fonctorielles en* C*, entre les groupes :*
- $\mathbf{H}^{-1}(F,C)^\wedge$ *et* $\mathbf{H}^2(F,\widehat{C})$.
- $\mathbf{H}^0(F,C)^\wedge$ *et* $\mathbf{H}^1(F,\widehat{C})$.
- $\mathbf{H}^1(F,C)$ *et* $\mathbf{H}^0(F,\widehat{C})^\wedge$.
- $\mathbf{H}^2(F,C)$ *et* $\mathbf{H}^{-1}(F,\widehat{C})^\wedge$.

Remarque 3.6. On munit $T_i(F)$ de la topologie induite par celle de $T_i(K)$ et $\mathbf{H}^0(F,C)$ de la topologie naturelle.

Démonstration. Le point crucial est le lemme suivant :

Lemme 3.7. *Soit K la complétion de F. Alors les morphismes canoniques $\mathbf{H}^i(F, C) \to \mathbf{H}^i(K, C)$ sont des isomorphismes pour $i \geq 1$, et $\mathbf{H}^0(F, C) \to \mathbf{H}^0(K, C)$ induit un isomorphisme $\mathbf{H}^0(F, C)^\wedge \to \mathbf{H}^0(K, C)^\wedge$.*
Les morphismes $\mathbf{H}^i(F, \widehat{C}) \to \mathbf{H}^i(K, \widehat{C})$ sont des isomorphismes pour tout $i \geq 0$.

Démonstration. La preuve de ce lemme est une adaptation de la preuve du lemme 2.7 de [13]. □

Ce lemme 3.7 assure alors le théorème 3.5 grâce au théorème 3.1. Pour le résultat avec les complétions en degré 0, on utilise aussi le fait que pour un F-tore T, les complétions $T(F)_\wedge$ et $T(F)^\wedge$ sont isomorphes. □

4 Dualité globale : cohomologie étale

Soit k un corps de nombres, $\mathscr{O}_k$ son anneau des entiers. Soit U un ouvert non vide de Spec $\mathscr{O}_k$, et Σ_f l'ensemble des places finies de k correspondant à des points fermés hors de U. Si v désigne une place de k, on note k_v l'hensélisé de k en v, et $\widehat{k}_v$ le complété de k en v. Dans toute la suite, si v est une place infinie de k, les groupes d'hypercohomologie modifiés de Tate $\widehat{\mathbf{H}}^i(k_v, .)$ sont notés $\mathbf{H}^i(k_v, .)$. On note également $\Sigma := \Sigma_f \cup \Omega_\infty$, où Ω_∞ désigne l'ensemble des places infinies de k.

On renvoie au début de la section 3 de [13] pour la définition des groupes d'hypercohomologie à support compact à valeur dans un complexe de faisceaux abéliens cohomologiquement borné.

Suivant [18], on note $\mathbf{D}^i(U, .)$ l'image de $\mathbf{H}^i_c(U, .)$ dans $\mathbf{H}^i(U, .)$.

Lemme 4.1. *Soit $\mathscr{C}$ un complexe de tores sur U.*
- *(i) Les groupes $\mathbf{H}^i(U, \mathscr{C})$ et $\mathbf{H}^i(U, \widehat{\mathscr{C}})$ sont de torsion pour $i \geq 1$, ainsi que les groupes $\mathbf{H}^j_c(U, \widehat{\mathscr{C}})$ et $\mathbf{H}^j_c(U, \mathscr{C})$ pour $j \geq 2$.*
- *(ii) Pour tout l inversible sur U, les groupes $\mathbf{H}^i(U, \mathscr{C})\{l\}$ et $\mathbf{H}^i(U, \widehat{\mathscr{C}})\{l\}$ (resp. $\mathbf{H}^j_c(U, \widehat{\mathscr{C}})\{l\}$ et $\mathbf{H}^j_c(U, \mathscr{C})\{l\}$) sont de cotype fini pour $i \geq 1$ (resp. $j \geq 2$).*
- *(iii) Les groupes $\mathbf{H}^{-1}(U, \mathscr{C})$, $\mathbf{H}^0(U, \mathscr{C})$, $\mathbf{H}^{-1}_c(U, \mathscr{C})$, $\mathbf{H}^{-1}(U, \widehat{\mathscr{C}})$, $\mathbf{H}^0(U, \widehat{\mathscr{C}})$, $\mathbf{H}^{-1}_c(U, \widehat{\mathscr{C}})$ et $\mathbf{H}^0_c(U, \widehat{\mathscr{C}})$ sont de type fini.*
- *(iv) Le groupe $\mathbf{H}^0_c(U, \mathscr{C})$ est extension d'un groupe de type fini par un groupe profini, le groupe $\mathbf{H}^1_c(U, \mathscr{C})$ est extension d'un groupe de torsion (dont les sous-groupes de torsion l-primaire sont de cotype fini) par un groupe profini, et le groupe $\mathbf{H}^1_c(U, \widehat{\mathscr{C}})$ est extension d'un groupe de torsion (dont les sous-groupes de torsion l-primaire sont de cotype fini) par un groupe de type fini.*

Démonstration. C'est un dévissage au cas des tores semblable à la preuve du lemme 3.2 de [13]. □

Rappelons que l'accouplement canonique $\mathscr{C} \otimes^{\mathbf{L}} \widehat{\mathscr{C}} \to \mathbf{G}_m[1]$ induit $(\mathscr{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \otimes^{\mathbf{L}} (\widehat{\mathscr{C}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \to \mathbf{G}_m[2]$. On en déduit des accouplements en cohomologie :

$$\mathbf{H}^i(U, \mathscr{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \times \mathbf{H}^{1-i}_c(U, \widehat{\mathscr{C}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \to H^3_c(U, \mathbf{G}_m) = \mathbf{Q}/\mathbf{Z}\,. \tag{3}$$

Proposition 4.2. *Pour tout $i \in \mathbf{Z}$, si l'entier n est inversible sur U, l'accouplement (3) est une dualité parfaite de groupes finis, fonctorielle en $\mathscr{C}$. De même en inversant les rôles de $\mathscr{C}$ et $\widehat{\mathscr{C}}$.*

Démonstration. C'est un dévissage à partir du théorème de dualité d'Artin-Verdier pour les faisceaux constructibles, via les triangles exacts du lemme 2.3 : en effet, les faisceaux $T_{\mathbf{Z}/n}(C)$ et ${}_n\mathrm{Ker}(\rho)$ (ainsi que leurs duaux de Cartier) étant constructibles localement constants (voir lemme

2.3), et n étant inversible sur U, le corollaire II.3.3 de [18] assure la proposition via le lemme des 5. □

Déduisons de ce résultat le théorème principal de ce paragraphe :

Théorème 4.3. *Pour tout entier i, pour tout nombre premier l inversible sur U, le cup-produit induit une dualité parfaite fonctorielle en $\mathscr{C}$:*

$$\overline{\mathbf{H}^i(U,\mathscr{C})}\{l\} \times \overline{\mathbf{H}^{2-i}_c(U,\widehat{\mathscr{C}})}\{l\} \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

et de même en échangeant les rôles de $\mathscr{C}$ et $\widehat{\mathscr{C}}$.

Remarque 4.4. Les groupes $\mathbf{H}^i(U,\mathscr{C})\{l\}$ et $\mathbf{H}^{2-i}_c(U,\widehat{\mathscr{C}})\{l\}$ étant tous de cotype fini, leur sous-groupe divisible maximal coïncide avec leur sous-groupe formé des éléments divisibles.

Démonstration. Il suffit de passer à la limite sur r dans la proposition 4.2 appliquée aux entiers $n = l^r$, en utilisant les suites exactes naturelles de groupes finis (voir preuve du théorème 3.4 de [13])

$$0 \to \mathbf{H}^{i-1}(U,\mathscr{C}) \otimes \mathbf{Z}/n \to \mathbf{H}^{i-1}(U,\mathscr{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \to {}_n\mathbf{H}^i(U,\mathscr{C}) \to 0\,.$$

□

En vue de la dualité pour les groupes $\mathbf{D}^i(U,\mathscr{C})$, on a besoin du lemme suivant (voir [13], corrigenda) :

Lemme 4.5. *Soit $a \in \mathbf{D}^1(U,\mathscr{C})$, l^r-divisible dans $\mathbf{H}^1(U,\mathscr{C})$, et orthogonal au sous-groupe ${}_{l^r}\mathbf{D}^1(U,\widehat{\mathscr{C}})$ de $\mathbf{H}^1(U,\widehat{\mathscr{C}})$. Alors a est l^r-divisible dans $\mathbf{D}^1(U,\mathscr{C})$.*

Démonstration. La preuve est exactement la même que celle dans les corrigenda de [13]. □

On définit $\mathbf{D}^0_\wedge(U,\mathscr{C}) := \mathrm{Ker}\left(\mathbf{H}^0(U,\mathscr{C}) \to \bigoplus_{v\in\Sigma} \mathbf{H}^0(k_v,\mathscr{C})^\wedge\right)$.

Corollaire 4.6. *On a des accouplements fonctoriels $\mathbf{D}^0_\wedge(U,\mathscr{C})\{l\} \times \mathbf{D}^2(U,\widehat{\mathscr{C}})\{l\} \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ et $\mathbf{D}^1(U,\mathscr{C})\{l\} \times \mathbf{D}^1(U,\widehat{\mathscr{C}})\{l\} \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ (ainsi que $\mathbf{D}^2(U,\mathscr{C})\{l\} \times \mathbf{D}^0(U,\widehat{\mathscr{C}})\{l\} \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$), dont les noyaux à droite et à gauche sont les sous-groupes divisibles maximaux des deux groupes.*

Démonstration. Pour le premier et le troisième accouplements, c'est une conséquence du théorème 4.3 de dualité globale, ainsi que du théorème 3.5 de dualité locale : voir preuve du corollaire 3.5 de [13].

Pour le deuxième accouplement, on considère le diagramme commutatif exact :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbf{D}^1(U,\mathscr{C})\{l\} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{H}^1(U,\mathscr{C})\{l\} \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{v\in\Sigma} \mathbf{H}^1(k_v,\mathscr{C}) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathbf{D}^1(U,\widehat{\mathscr{C}})^D \arrow[r] & \mathbf{H}^1_c(U,\widehat{\mathscr{C}})^D \arrow[r] & \bigoplus_{v\in\Sigma} \mathbf{H}^0(k_v,\widehat{\mathscr{C}})^D\,.
\end{tikzcd}$$

On sait que la troisième flèche verticale est injective (théorème 3.5), et que le noyau de la seconde est un sous-groupe divisible (théorème 4.3). Alors le lemme 4.5 assure que le morphisme $\overline{\mathbf{D}^1(U,\mathscr{C})}\{l\} \to \overline{\mathbf{D}^1(U,\widehat{\mathscr{C}})}^D$ est injectif. Cela assure la seconde partie du corollaire 4.6, l'argument "dual" étant exactement le même. □

Corollaire 4.7. *Avec les notations précédentes, l'accouplement*

$$\mathbf{D}^1(U,\mathscr{C})\{l\} \times \mathbf{D}^1(U,\widehat{\mathscr{C}})\{l\} \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

est une dualité parfaite de groupes finis, fonctorielle en $\mathscr{C}$.

Démonstration. Il suffit de montrer que $\mathbf{D}^1(U,\mathscr{C})\{l\}$ et $\mathbf{D}^1(U,\widehat{\mathscr{C}})\{l\}$ sont finis. Ceci se déduit du cas des tores (voir [18], théorème II.4.6, corollaire I.2.3 et proposition II.4.14) par dévissage (via le lemme du serpent). $\square$

5 Dualité globale : cohomologie galoisienne

L'objectif de cette section est de montrer les trois théorèmes de dualité globale en cohomologie galoisienne, à savoir les théorèmes 5.7, 5.14 et 5.12, que l'on utilise dans la section 6 pour obtenir la suite de Poitou-Tate.

5.1 Généralités

Dans cette section, Σ désigne un ensemble fini de places de k contenant les places archimédiennes. On définit également k_Σ comme étant l'extension maximale de k non ramifiée hors de Σ, et on note $\Gamma_\Sigma := \mathrm{Gal}(k_\Sigma|k)$.

Définition 5.1. Soit C un complexe de tores sur k. On définit pour tout $i \geq 0$, $\mathbf{P}^i(k,C) = \mathbf{P}^i(C) := \prod'_{v\in\Omega_k} \mathbf{H}^i(\widehat{k}_v, C)$, où le produit restreint est pris par rapport aux sous-groupes $\mathbf{H}^i_{\mathrm{nr}}(\widehat{k}_v, C)$, et

$$Ш^i(C) = Ш^i(k,C) := \mathrm{Ker}\left(\mathbf{H}^i(k,C) \to \mathbf{P}^i(k,C)\right) .$$

On définit de même $Ш^i(\widehat{C})$. Si C est la fibre générique d'un complexe de tores $\mathscr{C}$ sur $U := \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{k,\Sigma})$, alors on note $Ш^i_\Sigma(C) = Ш^i_\Sigma(k,C) := \mathrm{Ker}\left(\mathbf{H}^i(\Gamma_\Sigma, C) \to \prod_{v\in\Sigma} \mathbf{H}^i(\widehat{k}_v, C)\right)$.

Enfin, on note $Ш^i_\wedge(C) := \mathrm{Ker}\left(\mathbf{H}^i(k,C)_\wedge \to \mathbf{P}^i(k,C)_\wedge\right)$.

Remarque 5.2. Le groupe $\mathbf{P}^1(k,C)$ est la somme directe $\mathbf{P}^1(k,C) = \bigoplus_v \mathbf{H}^1(\widehat{k}_v, C)$ (théorème de Lang).

Proposition 5.3. *Soit $\mathscr{C}$ un complexe de tores défini sur U, C sa fibre générique, l inversible sur U.*

- *(i) Si U est suffisamment petit, le morphisme canonique $\mathbf{H}^i(\Gamma_\Sigma, C)\{l\} \to \mathbf{H}^i(U,\mathscr{C})\{l\}$ (resp. $\mathbf{H}^i(\Gamma_\Sigma, \widehat{C})\{l\} \to \mathbf{H}^i(U,\widehat{\mathscr{C}})\{l\}$) est un isomorphisme, pour tout $i \geq 1$.*
- *(ii) Si U est suffisamment petit, le morphisme canonique $\mathbf{H}^1(U,\mathscr{C})\{l\} \to \mathbf{H}^1(k,C)\{l\}$ (resp. $\mathbf{H}^1(U,\widehat{\mathscr{C}})\{l\} \to \mathbf{H}^1(k,\widehat{C})\{l\}$) est injectif.*

Démonstration. (i) Grâce aux corrigenda de [13], on connaît le résultat pour les tores sur U assez petit. Le résultat pour $\mathscr{C}$ s'en déduit par dévissage. En ce qui concerne $\widehat{\mathscr{C}}$, le raisonnement est similaire : en effet, $\widehat{\mathscr{T}_i}$ étant localement constant, on a un isomorphisme $H^1(\Gamma_\Sigma, \widehat{T}_i) \xrightarrow{\simeq} H^1(U, \widehat{\mathscr{T}_i})$. De même, par la proposition II.2.9 de [18], on a un isomorphisme $H^2(\Gamma_\Sigma, \widehat{T}_i) \xrightarrow{\simeq} H^2(U, \widehat{\mathscr{T}_i})$, d'où le point (i) par dévissage.

(ii) Il suffit de montrer que le morphisme naturel $\mathbf{H}^1(\Gamma_\Sigma, C) \to \mathbf{H}^1(k, C)$ (resp. $\mathbf{H}^1(\Gamma_\Sigma, \widehat{C}) \to \mathbf{H}^1(k, \widehat{C})$) est injectif. Pour le cas de C, on regarde le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
H^1(\Gamma_\Sigma, T_1) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(\Gamma_\Sigma, T_2) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{H}^1(\Gamma_\Sigma, C) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(\Gamma_\Sigma, T_1) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(\Gamma_\Sigma, T_2) \arrow[d] \\
H^1(k, T_1) \arrow[r] & H^1(k, T_2) \arrow[r] & \mathbf{H}^1(k, C) \arrow[r] & H^2(k, T_1) \arrow[r] & H^2(k, T_2) .
\end{tikzcd}$$

Quitte à augmenter Σ (i.e. quitte à réduire U) de sorte que T_i soit déployé par k_Σ/k, on peut supposer que $H^1(k_\Sigma, T_i) = 0$. Alors la suite exacte de restriction-inflation relative au quotient Γ_Σ de Γ_k assure que les deux premières flèches verticales du diagramme sont des isomorphismes, et que les deux dernières sont injectives. Une chasse au diagramme assure alors que la flèche verticale centrale est injective. Le raisonnement est similaire pour $\widehat{C}$. □

Corollaire 5.4. *Soit $\mathscr{C}$ un complexe de tores défini sur U, C sa fibre générique, l inversible sur U. On a une dualité parfaite fonctorielle de groupes finis $Ш^1_\Sigma(C)\{l\} \times Ш^1_\Sigma(\widehat{C})\{l\} \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$.*

Démonstration. C'est une application du corollaire 4.7, en utilisant le point (i) de la proposition 5.3. □

5.2 Dualité entre $Ш^1(C)$ et $Ш^1(\widehat{C})$

On conserve les notations de la section précédente : on fixe un nombre premier l, et on choisit un ouvert $U = \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{k,\Sigma})$ tel que l soit inversible sur U et C s'étende en un complexe de tores $\mathscr{C}$ sur U.

Lemme 5.5. *Le groupe $\mathbf{D}^1(U, \mathscr{C})\{l\}$, vu comme sous-groupe de $\mathbf{H}^1(k, C)$, est contenu dans $Ш^1(C)\{l\}$.*

Démonstration. La trivialité des groupes $H^1(\mathscr{O}_v, \mathscr{T}_i)$ et $H^2(\mathscr{O}_v, \mathscr{T}_i)$ pour $v \notin S$ assure le résultat. □

Lemme 5.6. *Si U est assez petit, $\mathbf{D}^1(U, \widehat{\mathscr{C}})\{l\}$ est contenu dans $Ш^1(\widehat{C})\{l\}$.*

Démonstration. Voir la preuve du lemme 4.7 de [13]. □

Théorème 5.7. *Soit C un complexe de k-tores. On a une dualité parfaite de groupes finis, fonctorielle en C :*

$$Ш^1(C) \times Ш^1(\widehat{C}) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

Remarque 5.8. Ce théorème est équivalent à la proposition 4.2 de [4], due à Kottwitz.

Démonstration. Soit l un nombre premier. Il existe un ouvert U de $\operatorname{Spec} \mathscr{O}_k$ tel que C s'étend en un complexe de tores sur U et l est inversible sur U. On peut réduire U pour être dans les conditions précédentes. Alors l'inclusion $\mathbf{D}^1(U, \mathscr{C})\{l\} \subset Ш^1(C)\{l\}$ est une égalité, puisque un élément $\alpha \in Ш^1(C)\{l\}$ s'étend en un élément de $\mathbf{D}^1(V, \mathscr{C})\{l\}$, avec $V \subset U$, et donc $\mathbf{D}^1(V, \mathscr{C})\{l\} \subset \mathbf{D}^1(U, \mathscr{C})\{l\}$. De même, on a une égalité $\mathbf{D}^1(U, \widehat{\mathscr{C}})\{l\} = Ш^1(\widehat{C})\{l\}$. Ces deux égalités permettent de définir l'accouplement. Son exactitude vient du corollaire 4.7. La finitude des groupes $Ш^1(C)$ et $Ш^1(\widehat{C})$ est une conséquence du corollaire 4.7, puisque la preuve de celui-ci montre que les éléments de $\mathbf{D}^1(U, \mathscr{C})$ dont la torsion est inversible sur U sont en nombre fini. □

5.3 Dualité entre $Ш^2(C)$ et $Ш^0(\widehat{C})$

Dans la suite du texte, les résultats de dualité ne sont pas valable en général, mais seulement pour certains complexes de tores particuliers. On est amené à imposer deux types de conditions sur $C = [T_1 \xrightarrow{\rho} T_2]$:

(i) $\mathrm{Ker}(\rho)$ est fini. Cette hypothèse est vérifiée dans le cadre de la cohomologie abélianisée des groupes réductifs. Remarquons que la condition de finitude de $\mathrm{Ker}(\rho)$ équivaut à la condition $\varprojlim_n {}_n\mathrm{Ker}(\rho) = 0$.

(ii) ρ est surjective. Cette hypothèse implique que C est quasi-isomorphe à un objet $M[1]$, où $M := \mathrm{Ker}(\rho)$ est un k-groupe de type multiplicatif. Réciproquement, tout k-groupe de type multiplicatif est le noyau d'un morphisme surjectif de tores. La condition de surjectivité de ρ équivaut à la condition $\varinjlim_n T_{\mathbf{Z}/n}(C) = 0$.

Lemme 5.9. *Soit C un complexe de tores sur k. Alors $Ш^0(\widehat{C})$ est fini.*

Démonstration. – On suppose d'abord que T_2 est déployé sur k : alors Γ_k agit trivialement sur $\widehat{T_2}$, et on considère le diagramme commutatif suivant, pour une place v quelconque :

$$\begin{tikzcd}
H^0(k,\widehat{T_2}) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(k,\widehat{T_1}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{H}^0(k,\widehat{C}) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(k,\widehat{T_2}) \arrow[d] \\
H^0(\widehat{k}_v,\widehat{T_2}) \arrow[r] & H^0(\widehat{k}_v,\widehat{T_1}) \arrow[r] & \mathbf{H}^0(\widehat{k}_v,\widehat{C}) \arrow[r] & H^1(\widehat{k}_v,\widehat{T_2}) .
\end{tikzcd}$$

La deuxième flèche verticale est injective, le groupe $H^1(k,\widehat{T_2})$ est fini, et enfin la flèche verticale de gauche est un isomorphisme, ce qui assure le résultat dans ce cas.

– Cas général : il existe une extension galoisienne finie L/k qui déploie T_2. Par le cas précédent, $Ш^0(L,\widehat{C})$ est fini. Par un argument de restriction-corestriction, $Ш^0(k,\widehat{C})$ est donc de torsion. Or ce groupe est de type fini, donc $Ш^0(k,\widehat{C})$ est fini.

□

Proposition 5.10. *Il existe une dualité parfaite et fonctorielle*

$$Ш^2(C) \times Ш^0_\wedge(\widehat{C}) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z} .$$

Démonstration. Soit n un entier inversible sur U.

– Montrons que $\mathbf{H}^0(U,\widehat{\mathscr{C}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \xrightarrow{f_n} \mathbf{H}^0(k,\widehat{\mathscr{C}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$ est injectif. On a un diagramme commutatif exact

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^1(U,T_{\mathbf{Z}/n}(\widehat{\mathscr{C}})) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{H}^0(U,\widehat{\mathscr{C}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \arrow[r] \arrow[d, "f_n"] & H^0(U,{}_n\widehat{\mathrm{Ker}(\rho)}) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & H^1(k,T_{\mathbf{Z}/n}(\widehat{C})) \arrow[r] & \mathbf{H}^0(k,\widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \arrow[r] & H^0(k,{}_n\widehat{\mathrm{Ker}(\rho)}) .
\end{tikzcd}$$

Par finitude de $T_{\mathbf{Z}/n}(\widehat{\mathscr{C}})$ et ${}_n\mathrm{Ker}(\rho)$, les flèches verticales extrêmes sont injectives, donc f_n l'est aussi.

– On montre ensuite que pour tout place v de U, $\mathbf{H}^1(\mathscr{O}_v,\mathscr{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) = 0$. Dans la suite exacte suivante :

$$H^3(\mathscr{O}_v,{}_n\mathrm{Ker}(\rho)) \to \mathbf{H}^1(\mathscr{O}_v,\mathscr{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \to H^2(\mathscr{O}_v,T_{\mathbf{Z}/n}(\mathscr{C})) ,$$

les deux groupes extrêmes sont nuls par dimension cohomologique, donc le groupe central est nul.

– La proposition 4.2 et un dévissage à partir de la dualité locale pour les modules finis assurent que l'on a une dualité parfaite entre les groupes $\mathbf{D}^1(U, \mathscr{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$ et $\mathbf{D}^0(U, \widehat{\mathscr{C}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$.

– On fixe alors un nombre premier l et un ouvert U tel que l soit inversible sur U et que le complexe de tores s'étende sur U. Par le premier point, $\text{Ш}^0(\widehat{C} \otimes \mathbf{Z}/l^m)$ contient l'intersection des $\mathbf{D}^0(V, \widehat{\mathscr{C}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^m)$ (pour V ouverts non vide de U) dans $\mathbf{H}^0(k, \widehat{\mathscr{C}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^m)$. Or les groupes $\mathbf{D}^0(V, \widehat{\mathscr{C}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^m)$ sont finis, donc par fonctorialité covariante de la cohomologie à support compact, $\mathbf{D}^0(V, \widehat{\mathscr{C}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^m) \cong \text{Ш}^0(\widehat{C} \otimes \mathbf{Z}/l^m)$ pour tout ouvert V de U contenu dans un ouvert U_0 (voir [13], preuves du lemme 4.7 et de la proposition 4.12).
Le second point assure que pour une immersion ouverte $V \to U$, le morphisme $\mathbf{H}^1(U, \mathscr{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^m) \to \mathbf{H}^1(V, \mathscr{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^m)$ envoie $\mathbf{D}^1(U, \mathscr{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^m)$ dans $\mathbf{D}^1(V, \mathscr{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^m)$. On en déduit un morphisme $\varinjlim_V \mathbf{D}^1(V, \mathscr{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^m) \to \text{Ш}^1(C \otimes \mathbf{Z}/l^m)$, qui est surjectif par fonctorialité covariante de la cohomologie à support compact. Ce morphisme est injectif car $\varinjlim_V \mathbf{H}^1(V, \mathscr{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^m) \to \mathbf{H}^1(C \otimes \mathbf{Z}/l^m)$ l'est.
Finalement, on a donc des isomorphismes naturels

$$\text{Ш}^1(C \otimes \mathbf{Z}/l^m) \cong \varinjlim_V \mathbf{D}^1(V, \mathscr{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^m)\,,$$

$$\text{Ш}^0(\widehat{C} \otimes \mathbf{Z}/l^m) \cong \varprojlim_V \mathbf{D}^0(V, \widehat{\mathscr{C}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^m)\,.$$

– Les deux points précédents définissent une dualité parfaite entre $\text{Ш}^1(C \otimes \mathbf{Z}/l^m)$ et $\text{Ш}^0(\widehat{C} \otimes \mathbf{Z}/l^m)$, pour tout l premier. Donc on a une dualité parfaite entre $\varinjlim_n \text{Ш}^1(C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$ et $\varprojlim_n \text{Ш}^0(\widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$.
On identifie les groupes $\text{Ш}^0_\wedge(\widehat{C}) \cong \varprojlim_n \text{Ш}^0(\widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$ en passant à la limite dans le diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbf{H}^0(k, \widehat{C})/n \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{H}^0(k, \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \arrow[r] \arrow[d] & {}_n\mathbf{H}^1(k, \widehat{C}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{P}^0(k, \widehat{C})/n \arrow[r] & \mathbf{P}^0(k, \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \arrow[r] & {}_n\mathbf{P}^1(k, \widehat{C}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

et en utilisant la finitude du groupe $\text{Ш}^1(\widehat{C})$. De même, on identifie les groupes $\text{Ш}^2(C) \cong \varinjlim_n \text{Ш}^1(C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$, en passant à la limite inductive dans le diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbf{H}^1(k, C)/n \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{H}^1(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \arrow[r] \arrow[d] & {}_n\mathbf{H}^2(k, C) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{P}^1(k, C)/n \arrow[r] & \mathbf{P}^1(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \arrow[r] & {}_n\mathbf{P}^2(k, C) \arrow[r] & 0\,,
\end{tikzcd}$$

ce qui permet d'identifier $\varinjlim_n \mathbf{H}^1(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \cong \mathbf{H}^2(k, C)$ et $\varinjlim_n \mathbf{P}^1(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \cong \mathbf{P}^2(k, C)$ car les groupes $\mathbf{H}^1(k, C)$, $\mathbf{P}^1(k, C)$, $\mathbf{H}^2(k, C)$ et $\mathbf{P}^2(k, C)$ sont de torsion. On conclut grâce à l'exactitude de $\varinjlim$ qui permet d'identifier $\varinjlim_n \text{Ш}^1(C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$ au noyau de $\varinjlim_n \mathbf{H}^1(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \to \varinjlim_n \mathbf{P}^1(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$.

□

Proposition 5.11. *On a un isomorphisme naturel* $\text{Ш}^0_\wedge(\widehat{C}) \cong \operatorname{Ker}(\mathbf{H}^0(k, \widehat{C})^\wedge \xrightarrow{\beta^0} \mathbf{P}^0(k, \widehat{C})^\wedge)$.

Démonstration. Le groupe $\mathbf{H}^0(k,\widehat{C})$ est discret de type fini, donc $\mathbf{H}^0(k,\widehat{C})_\wedge \to \mathbf{H}^0(k,\widehat{C})^\wedge$ est un isomorphisme. De plus, pour tout n, et pour toute place v ne divisant pas n, le morphisme $\mathbf{H}^0(\mathscr{O}_v,\widehat{\mathscr{C}}\otimes^{\mathbf{L}}\mathbf{Z}/n) \to \mathbf{H}^0(k_v,\widehat{C}\otimes^{\mathbf{L}}\mathbf{Z}/n)$ est injectif (car $H^0(\mathscr{O}_v,{}_n\widehat{\mathrm{Ker}(\rho)}) \to H^0(k_v,{}_n\widehat{\mathrm{Ker}(\rho)})$ et $H^1(\mathscr{O}_v,T_{\mathbf{Z}/n}(\widehat{\mathscr{C}})) \to H^1(k_v,T_{\mathbf{Z}/n}(\widehat{C}))$ le sont). Donc pour tout n, $\mathbf{P}^0(k,\widehat{C})/n \to \prod_v \left(\mathbf{H}^0(k_v,\widehat{C})/n\right)$ est injectif, donc $\mathbf{P}^0(k,\widehat{C})_\wedge \to \mathbf{P}^0(k,\widehat{C})^\wedge$ est injectif (voir preuve de la proposition 5.4 dans [13]). On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{H}^0(k,\widehat{C})_\wedge \arrow[r, "="] \arrow[d] & \mathbf{H}^0(k,\widehat{C})^\wedge \arrow[d] \\
\mathbf{P}^0(k,\widehat{C})_\wedge \arrow[r] & \mathbf{P}^0(k,\widehat{C})^\wedge
\end{tikzcd}$$

où la flèche horizontale inférieure est injective. D'où l'égalité des noyaux des flèches verticales. □

Théorème 5.12. *On suppose* $\mathrm{Ker}(\rho)$ *fini. Il existe une dualité parfaite de groupes finis, fonctorielle en C :*

$$Ш^2(C)\times Ш^0(\widehat{C}) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}\,.$$

Démonstration. Puisque $Ш^0(\widehat{C})$ est un sous-groupe fermé de $\mathbf{H}^0(k,\widehat{C})$, on a une suite exacte :

$$0 \to Ш^0(\widehat{C})^\wedge \to \mathbf{H}^0(k,\widehat{C})^\wedge \to \mathrm{Im}(\theta)^\wedge \tag{4}$$

où θ est le morphisme $\mathbf{H}^0(k,\widehat{C}) \to \mathbf{P}^0(k,\widehat{C})$, et $\mathrm{Im}(\theta)$ est muni de la topologie quotient de $\mathbf{H}^0(k,\widehat{C})$, c'est-à-dire de la topologie discrète. On considère alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{P}^0(k,\widehat{C}) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & \mathbf{P}^0(k,\widehat{C})^\wedge \arrow[d, "g"] \\
\prod_v \mathbf{H}^0(k_v,\widehat{C}) \arrow[r, "j"] & \prod_v \mathbf{H}^0(k_v,\widehat{C})^\wedge\,.
\end{tikzcd}$$

Le morphisme f est injectif, ainsi que le morphisme j ($\mathbf{H}^0(k_v,\widehat{C})$ est de type fini). Donc le morphisme $i : \mathbf{P}^0(k,\widehat{C}) \to \mathbf{P}^0(k,\widehat{C})^\wedge$ est injectif. En particulier, $\mathrm{Im}(\theta)$ s'injecte dans $\mathbf{P}^0(k,\widehat{C})^\wedge$.

Lemme 5.13. *On suppose* $\mathrm{Ker}(\rho)$ *fini. On a une suite exacte naturelle :* $\mathbf{H}^0(k,\widehat{C}) \xrightarrow{\theta} \mathbf{P}^0(k,\widehat{C}) \to \mathbf{H}^1(k,C)^D$.

Démonstration. La suite $\varinjlim_n \mathbf{H}^{-1}(k,\widehat{C}\otimes^{\mathbf{L}}\mathbf{Z}/n) \to \varinjlim_n \mathbf{P}^{-1}(k,\widehat{C}\otimes^{\mathbf{L}}\mathbf{Z}/n) \to \varinjlim_n \mathbf{H}^1(k,C\otimes^{\mathbf{L}}\mathbf{Z}/n)^D$ est un complexe par la loi de réciprocité. On montre qu'il est exact en utilisant le triangle exact (2) et la suite exacte de Poitou-Tate pour le module fini $T_{\mathbf{Z}/n}(\widehat{C})$, puis en passant à la limite inductive (la finitude de $\mathrm{Ker}(\rho)$ implique que $\varinjlim_n {}_n\widehat{\mathrm{Ker}(\rho)} = 0$, car ce groupe est isomorphe au dual de $\varprojlim_n {}_n\mathrm{Ker}(\rho) = 0$). On considère alors le diagramme commutatif à lignes exactes suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \varinjlim_n \mathbf{H}^{-1}(k,\widehat{C})/n \arrow[r] \arrow[d] & \varinjlim_n \mathbf{H}^{-1}(k,\widehat{C}\otimes^{\mathbf{L}}\mathbf{Z}/n) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{H}^0(k,\widehat{C})_{\mathrm{tors}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \varinjlim_n \mathbf{P}^{-1}(k,\widehat{C})/n \arrow[r] \arrow[d] & \varinjlim_n \mathbf{P}^{-1}(k,\widehat{C}\otimes^{\mathbf{L}}\mathbf{Z}/n) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{P}^0(k,\widehat{C})_{\mathrm{tors}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \varinjlim_n (\mathbf{H}^2(k,C)^D)/n \arrow[r] & \varinjlim_n \mathbf{H}^1(k,C\otimes^{\mathbf{L}}\mathbf{Z}/n)^D \arrow[r] & (\mathbf{H}^1(k,C)^D)_{\mathrm{tors}} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dont on a montré que la colonne centrale était exacte. La troisième colonne est donc exacte par surjectivité du morphisme $\varinjlim_n \mathbf{P}^{-1}(k,\widehat{C})/n \to \varinjlim_n (\mathbf{H}^2(k,C)^D)/n$, dont le conoyau est $Ш^2(C)^D \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z} = 0$ (par dévissage à $\mathrm{Ker}(\rho)$ et $\mathrm{Coker}(\rho)$, $Ш^2(C)$ est fini). Enfin, puisque $\mathrm{Ker}(\rho)$ est fini, la troisième colonne coïncide avec la suite du lemme. □

Ce lemme assure donc que $\mathrm{Im}(\theta)$ est un sous-groupe fermé de $\mathbf{P}^0(k,\widehat{C})$. Or $\mathbf{P}^0(k,\widehat{C})$ est localement compact, donc le morphisme $\mathrm{Im}(\theta) \to \mathbf{P}^0(k,\widehat{C})$ est strict, par [12], 5.29. Or on a montré que $\mathbf{P}^0(k,\widehat{C})$ s'injecte dans $\mathbf{P}^0(k,\widehat{C})^\wedge$, donc cela assure que le morphisme $\mathrm{Im}(\theta)^\wedge \to \mathbf{P}^0(k,\widehat{C})^\wedge$ est injectif. En revenant à la suite exacte (4), $Ш^0(\widehat{C})^\wedge$ s'identifie au noyau $\mathrm{Ker}(\mathbf{H}^0(k,\widehat{C})^\wedge \xrightarrow{\beta^0} \mathbf{P}^0(k,\widehat{C})^\wedge)$, et donc aussi à $Ш^0_\wedge(\widehat{C})$ par la proposition 5.11. On utilise la finitude de $Ш^0(\widehat{C})$ (lemme 5.9) et le résultat de dualité globale (proposition 5.10) pour conclure. □

5.4 Dualité entre $Ш^0_\wedge(C)$ et $Ш^2(\widehat{C})$

5.4.1 Cas où $\mathrm{Ker}(\rho)$ est fini

Théorème 5.14. *Supposons* $\mathrm{Ker}(\rho)$ *fini. Il existe une dualité parfaite de groupes finis, fonctorielle en C :*

$$Ш^0_\wedge(C) \times Ш^2(\widehat{C}) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}\,.$$

Démonstration. On commence par énoncer les deux résultats cruciaux qui impliquent le théorème, puis on démontre successivement ces deux résultats.

Proposition 5.15. *Supposons que* $\mathrm{Ker}(\rho)$ *est fini. Alors il existe une dualité parfaite*

$$\mathrm{Ker}(\theta) \times Ш^1\left(\varinjlim_n \widehat{C}\otimes^{\mathbf{L}}\mathbf{Z}/n\right) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}\,,$$

où $\theta : \varprojlim_n \mathbf{H}^0(k, C\otimes^{\mathbf{L}}\mathbf{Z}/n) \to \varprojlim_n \mathbf{P}^0(k, C\otimes^{\mathbf{L}}\mathbf{Z}/n)$.

Proposition 5.16. *On a des isomorphismes canoniques de groupes :*

1. $\mathrm{Ker}(\theta) \cong Ш^0_\wedge(C)$.
2. $Ш^1(\varinjlim_n \widehat{C}\otimes^{\mathbf{L}}\mathbf{Z}/n) \cong Ш^2(\widehat{C})$.

Démonstration. (de la proposition 5.15) On fixe un nombre premier l, et U un ouvert sur lequel C s'étend en un complexe de tores $\mathscr{C}$, et de sorte que l soit inversible sur U.

Lemme 5.17. *On a une dualité parfaite et fonctorielle :* $\varprojlim_n \mathbf{D}^0(U,\mathscr{C}\otimes^{\mathbf{L}}\mathbf{Z}/l^n) \times \mathbf{D}^1(U,\varinjlim_n \widehat{\mathscr{C}}\otimes^{\mathbf{L}}\mathbf{Z}/l^n) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$.

Démonstration. En effet, on dispose du diagramme suivant à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \varprojlim_n \mathbf{D}^0(U, \mathscr{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n) \arrow[r] \arrow[d] & \varprojlim_n \mathbf{H}^0(U, \mathscr{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \varprojlim_n \left(\bigoplus_{v\in\Sigma} \mathbf{H}^0(k_v, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n)\right) \arrow[d, "\simeq"] \\
0 \arrow[r] & \mathbf{D}^1(U, \varinjlim_n \widehat{\mathscr{C}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n)^D \arrow[r] & (\varinjlim_n \mathbf{H}^1_c(U, \widehat{\mathscr{C}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n))^D \arrow[r] & (\varinjlim_n \bigoplus_{v\in\Sigma} \mathbf{H}^0(k_v, \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n))^D ,
\end{tikzcd}$$

l'isomorphisme de la colonne centrale provient de la dualité globale en cohomologie étale (proposition 4.2). Concernant la troisième flèche verticale, on montre que c'est un isomorphisme par dévissage grâce au théorème de dualité locale pour les modules finis sur un corps hensélien (théorème I.2.14.(c) et théorème I.2.13.(a) de [18]). Par conséquent, en revenant au premier diagramme, on a bien la dualité annoncée. □

Lemme 5.18. *Le morphisme canonique* $\varprojlim_n \mathbf{H}^0(U, \mathscr{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n) \to \varprojlim_n \mathbf{H}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n)$ *est injectif.*

Démonstration. La finitude de $\mathrm{Ker}(\rho)$ assure que $\varprojlim_n H^2(U, {}_{l^n}\mathrm{Ker}(\rho)) = 0$. On a donc un diagramme commutatif à lignes exactes (les groupes étant finis, on peut passer à la limite projective) :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \varprojlim_n \mathbf{H}^0(U, \mathscr{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n) \arrow[r] \arrow[d] & \varprojlim_n H^1(U, T_{\mathbf{Z}/l^n}(\mathscr{C})) \arrow[d] \\
& \varprojlim_n \mathbf{H}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n) \arrow[r] & \varprojlim_n H^1(k, T_{\mathbf{Z}/l^n}(C)) .
\end{tikzcd}$$

Or la dernière flèche verticale est injective (voir [18], II.2.9), donc ce diagramme assure le résultat. □

Lemme 5.19. *Pour toute place v de k hors de Σ,* $\varinjlim_n \mathbf{H}^1(\mathscr{O}_v, \widehat{\mathscr{C}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n) = 0$.

Démonstration. On écrit la suite exacte de cohomologie sur $\mathscr{O}_v$:

$$H^2(\mathscr{O}_v, T_{\mathbf{Z}/l^n}(\widehat{C})) \to \mathbf{H}^1(\mathscr{O}_v, \widehat{C} \otimes \mathbf{Z}/l^n) \xrightarrow{\epsilon_n} H^1(\mathscr{O}_v, {}_{l^n}\widehat{\mathrm{Ker}(\rho)}) \to H^3(\mathscr{O}_v, T_{\mathbf{Z}/l^n}(\widehat{C})) .$$

Les groupes $H^i(\mathscr{O}_v, T_{\mathbf{Z}/l^n}(\widehat{C}))$ sont nuls pour $i \geq 2$, donc ϵ_n est un isomorphisme. On prend la limite inductive : la finitude de $\mathrm{Ker}(\rho)$ implique que $\varinjlim_n {}_{l^n}\widehat{\mathrm{Ker}(\rho)} = 0$, donc on a $\varinjlim_n \mathbf{H}^1(\mathscr{O}_v, \widehat{C} \otimes \mathbf{Z}/l^n) = 0$.
□

L'objectif est désormais de passer à la limite sur V dans le lemme 5.17 pour en déduire la proposition 5.15. Définissons les morphismes de transition : si $V \to U$ est une immersion ouverte, la fonctorialité covariante de la cohomologie à support compact induit un morphisme canonique $\varprojlim_n \mathbf{D}^0(V, \mathscr{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n) \to \varprojlim_n \mathbf{D}^0(U, \mathscr{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n)$. En ce qui concerne $\widehat{\mathscr{C}}$, on considère le morphisme naturel $\varinjlim_n \mathbf{H}^1(U, \widehat{\mathscr{C}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n) \to \varinjlim_n \mathbf{H}^1(V, \widehat{\mathscr{C}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n)$, et grâce au lemme 5.19, le sous-groupe $\mathbf{D}^1(U, \varinjlim_n \widehat{\mathscr{C}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n)$ de $\varinjlim_n \mathbf{H}^1(U, \widehat{\mathscr{C}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n)$ s'envoie dans $\mathbf{D}^1(V, \varinjlim_n \widehat{\mathscr{C}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n)$, d'où un morphisme canonique $\mathbf{D}^1(U, \varinjlim_n \widehat{\mathscr{C}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n) \to \mathbf{D}^1(V, \varinjlim_n \widehat{\mathscr{C}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n)$.

Lemme 5.20. *On a des isomorphismes canoniques (V décrit les ouverts non vides de U) :*

(i) $\varprojlim_V \varprojlim_n \mathbf{D}^0(V, \mathscr{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n) \cong \varprojlim_n Ш^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n)$, *où les flèches de transition proviennent de la fonctorialité covariante de la cohomologie à support compact.*

(ii) $\varinjlim_V \mathbf{D}^1(V, \varinjlim_n \widehat{\mathscr{C}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n) \cong Ш^1(k, \varinjlim_n \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n)$*, où les flèches de transitions sont données par le lemme 5.19.*

Démonstration. (i) Le lemme 5.18 assure que l'on a $\bigcap_V \varprojlim_n \mathbf{D}^0(V, \mathscr{C} \otimes \mathbf{Z}/l^n) = \varprojlim_n Ш^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n)$, ce qui montre le premier point par définition des flèches de transition.

(ii) En considérant les images

$$\mathscr{D}^1(V, \varinjlim_n \widehat{\mathscr{C}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n) := \mathrm{Im}\left(\mathbf{D}^1(V, \varinjlim_n \widehat{\mathscr{C}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n) \to \varinjlim_n \mathbf{H}^1(k, \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n)\right),$$

dont la réunion sur tous les ouverts V donne exactement $Ш^1(k, \varinjlim_n \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n)$, on déduit de cette propriété un morphisme surjectif $\varinjlim_V \mathbf{D}^1(V, \varinjlim_n \widehat{\mathscr{C}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n) \to Ш^1(k, \varinjlim_n \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n)$. Ce dernier morphisme est injectif par les principes généraux de cohomologie étale : en effet, $\varinjlim_V \mathbf{H}^1(V, \varinjlim_n \widehat{\mathscr{C}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n) \to \mathbf{H}^1(k, \varinjlim_n \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n)$ est un isomorphisme par dévissage à partir du théorème VII.6.7 de [1].

□

On conclut la preuve de la proposition 5.15 de la façon suivante : le lemme 5.17 fournit une dualité parfaite entre le groupe profini $\varprojlim_n \mathbf{D}^0(V, \mathscr{C} \otimes \mathbf{Z}/l^n)$ et le groupe discret $\mathbf{D}^1(V, \varinjlim_n \widehat{\mathscr{C}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n)$. En passant à la limite sur les ouverts V, et en utilisant le lemme 5.20, on en déduit une dualité parfaite entre le groupe profini $\varprojlim_n Ш^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n)$ et le groupe discret $Ш^1(k, \varinjlim_n \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n)$. Ceci étant valable pour tout l, on en déduit une dualité parfaite entre le groupe compact $\mathrm{Ker}(\theta)$ et le groupe discret $Ш^1(k, \varinjlim_n \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$. □

Démonstration. (de la proposition 5.16)

1. On commence par un lemme technique :

Lemme 5.21. *Pour tout $n > 0$, le morphisme $\mathbf{P}^0(C)/n \to \prod_v \mathbf{H}^0(\widehat{k}_v, C)/n$ est injectif.*

Démonstration. D'après la preuve du lemme 5.3 de [13], il suffit de montrer que, pour presque toute place v, $\mathbf{H}^0(\widehat{\mathscr{O}}_v, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \to \mathbf{H}^0(\widehat{k}_v, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$ est injectif. On a un diagramme commutatif exact

$$\begin{tikzcd}
H^2(\widehat{\mathscr{O}}_v, {}_n\mathrm{Ker}(\rho)) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{H}^0(\widehat{\mathscr{O}}_v, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(\widehat{\mathscr{O}}_v, T_{\mathbf{Z}/n}(C)) \arrow[d] \\
H^2(\widehat{k}_v, {}_n\mathrm{Ker}(\rho)) \arrow[r] & \mathbf{H}^0(\widehat{k}_v, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \arrow[r] & H^1(\widehat{k}_v, T_{\mathbf{Z}/n}(C)) .
\end{tikzcd}$$

On suppose que v ne divise pas n. Alors $H^2(\widehat{\mathscr{O}}_v, {}_n\mathrm{Ker}(\rho)) = 0$ (puisque $H^2(\widehat{\mathscr{O}}_v, {}_n\mathrm{Ker}(\rho)) \cong H^2(\mathbf{F}_v, {}_n\mathrm{Ker}(\rho))$ car v ne divise pas n, et $\mathbf{F}_v$ est de dimension cohomologique 1), et la troisième flèche verticale est injective, car le groupe $H^1_v(\widehat{\mathscr{O}}_v, T_{\mathbf{Z}/n}(C))$ est le dual de $H^2(\widehat{\mathscr{O}}_v, \widehat{T_{\mathbf{Z}/n}(C)})$ qui est nul par dimension cohomologique. Cela assure l'injectivité de la seconde flèche verticale pour presque toute place v, et donc le lemme. □

Le lemme 5.21 assure que le diagramme commutatif suivant a ses lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbf{H}^0(k, C)/n \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{H}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \arrow[r] \arrow[d] & {}_n\mathbf{H}^1(k, C) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{P}^0(k, C)/n \arrow[r] & \mathbf{P}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \arrow[r] & {}_n\mathbf{P}^1(k, C) \arrow[r] & 0 .
\end{tikzcd} \tag{5}$$

On passe alors à la limite projective sur n : on obtient

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbf{H}^0(k,C)_\wedge \arrow[r] \arrow[d, "\theta_0"] & \varprojlim_n \mathbf{H}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \arrow[r] \arrow[d, "\theta"] & Q_1 \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathbf{P}^0(k,C)_\wedge \arrow[r] & \varprojlim_n \mathbf{P}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \arrow[r] & Q_2 \arrow[r] & 0 . \end{tikzcd} \tag{6}$$

Or Q_1 est un sous-groupe du module de Tate $T(\mathbf{H}^1(k,C))$, et donc $\mathrm{Ker}(\beta)$ est contenu dans $T(Ш^1(C))$. Or $Ш^1(C)$ est fini (voir théorème 5.7), donc β est injective. Donc $Ш^0_\wedge(C) = \mathrm{Ker}(\theta_0)$ est isomorphe à $\mathrm{Ker}(\theta)$.

2. Pour montrer le second point, on considère le diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbf{H}^1(k,\widehat{C}) \otimes \mathbf{Z}/n \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{H}^1(k, \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(k,\widehat{C}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathbf{H}^1(\widehat{k}_v,\widehat{C}) \otimes \mathbf{Z}/n \arrow[r] & \mathbf{H}^1(\widehat{k}_v, \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \arrow[r] & H^2(\widehat{k}_v,\widehat{C}) \arrow[r] & 0 . \end{tikzcd}$$

Puisque les groupes $\mathbf{H}^1(k,\widehat{C})$, $\mathbf{H}^2(k,\widehat{C})$, $\mathbf{H}^1(k_v,\widehat{C})$ et $\mathbf{H}^2(k_v,\widehat{C})$ sont de torsion, on en déduit le diagramme commutatif (après passage à la limite sur n, puis produit sur toutes les places v) :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{H}^1(k, \varinjlim_n \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & \mathbf{H}^2(k,\widehat{C}) \arrow[d] \\ \prod_v \mathbf{H}^1(\widehat{k}_v, \varinjlim_n \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \arrow[r, "\cong"] & \prod_v \mathbf{H}^2(\widehat{k}_v,\widehat{C}) . \end{tikzcd}$$

On déduit immédiatement de ce diagramme l'isomorphisme souhaité.

□

Il est alors clair que les propositions 5.15 et 5.16 impliquent le théorème 5.14. Reste à montrer la finitude de $Ш^2(\widehat{C})$. On remarque que l'on a un triangle exact $M[1] \to C \to T \to M[2]$, où $M := \mathrm{Ker}(\rho)$ est un k-groupe de type multiplicatif et $T := \mathrm{Coker}(\rho)$ un k-tore. Par Poitou-Tate, on a des isomorphismes de groupes finis $H^i(k,\widehat{T}) \to P^i(k,\widehat{T})$ ($i = 3$ ou 4). La finitude de $Ш^2(\widehat{C})$ résulte alors par dévissage de la finitude de $Ш^2(\widehat{M})$ (voir théorème 8.6.7 de [19] ou théorème 5.23). Cela conclut la preuve de 5.14. □

Lemme 5.22. *Le groupe* $Ш^0_\wedge(C)$ *est canoniquement isomorphe au groupe* $\mathrm{Ker}\left(\mathbf{H}^0(k,C)^\wedge \to \mathbf{P}^0(C)^\wedge\right)$.

Démonstration. Voir proposition 5.4 de [13]. On sait en effet que $n\mathbf{H}^0(k_v,C) \subset \mathbf{H}^0(k_v,C)$ est un sous-groupe ouvert d'indice fini (cas des tores et finitude de $H^1(k_v,T_1)$). Cela assure que $\mathbf{P}^0(C)_\wedge \to \mathbf{P}^0(C)^\wedge$ est injectif. On montre ensuite la surjectivité du morphisme $\mathrm{Ker}(\theta_0) \to \mathrm{Ker}(\beta_0)$ dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{H}^0(k,C)_\wedge \arrow[r, "\theta_0"] \arrow[d] & \mathbf{P}^0(C)_\wedge \arrow[d] \\ \mathbf{H}^0(k,C)^\wedge \arrow[r, "\beta_0"] & \mathbf{P}^0(C)^\wedge . \end{tikzcd}$$

Montrons que $\theta_0 : \mathbf{H}^0(k,C)_\wedge \to \mathbf{P}^0(k,C)_\wedge$ est strict. Soit $n \geq 1$, considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
H^2(k, {}_n\mathrm{Ker}(\rho)) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{H}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \arrow[r] \arrow[d, "f"] & H^1(k, T_{\mathbf{Z}/n}(C)) \arrow[d, "h"] \\
P^2(k, {}_n\mathrm{Ker}(\rho)) \arrow[r, "g"] \arrow[d] & \mathbf{P}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \arrow[r] \arrow[d] & P^1(k, T_{\mathbf{Z}/n}(C)) \arrow[d] \\
H^0(k, {}_n\widehat{\mathrm{Ker}(\rho)})^D \arrow[r] & \mathbf{H}^0(k, \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)^D \arrow[r] & H^1(k, T_{\mathbf{Z}/n}(\widehat{C}))^D
\end{tikzcd}$$

dont les lignes, ainsi que les deux colonnes extrêmes, sont exactes (pour les colonnes, c'est la suite de Poitou-Tate). Montrons que Im f est un sous-groupe discret de $\mathbf{P}^0(k,C)$: on a une suite exacte de groupes topologiques

$$0 \to \mathrm{Im}\ f \cap \mathrm{Im}\ g \to \mathrm{Im}\ f \to \mathrm{Im}\ h\,, \tag{7}$$

où tous les groupes sont munis de la topologie induite par les topologies adéliques sur $\mathbf{P}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$ et $P^1(k, T_{\mathbf{Z}/n}(C))$. Le groupe $H^1(k, T_{\mathbf{Z}/n}(C))$ est discret, et h est d'image fermée par Poitou-Tate, donc h est d'image localement compacte, et donc h est stricte par [12], 5.29. Donc Im h est discret. Le groupe $P^2(k, {}_n\mathrm{Ker}(\rho))$ est discret, g est d'image fermée donc localement compacte par Poitou-Tate, et donc Im g est discret, grâce à [12], 5.29. Donc dans la suite (7), le groupe Im f admet le groupe discret Im $f \cap$ Im g comme sous-groupe ouvert (c'est l'image réciproque de l'ouvert $\{0\}$ du groupe discret Im h par le morphisme Im $f \to$ Im h), donc le groupe Im f est discret. On considère alors le diagramme (5) : on a montré que l'image de $f : \mathbf{H}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \to \mathbf{P}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$ est discrète. Le diagramme (5), ainsi que [12], 5.29, assurent que les morphismes $\mathbf{H}^0(k,C)/n \to \mathbf{H}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$ et $\mathbf{P}^0(k,C)/n \to \mathbf{P}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$ sont stricts. Donc l'image de $p_n : \mathbf{H}^0(k,C)/n \to \mathbf{P}^0(k,C)/n$ s'identifie (topologiquement) à un sous-groupe de l'image de $\mathbf{H}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \to \mathbf{P}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$, laquelle est discrète. Donc l'image de p_n est discrète, donc fermée, donc localement compacte, donc p_n est strict (par [12], 5.29). Enfin, $\mathrm{Ker}(p_n)$ est fini et $\mathbf{H}^0(k,C)/n$ est discret, donc la limite projective des morphismes stricts p_n est un morphisme strict $\theta_0 : \mathbf{H}^0(k,C)_\wedge \to \mathbf{P}^0(k,C)_\wedge$ (voir [13], corrigenda). Ce fait, joint à l'injectivité de $\mathbf{P}^0(k,C)_\wedge \to \mathbf{P}^0(k,C)^\wedge$, assure que $\mathrm{Ker}(\theta_0) \to \mathrm{Ker}(\beta_0)$ est un isomorphisme. □

5.4.2 Cas où ρ est surjective

Théorème 5.23. *Supposons ρ surjective. Alors on a une dualité parfaite de groupes finis, fonctorielle en C :*

$$Ш^0(C) \times Ш^2(\widehat{C}) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

Remarque 5.24. Ce résultat est équivalent au théorème 8.6.7 de [19].

Démonstration. Fixons un nombre premier l et un ouvert $U := \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{k,S})$ de $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_k)$ sur lequel C s'étend en un complexe surjectif de U-tores $\mathscr{C}$, de sorte que l soit inversible sur U. On remarque alors les faits suivants :

- Le morphisme $\mathbf{H}^0(U, \mathscr{C})\{l\} \to \mathbf{H}^0(k, C)\{l\}$ est injectif si U est assez petit. En effet, on a un triangle exact $\mathscr{T} \to \mathscr{C}[-1] \to \mathscr{F} \to \mathscr{T}[1]$, où $\mathscr{T}$ est un U-tore et $\mathscr{F}$ un U-schéma en groupes de type multiplicatif fini. Alors $H^0(U, \mathscr{F})\{l\} \to H^0(k, F)\{l\}$ est un isomorphisme (F est localement constant) et $H^1(U, \mathscr{F})\{l\} \to H^1(k, F)\{l\}$ et $H^1(U, \mathscr{T})\{l\} \to H^1(k, T)\{l\}$ sont injectifs (voir la proposition 2.9 de [18] pour le premier, et la proposition 4.1 et les corrigenda de [13], ainsi que la preuve de la proposition 5.3 pour le second).

- De même, $\mathbf{H}^2(U,\widehat{\mathscr{C}})\{l\} \to \mathbf{H}^2(k,\widehat{C})\{l\}$ est injectif.
- Pour tout ouvert V de U, les groupes $\mathbf{D}^0(V,\mathscr{C})\{l\}$ et $\mathbf{D}^2(V,\widehat{\mathscr{C}})\{l\}$ sont finis. En effet, $H^1(V,\mathscr{F})\{l\}$ et $D^1(V,\mathscr{T})\{l\}$ sont finis, et $H^0(k_v,F)$ est fini pour toute place v, donc le lemme du serpent assure la finitude de $\mathbf{D}^0(V,\mathscr{C})\{l\}$. Pour le groupe $\mathbf{D}^2(V,\widehat{\mathscr{C}})\{l\}$, on utilise le même dévissage.
- Comme dans la preuve du lemme 4.7 de [13], on déduit des points précédents qu'il existe un ouvert U_0 dans U tel que $\mathbf{D}^0(V,\mathscr{C})\{l\} = Ш^0(k,C)\{l\}$ et $\mathbf{D}^2(V,\widehat{\mathscr{C}})\{l\} = Ш^2(k,\widehat{C})\{l\}$ pour tout V dans U_0.
- On conclut la preuve du théorème 5.23 grâce au corollaire 4.6, en remarquant que $\mathbf{H}^0(k_v,C) \to \mathbf{H}^0(k_v,C)^\wedge$ est un isomorphisme car $\mathbf{H}^0(k_v,C)$ est fini sous l'hypothèse de surjectivité de ρ. □

6 Deux suites de Poitou-Tate

Définissons les morphismes apparaissant dans les suites de Poitou-Tate. Soit k un corps de nombres et C un complexe de tores sur k. On a des morphismes $\theta^i : \mathbf{H}^i(k,C) \to \mathbf{P}^i(k,C)$ définis par restriction. On définit aussi des morphismes $\mathrm{loc}^i : \mathbf{P}^i(k,C)$ ou $\mathbf{P}^i(k,C)^\wedge \to \mathbf{H}^{1-i}(k,\widehat{C})^D$, obtenus en composant la localisation $\mathbf{H}^{1-i}(k,\widehat{C}) \to \mathbf{P}^{1-i}(k,\widehat{C})$ avec la somme des accouplements locaux $\mathbf{H}^{i-1}(\widehat{k}_v,\widehat{C}) \times \mathbf{H}^i(\widehat{k}_v,C) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ (voir théorème 3.1). Le théorème 3.3 assure que cette construction définit bien un morphisme loc^i. Enfin, on a des morphismes $\mathrm{glob}^i : \mathbf{H}^{2-i}(k,\widehat{C})^D \to \mathbf{H}^i(k,C)$ ou $\mathbf{H}^i(k,C)^\wedge$, induits par la dualité globale (théorèmes 5.14, 5.7 et 5.12) : par exemple, glob^1 est la composée du morphisme dual de l'inclusion $Ш^1(\widehat{C}) \to \mathbf{H}^1(k,\widehat{C})$ avec l'isomorphisme de dualité (théorème 5.7) $Ш^1(\widehat{C})^D \cong Ш^1(C)$ et avec l'inclusion $Ш^1(C) \to \mathbf{H}^1(k,C)$.

6.1 Cas où Ker (ρ) est fini

6.1.1 La suite exacte de Poitou-Tate

Théorème 6.1. *Soit $C = [T_1 \xrightarrow{\rho} T_2]$ un complexe de tores défini sur k, avec* $\mathrm{Ker}(\rho)$ *fini. On a alors deux suites exactes, fonctorielles en C :*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbf{H}^{-1}(k,C) \arrow[r] & \mathbf{P}^{-1}(k,C) \arrow[r] & \mathbf{H}^2(k,\widehat{C})^D \arrow[d] \\
& \mathbf{H}^1(k,\widehat{C})^D \arrow[d] & \mathbf{P}^0(k,C)^\wedge \arrow[l] & \mathbf{H}^0(k,C)^\wedge \arrow[l] \\
& \mathbf{H}^1(k,C) \arrow[r] & \mathbf{P}^1(k,C) \arrow[r] & \mathbf{H}^0(k,\widehat{C})^D \arrow[d] \\
0 & \mathbf{H}^{-1}(k,\widehat{C})^D \arrow[l] & \mathbf{P}^2(k,C) \arrow[l] & \mathbf{H}^2(k,C)\,, \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbf{H}^{-1}(k,\widehat{C})^{\wedge} \arrow[r] & \mathbf{P}^{-1}(k,\widehat{C})^{\wedge} \arrow[r] & \mathbf{H}^{2}(k,C)^{D} \arrow[d] \\
 & \mathbf{H}^{1}(k,C)^{D} \arrow[d] & \mathbf{P}^{0}(k,\widehat{C}) \arrow[l] & \mathbf{H}^{0}(k,\widehat{C}) \arrow[l] \\
 & \mathbf{H}^{1}(k,\widehat{C}) \arrow[r] & \mathbf{P}^{1}(k,\widehat{C})_{\mathrm{tors}} \arrow[r] & \left(\mathbf{H}^{0}(k,C)^{D}\right)_{\mathrm{tors}} \arrow[d] \\
0 & \mathbf{H}^{-1}(k,C)^{D} \arrow[l] & \mathbf{P}^{2}(k,\widehat{C}) \arrow[l] & \mathbf{H}^{2}(k,\widehat{C}) . \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Démonstration. – Montrons l'exactitude de la deuxième ligne. On commence par le lemme suivant :

Lemme 6.2. *On suppose* $\mathrm{Ker}(\rho)$ *fini. Alors on a une suite exacte*

$$\varprojlim_n \mathbf{H}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \to \varprojlim_n \mathbf{P}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \to \mathbf{H}^0(k, \varinjlim_n \widehat{C} \otimes \mathbf{Z}/n)^D .$$

Démonstration. Tout d'abord, la suite du lemme est un complexe, car pour tout n, la loi de réciprocité globale assure que la suite $\mathbf{H}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \to \mathbf{P}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \to \mathbf{H}^0(k, \widehat{C} \otimes \mathbf{Z}/n)^D$ est un complexe.

Considérons le diagramme à lignes exactes suivant :

$$\begin{tikzcd}
H^0(k, T_{\mathbf{Z}/n}(C)) \arrow[r, "a_n"] \arrow[d] & H^2(k, {}_n\mathrm{Ker}(\rho)) \arrow[r, "b_n"] \arrow[d] & \mathbf{H}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \arrow[r, "c_n"] \arrow[d] & H^1(k, T_{\mathbf{Z}/n}(C)) \arrow[r, "d_n"] \arrow[d] & H^3(k, {}_n\mathrm{Ker}(\rho)) \arrow[d, "\simeq"] \\
P^0(k, T_{\mathbf{Z}/n}(C)) \arrow[r, "a'_n"] \arrow[d] & P^2(k, {}_n\mathrm{Ker}(\rho)) \arrow[r, "b'_n"] \arrow[d] & \mathbf{P}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \arrow[r, "c'_n"] \arrow[d] & P^1(k, T_{\mathbf{Z}/n}(C)) \arrow[r, "d'_n"] \arrow[d] & P^3(k, {}_n\mathrm{Ker}(\rho)) \\
H^2(k, T_{\mathbf{Z}/n}(\widehat{C})^D \arrow[r] & H^0(k, {}_n\widehat{\mathrm{Ker}(\rho)}))^D \arrow[r] & \mathbf{H}^0(k, \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)^D \arrow[r] & H^1(k, T_{\mathbf{Z}/n}(\widehat{C}))^D \arrow[r] & 0 .
\end{tikzcd}$$

Définissons les groupes topologiques suivants : $P_1^n := \mathrm{Ker}(c_n) = \mathrm{Im}(b_n)$, $Q_1^n := \mathrm{Ker}(d_n) = \mathrm{Im}(c_n)$, $P_2^n := \mathrm{Ker}(c'_n) = \mathrm{Im}(b'_n)$ et $Q_2^n := \mathrm{Ker}(d'_n) = \mathrm{Im}(c'_n)$.

Les groupes de la colonne de gauche étant finis ou compacts, et l'image du morphisme $P^0(k, T_{\mathbf{Z}/n}(C)) \to P^2(k, {}_n\mathrm{Ker}(\rho))$ étant finie (car compacte et discrète), le théorème 7.3 de [14] assure que l'on a un diagramme à lignes exactes (où $\varprojlim^{(1)}$ désigne le foncteur dérivé du foncteur $\varprojlim$) :

$$\begin{tikzcd}
0 = \varprojlim_n H^2(k, {}_n\mathrm{Ker}(\rho)) \arrow[r] \arrow[d] & \varprojlim_n \mathbf{H}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \arrow[r] \arrow[d] & \varprojlim_n Q_1^n \arrow[r] \arrow[d] & \varprojlim_n^{(1)} P_1^n \arrow[d] \\
0 = \varprojlim_n P^2(k, {}_n\mathrm{Ker}(\rho)) \arrow[r] \arrow[d] & \varprojlim_n \mathbf{P}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \arrow[r] \arrow[d] & \varprojlim_n Q_2^n \arrow[r] \arrow[d] & \varprojlim_n^{(1)} P_2^n \\
0 = \varprojlim_n H^0(k, {}_n\widehat{\mathrm{Ker}(\rho)})^D \arrow[r] & \varprojlim_n \mathbf{H}^0(k, \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)^D \arrow[r] & \varprojlim_n H^1(k, T_{\mathbf{Z}/n}(\widehat{C}))^D \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{8}$$

(les groupes de gauche sont nuls car $\mathrm{Ker}(\rho)$ est fini). On dispose du diagramme à lignes exactes suivant :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \varprojlim_n Q_1^n \arrow[r] \arrow[d] & \varprojlim_n H^1(k, T_{\mathbf{Z}/n}(C)) \arrow[r] \arrow[d] & \varprojlim_n R_1^n \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & \varprojlim_n Q_2^n \arrow[r] & \varprojlim_n P^1(k, T_{\mathbf{Z}/n}(C)) \arrow[r] \arrow[d] & \varprojlim_n R_2^n \\ & & \varprojlim_n H^1(k, T_{\mathbf{Z}/n}(\widehat{C}))^D & \end{tikzcd} \tag{9}$$

où R_1^n et R_2^n sont les noyaux respectifs des morphismes $H^3(k, {}_n\mathrm{Ker}(\rho)) \to \mathbf{H}^1(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$ et $P^3(k, {}_n\mathrm{Ker}(\rho)) \to \mathbf{P}^1(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$. Les groupes $H^3(k, {}_n\mathrm{Ker}(\rho))$ et $P^3(k, {}_n\mathrm{Ker}(\rho))$ étant isomorphes par Poitou-Tate, l'exactitude à gauche du foncteur $\varprojlim_n$ assure que $\varprojlim_n R_1^n \to \varprojlim_n R_2^n$ est injective.

Montrons le lemme : soit $\alpha \in \varprojlim_n \mathbf{P}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$ d'image nulle dans $\varprojlim_n \mathbf{H}^0(k, \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)^D$. On veut montrer qu'un tel élément se relève dans $\varprojlim_n \mathbf{H}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$. On pousse α dans $\varprojlim_n P^1(k, T_{\mathbf{Z}/n}(C))$. L'élément $\beta \in \varprojlim_n P^1(k, T_{\mathbf{Z}/n}(C))$ ainsi obtenu s'envoie sur 0 dans $\varprojlim_n H^1(k, T_{\mathbf{Z}/n}(\widehat{C}))^D$.

Par Poitou-Tate, la deuxième colonne du diagramme (9) est exacte (on utilise ici la finitude de $Ш^1(k, T_{\mathbf{Z}/n}(C))$ pour passer à la limite projective dans la suite exacte de Poitou-Tate), et donc β se relève en un élément $\gamma \in \varprojlim_n H^1(k, T_{\mathbf{Z}/n}(C))$. Or β provient de $\varprojlim_n Q_2^n$ (c'est l'image de α), donc l'image de β dans $\varprojlim_n R_2^n$ est nulle, et par injectivité de la flèche $\varprojlim_n R_1^n \to \varprojlim_n R_2^n$, l'image de γ dans $\varprojlim_n R_1^n$ est nulle. Donc par exactitude de la première ligne du diagramme (9), γ provient de $\varprojlim_n Q_1^n$.

Revenons alors au diagramme initial (8) : $\alpha \in \varprojlim_n \mathbf{P}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$, son image $\gamma \in \varprojlim_n Q_2^n$ provient d'un élément $\gamma' \in \varprojlim_n Q_1^n$. Montrons désormais que γ' se relève dans $\varprojlim_n \mathbf{H}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$: il suffit pour cela de montrer que le morphisme $\varprojlim_n^{(1)} P_1^n \to \varprojlim_n^{(1)} P_2^n$ est injectif (c'est en fait un isomorphisme).

Or $T_{\mathbf{Z}/n}(C)$ est fini, donc $\varprojlim_n^{(1)} H^0(k, T_{\mathbf{Z}/n}(C)) = 0$, et donc par définition de P_1^n, on a

$$\varprojlim_n^{(1)} H^2(k, {}_n\mathrm{Ker}(\rho)) \cong \varprojlim_n^{(1)} P_1^n \,. \tag{10}$$

De même, le groupe $P^0(k, T_{\mathbf{Z}/n}(C))$ est compact, donc $\varprojlim_n^{(1)} P^0(k, T_{\mathbf{Z}/n}(C)) = 0$ (voir théorème 7.3 de [14]) et donc

$$\varprojlim_n^{(1)} P^2(k, {}_n\mathrm{Ker}(\rho)) \cong \varprojlim_n^{(1)} P_2^n \,. \tag{11}$$

Soit $I_n := \mathrm{Im}(H^2(k, {}_n\mathrm{Ker}(\rho)) \to P^2(k, {}_n\mathrm{Ker}(\rho)))$. On a un isomorphisme ($Ш^2(k, {}_n\mathrm{Ker}(\rho))$ est fini) :

$$\varprojlim_n^{(1)} H^2(k, {}_n\mathrm{Ker}(\rho)) \cong \varprojlim_n^{(1)} I_n \,. \tag{12}$$

Or par Poitou-Tate, le conoyau de $H^2(k, {}_n\mathrm{Ker}(\rho)) \to P^2(k, {}_n\mathrm{Ker}(\rho))$ est exactement le groupe fini $H^0(k, {}_n\widehat{\mathrm{Ker}(\rho)})^D$, donc on a une suite exacte $0 \to I_n \to P^2(k, {}_n\mathrm{Ker}(\rho)) \to$

$H^0(k, {}_n\widehat{\mathrm{Ker}(\rho)})^D \to 0$ qui après passage à la limite projective donne la suite exacte :

$$\varprojlim_n H^0(k, {}_n\widehat{\mathrm{Ker}(\rho)})^D \to \varprojlim_n^{(1)} I_n \to \varprojlim_n^{(1)} P^2(k, {}_n\mathrm{Ker}(\rho)) \to 0$$

Or par hypothèse $\mathrm{Ker}(\rho)$ est fini, donc $\varprojlim_n H^0(k, {}_n\widehat{\mathrm{Ker}(\rho)})^D = 0$, donc cela prouve que le morphisme

$$\varprojlim_n^{(1)} I_n \to \varprojlim_n^{(1)} P^2(k, {}_n\mathrm{Ker}(\rho)) \tag{13}$$

est un isomorphisme. Ainsi, en combinant les isomorphismes (10), (11), (12) et (13), on a bien montré que le morphisme $\varprojlim_n^{(1)} P_1^n \to \varprojlim_n^{(1)} P_2^n$ était un isomorphisme.
On a donc désormais un élément $\tau \in \varprojlim_n \mathbf{H}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$ relevant $\gamma' \in \varprojlim_n Q_1^n$. Notons τ' l'image de τ dans $\varprojlim_n \mathbf{P}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$. Par commutativité et exactitude du diagramme (8), α et τ' dans $\varprojlim_n \mathbf{P}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$ ont même image dans $\varprojlim_n Q_2^n$. Donc la différence se relève dans $\varprojlim_n P^2(k, {}_n\mathrm{Ker}(\rho))$. Mais l'hypothèse de finitude sur $\mathrm{Ker}(\rho)$ assure que le groupe $\varprojlim_n P^2(k, {}_n\mathrm{Ker}(\rho))$ est trivial, donc $\tau' = \alpha$, ce qui conclut la preuve du lemme 6.2. $\square$

On considère alors à nouveau le diagramme (6), commutatif, dont les deux premières lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbf{H}^0(k,C)_\wedge \arrow[r] \arrow[d, "\theta_0"] & \varprojlim_n \mathbf{H}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \arrow[r] \arrow[d, "\theta"] & Q_1 \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{P}^0(k,C)_\wedge \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_0'"] & \varprojlim_n \mathbf{P}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \arrow[r] \arrow[d] & Q_2 \arrow[r] & 0 \\
 & \mathbf{H}^1(k, \widehat{C})^D \arrow[r] & \mathbf{H}^0(k, \varinjlim_n \widehat{C} \otimes \mathbf{Z}/n)^D & & .
\end{tikzcd}$$

La colonne centrale est exacte (lemme 6.2), et la colonne de gauche est un complexe par la loi de réciprocité du corps de classes. Or β est injectif (voir la preuve de la proposition 5.16), donc une chasse au diagramme assure que la colonne de gauche est exacte. Sa complétion profinie fournit le complexe suivant :

$$\mathbf{H}^0(k,C)^\wedge \to \mathbf{P}^0(k,C)^\wedge \to \mathbf{H}^1(k, \widehat{C})^D .$$

Montrons que celui-ci est exact (voir [13], preuve du théorème 5.6) : en reprenant la preuve du lemme 6.2, et en utilisant le fait que

$$\mathrm{Coker}\left(\varprojlim_n H^1(k, T_{\mathbf{Z}/n}(C)) \to \varprojlim_n P^1(k, T_{\mathbf{Z}/n}(C))\right)$$

est profini (suite de Poitou-Tate pour les modules finis), on montre facilement que $\mathrm{Coker}\left(\mathbf{H}^0(k,C)_\wedge \to \mathbf{P}^0(k,C)_\wedge\right)$ est profini, donc $I := \mathrm{Im}\left(\mathbf{P}^0(k,C)_\wedge \xrightarrow{\gamma_0'} \mathbf{H}^1(k, \widehat{C})^D\right)$ est un sous-groupe fermé profini de $\mathbf{H}^1(k, \widehat{C})^D$. Or on a une suite exacte

$$\mathbf{H}^0(k,C)^\wedge \to \mathbf{P}^0(k,C)^\wedge \xrightarrow{\gamma_0'} I^\wedge \to 0 ,$$

et I étant profini, on a $I^\wedge = I$ et donc $I^\wedge \to \mathbf{H}^1(k,\widehat{C})^D$ est injective, ce qui assure l'exactitude de la deuxième ligne du diagramme du théorème 6.1, à savoir

$$\mathbf{H}^0(k,C)^\wedge \to \mathbf{P}^0(k,C)^\wedge \to \mathbf{H}^1(k,\widehat{C})^D\,.$$

– Pour la troisième ligne, le raisonnement est plus direct : on considère le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
H^3(k,{}_n\mathrm{Ker}(\rho)) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \mathbf{H}^1(k,C\otimes^{\mathbf{L}}\mathbf{Z}/n) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(k,T_{\mathbf{Z}/n}(C)) \arrow[r] \arrow[d] & H^4(k,{}_n\mathrm{Ker}(\rho)) \arrow[d, "\simeq"] \\
P^3(k,{}_n\mathrm{Ker}(\rho)) \arrow[r] & \mathbf{P}^1(k,C\otimes^{\mathbf{L}}\mathbf{Z}/n) \arrow[r] \arrow[d] & P^2(k,T_{\mathbf{Z}/n}(C)) \arrow[r] \arrow[d] & P^4(k,{}_n\mathrm{Ker}(\rho)) \\
 & \mathbf{H}^{-1}(k,\widehat{C}\otimes^{\mathbf{L}}\mathbf{Z}/n)^D \arrow[r, "\simeq"] & H^0(k,T_{\mathbf{Z}/n}(\widehat{C}))^D & .
\end{tikzcd} \tag{14}$$

La troisième colonne est exacte, et les deux flèches verticales extrêmes sont des isomorphismes. Une chasse au diagramme assure que la deuxième colonne est exacte. En outre, les finitudes de $H^3(k,{}_n\mathrm{Ker}(\rho))$ et $Ш^2(k,T_{\mathbf{Z}/n}(C))$ assurent celle de $Ш^1(k,C\otimes^{\mathbf{L}}\mathbf{Z}/n)$, donc on peut prendre la limite projective de la deuxième colonne pour obtenir la suite exacte suivante (puisque $\varprojlim_n^{(1)} Ш^1(k,C\otimes^{\mathbf{L}}\mathbf{Z}/n)=0$) :

$$\varprojlim_n \mathbf{H}^1(k,C\otimes^{\mathbf{L}}\mathbf{Z}/n) \to \varprojlim_n \mathbf{P}^1(k,C\otimes^{\mathbf{L}}\mathbf{Z}/n) \to \varprojlim_n \mathbf{H}^{-1}(k,\widehat{C}\otimes^{\mathbf{L}}\mathbf{Z}/n)^D\,.$$

Or on dispose pour tout n de la suite exacte naturelle,

$$0 \to \mathbf{H}^1(k,C)/n \to \mathbf{H}^1(k,C\otimes^{\mathbf{L}}\mathbf{Z}/n) \to {}_n\mathbf{H}^2(k,C) \to 0\,.$$

D'où un diagramme commutatif à lignes exactes (où $Q_i = \varprojlim_n Q_i^n$) :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbf{H}^1(k,C)_\wedge \arrow[r] \arrow[d] & \varprojlim_n \mathbf{H}^1(k,C\otimes^{\mathbf{L}}\mathbf{Z}/n) \arrow[r] \arrow[d] & Q_1 \arrow[r] \arrow[d, "\beta'"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{P}^1(k,C)_\wedge \arrow[r] \arrow[d] & \varprojlim_n \mathbf{P}^1(k,C\otimes^{\mathbf{L}}\mathbf{Z}/n) \arrow[r] \arrow[d] & Q_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & (\mathbf{H}^0(k,\widehat{C})^D)_\wedge \arrow[r] & \varprojlim_n \mathbf{H}^{-1}(k,\widehat{C}\otimes^{\mathbf{L}}\mathbf{Z}/n)^D \arrow[r] & Q_3 \arrow[r] & 0\,.
\end{tikzcd}$$

La deuxième colonne est exacte, et $\mathrm{Ker}(\beta')$ est contenu dans $\varprojlim_n {}_nШ^2(C)$. Or $Ш^2(C)$ est fini (voir théorème 5.12), donc son module de Tate est nul, donc β' est injective et une chasse au diagramme assure que la première colonne est exacte. Reste à montrer que l'on peut "enlever" les complétions. Pour cela, on utilise la finitude de $\mathrm{Ker}(\rho)$ pour montrer que les groupes $\mathbf{H}^1(k,C)$ et $\mathbf{P}^1(k,C)$ sont de N-torsion pour un N suffisamment grand. En effet, on peut dévisser C dans une suite exacte de complexes de la forme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(\rho) \arrow[r] \arrow[d, "\rho"] & T_1 \arrow[r] \arrow[d] & T_1' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & T_2 \arrow[r, "="] & T_2 \arrow[r] & 0\,,
\end{tikzcd}$$

où T_1' est le k-sous-tore de T_2 image de T_1 par ρ. Notons alors $S := T_2/T_1'$ le tore quotient. Le diagramme précédent induit alors une suite exacte $H^2(k, \mathrm{Ker}(\rho)) \to \mathbf{H}^1(k, C) \to H^1(k, S)$. Or, par Hilbert 90 et par restriction-corestriction, le groupe $H^1(k, S)$ est de r-torsion, où $r := [L : k]$ est le degré d'une extension L/k déployant le tore S, et le groupe $H^2(k, \mathrm{Ker}(\rho))$ est de r'-torsion, où r' est le cardinal du groupe fini $\mathrm{Ker}(\rho)(\overline{k})$. Donc $\mathbf{H}^1(k, C)$ est de $N = rr'$-torsion. Cela assure que $\mathbf{H}^1(k, C) \cong \mathbf{H}^1(k, C)_\wedge$ et $\mathbf{P}^1(k, C) \cong \mathbf{P}^1(k, C)_\wedge$. Alors l'exactitude de la suite $\mathbf{H}^1(k, C)_\wedge \to \mathbf{P}^1(k, C)_\wedge \to (\mathbf{H}^0(k, \widehat{C})^D)_\wedge$ implique celle de la ligne 3 dans le théorème 6.1 : $\mathbf{H}^1(k, C) \to \mathbf{P}^1(k, C) \to \mathbf{H}^0(k, \widehat{C})^D$.

– Pour la dernière ligne : on considère le diagramme commutatif à colonnes exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
\mathbf{H}^1(k,C)/n \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{P}^1(k,C)/n \arrow[r] \arrow[d] & \left({}_n\mathbf{H}^0(k,\widehat{C})\right)^D \arrow[d] \\
\mathbf{H}^1(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{P}^1(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{H}^{-1}(k, \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)^D \arrow[d] \\
{}_n\mathbf{H}^2(k,C) \arrow[r] \arrow[d] & {}_n\mathbf{P}^2(k,C) \arrow[r] \arrow[d] & \left(\mathbf{H}^{-1}(k,\widehat{C})/n\right)^D \arrow[d] \\
0 & 0 & 0\,.
\end{tikzcd} \tag{15}$$

On a montré dans la preuve du point précédent l'exactitude de la deuxième ligne. On passe à la limite inductive sur n dans le diagramme (15). Puisque $\mathbf{H}^0(k, \widehat{C})_{\mathrm{tors}}$ est fini, le module de Tate $T(\mathbf{H}^0(k, \widehat{C}))$ est nul, et donc on obtient le diagramme suivant dont la première ligne est exacte ($\mathbf{H}^2(k, C)$ et $\mathbf{P}^2(k, C)$ sont de torsion, car $\mathbf{H}^2(\widehat{\mathscr{O}}_v, \mathscr{C}) = 0$ pour presque toute place v de k) :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{H}^1(k, \varinjlim_n C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \arrow[r] \arrow[d] & \varinjlim_n \mathbf{P}^1(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \arrow[r] \arrow[d] & \left(\varprojlim_n \mathbf{H}^{-1}(k, \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)\right)^D \arrow[d, "\simeq"] \\
\mathbf{H}^2(k,C) \arrow[r] & \mathbf{P}^2(k,C) \arrow[r] & \left(\mathbf{H}^{-1}(k,\widehat{C})_\wedge\right)^D\,.
\end{tikzcd}$$

Les deux premières flèches verticales sont des isomorphismes, puisque $\varinjlim_n \mathbf{H}^1(k, C)/n = 0$ et $\varinjlim_n \mathbf{P}^1(k, C)/n = 0$ car $\mathbf{H}^1(k, C)$ et $\mathbf{P}^1(k, C)$ sont de torsion Donc la suite

$$\mathbf{H}^2(k, C) \to \mathbf{P}^2(k, C) \to \left(\mathbf{H}^{-1}(k, \widehat{C})_\wedge\right)^D$$

est exacte. En outre, le groupe discret de type fini $\mathbf{H}^{-1}(k, \widehat{C})$ a même dual que son complété $\mathbf{H}^{-1}(k, \widehat{C})_\wedge$, et on remarque que le morphisme $\mathbf{P}^2(k, C) \to \left(\mathbf{H}^{-1}(k, \widehat{C})\right)^D$ est surjectif (puisque c'est le cas du morphisme $P^2(k, T) \to H^0(k, \widehat{T})^D$ pour un k-tore T : voir théorème I.4.20 de [18]). D'où l'exactitude de la dernière ligne du diagramme du théorème.

– La première ligne est le début de la suite exacte de Poitou-Tate associée au module fini $\mathrm{Ker}(\rho)$.
– Montrons l'exactitude dans les "coins" du diagramme : c'est une conséquence de la dualité globale : $Ш^0_{\wedge}(C) \cong Ш^2(\widehat{C})^D$ pour le coin en haut à droite (théorème 5.14), $Ш^1(C) \cong Ш^1(\widehat{C})^D$ pour le coin au milieu à gauche (théorème 5.7), et enfin $Ш^2(C) \cong Ш^0(\widehat{C})^D$ pour le coin en bas à droite (théorème 5.12).
– Considérons maintenant la suite duale : les raisonnements sont similaires à ceux des points précédents. Pour la première ligne, il suffit de dualiser la dernière ligne de la première suite de Poitou-Tate, ou alors de montrer par dévissage l'exactitude de la suite $\varprojlim_n \mathbf{H}^{-1}(k, \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \to \varprojlim_n \mathbf{P}^{-1}(k, \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \to \varprojlim_n \mathbf{H}^1(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)^D$ et d'utiliser la finitude de $Ш^0(\widehat{C})$ (voir lemme 5.9). Pour la deuxième ligne, on montre par dévissage l'exactitude de $\varinjlim_n \mathbf{H}^{-1}(k, \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \to \varinjlim_n \mathbf{P}^{-1}(k, \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \to \varinjlim_n \mathbf{H}^1(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)^D$, puis on utilise la finitude de $Ш^2(C)$ et le fait que $\mathbf{H}^0(k, \widehat{C})$ et $\mathbf{P}^0(k, \widehat{C})$ sont de torsion (puisque $\mathrm{Ker}(\rho)$ est fini) pour en déduire l'exactitude de la deuxième ligne. En ce qui concerne la troisième ligne, on montre par dévissage l'exactitude de la suite $\varinjlim_n \mathbf{H}^0(k, \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \to \varinjlim_n \mathbf{P}^0(k, \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \to \varinjlim_n \mathbf{H}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)^D$, et la finitude de $Ш^1(C)$ assure l'exactitude de le troisième ligne du diagramme. Pour la quatrième ligne, on montre l'exactitude de $\varprojlim_n \mathbf{H}^2(k, \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \to \varprojlim_n \mathbf{P}^2(k, \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \to \varprojlim_n \mathbf{H}^{-2}(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)^D$ et on conclut par finitude de $\mathbf{H}^3(k, \widehat{C})$ et par le fait que $\mathbf{H}^2(k, \widehat{C})$ et $\mathbf{P}^2(k, \widehat{C})$ soient de N-torsion pour un certain entier N. Enfin, pour les coins de ce diagramme, on utilise à nouveau les théorèmes 5.7, 5.12 et 5.14.

$\square$

6.1.2 Lien avec une suite de Borovoi et description explicite des accouplements

Dans toute cette partie, l'hypothèse de finitude de $\mathrm{Ker}(\rho)$ est essentielle. On définit le complexe $\check{C} := \left[X_*(T_1) \xrightarrow{\rho_*} X_*(T_2)\right]$, où $X_*(T_i)$ désigne le modules des cocaractères du tore T_i, et où $X_*(T_1)$ est en degré -1. Suivant Borovoi (voir [3], chapitre 4), on considère la suite exacte courte de complexes :

$$0 \to \check{C} \otimes \overline{k}^* \to \check{C} \otimes \overline{\mathbf{A}}^* \to \check{C} \otimes \overline{\mathbf{C}}^* \to 0 \tag{16}$$

où $\overline{\mathbf{A}}$ désigne $\mathbf{A}_k \otimes_k \overline{k}$ et $\overline{\mathbf{C}}^* := \overline{\mathbf{A}}^*/\overline{k}^*$. Écrivons la suite exacte d'hypercohomologie associée :

$$\dots \to \mathbf{H}^i(k, \check{C} \otimes \overline{k}^*) \to \mathbf{H}^i(k, \check{C} \otimes \overline{\mathbf{A}}^*) \to \mathbf{H}^i(k, \check{C} \otimes \overline{\mathbf{C}}^*) \to \mathbf{H}^{i+1}(k, \check{C} \otimes \overline{k}^*) \to \dots \tag{17}$$

On compare ici cette suite exacte avec la suite de Poitou-Tate du théorème 6.1, et on obtient une description explicite (en termes de cup-produit) des accouplements des théorèmes 5.7, 5.12 et 5.14.

Borovoi identifie certains des groupes qui apparaissent dans la suite (17) (voir [3], chapitre 4), de façon fonctorielle en C : $\mathbf{H}^i(k, \check{C} \otimes \overline{k}^*) \cong \mathbf{H}^i(k, C)$ pour tout i, $\mathbf{H}^i(k, \check{C} \otimes \overline{\mathbf{A}}^*) \cong \bigoplus_v \mathbf{H}^i(\widehat{k}_v, C)$ pour $i \geq 1$. On a aussi un isomorphisme $\mathbf{H}^0(k, \check{C} \otimes \overline{\mathbf{A}}^*) \cong \mathbf{P}^0(k, C)$, et on remarque que le morphisme $\mathbf{H}^3(k, C) \to \mathbf{P}^3(k, C)$ est un isomorphisme. Enfin, on dispose des accouplements de dualité globale suivants, induits par le cup-produit :

$$\mathbf{H}^i(k, \check{C} \otimes \overline{\mathbf{C}}^*) \times \mathbf{H}^{1-i}(k, \widehat{C}) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \tag{18}$$

pour tout i, induisant des isomorphismes $\mathbf{H}^1(k, \check{C} \otimes \overline{\mathbf{C}}^*) \cong \mathbf{H}^0(k, \widehat{C})^D$ et $\mathbf{H}^2(k, \check{C} \otimes \overline{\mathbf{C}}^*) \cong \mathbf{H}^{-1}(k, \widehat{C})^D$ (voir [18], exemple I.1.11 et corollaire I.4.7). On utilise également les isomorphismes de dualité suivants, qui s'obtiennent par dévissage à partir du cas des tores (voir [18], corollaire I.4.7) : $\mathbf{H}^0(k, \check{C} \otimes \overline{\mathbf{C}}^*)^\wedge \cong \mathbf{H}^1(k, \widehat{C})^D$ et $\mathbf{H}^{-1}(k, \check{C} \otimes \overline{\mathbf{C}}^*)^\wedge \cong \mathbf{H}^2(k, \widehat{C})^D$. Enfin, on a besoin d'identifier les flèches de dualité globale, c'est-à-dire qu'il faut comparer les morphismes $\mathbf{H}^i(k, \widehat{C})^D \to \mathbf{H}^{2-i}(k, C)$ induits respectivement par les théorèmes 5.7, 5.12 et 5.14, et par les identifications précédentes dans la suite exacte (17). Pour cela, on utilise la section 6 de [13] : on considère les trois suites exactes suivantes de complexes de Γ_k-modules :

$$0 \to C(\overline{k}) \to C(\overline{\mathbf{A}}) \to C(\overline{\mathbf{C}}) \to 0\,, \tag{19}$$

$0 \to \widehat{C}(\overline{k}) \to \widehat{C}(\overline{\mathbf{A}}) \to \widehat{C}(\overline{\mathbf{C}}) \to 0$ et $0 \to \overline{k}^*[1] \to \overline{\mathbf{A}}^*[1] \to \overline{\mathbf{C}}^*[1] \to 0$, où par définition $C(\overline{\mathbf{C}})$ est le complexe $[T_1(\overline{\mathbf{A}})/T_1(\overline{k}) \to T_2(\overline{\mathbf{A}})/T_2(\overline{k})]$. On a alors un isomorphisme naturel entre la suite (16) et la suite (19).

On dispose d'un accouplement naturel $C(\overline{\mathbf{A}}) \otimes^{\mathbf{L}} \widehat{C}(\overline{\mathbf{A}}) \to \overline{\mathbf{A}}^*[1]$ induisant l'accouplement usuel $C(\overline{k}) \otimes^{\mathbf{L}} \widehat{C}(\overline{k}) \to \overline{k}^*[1]$. On en déduit alors comme dans la section 6 de [13] un accouplement

$$\mathrm{Ker}\left(\mathbf{H}^i(k, C(\overline{k})) \to \mathbf{H}^i(k, C(\overline{\mathbf{A}}))\right) \times \mathrm{Ker}\left(\mathbf{H}^{2-i}(k, \widehat{C}(\overline{k})) \to \mathbf{H}^{2-i}(k, \widehat{C}(\overline{\mathbf{A}}))\right) \to H^2(k, \overline{\mathbf{C}}^*) \cong \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \tag{20}$$

défini explicitement par le cup-produit $\mathbf{H}^{i-1}(k, C(\overline{C})) \times \mathbf{H}^{2-i}(k, \widehat{C}(\overline{k})) \to H^2(k, \overline{\mathbf{C}}^*) \cong \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. Or on peut identifier les deux groupes apparaissant dans l'accouplement (20) : $\mathrm{Ker}\left(\mathbf{H}^i(k, C(\overline{k})) \to \mathbf{H}^i(k, C(\overline{\mathbf{A}}))\right) \cong Ш^i(k, C)$ et $\mathrm{Ker}\left(\mathbf{H}^{2-i}(k, \widehat{C}(\overline{k})) \to \mathbf{H}^{2-i}(k, \widehat{C}(\overline{\mathbf{A}}))\right) \cong Ш^{2-i}(k, \widehat{C})$. Et la preuve de la proposition 6.1 de [13] (adaptée au contexte des complexes de tores) assure que les accouplements (20) coïncident avec les accouplements des théorèmes 5.7, 5.12 et 5.14. Cette identification donne en particulier une description explicite des accouplements apparaissant dans ces théorèmes, en termes de cup-produits en cohomologie galoisienne. Pour finir la comparaison avec la suite exacte (17), on constate que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{H}^{i-1}(k, \check{C} \otimes \overline{C}^*) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\partial_{\mathrm{B}}"] & \mathbf{H}^{2-i}(k, \widehat{C})^D \arrow[d, "\partial_{\mathrm{PT}}"] \\
\mathbf{H}^i(k, \check{C} \otimes \overline{k}^*) \arrow[r, "\psi"] & \mathbf{H}^i(k, C)
\end{tikzcd}$$

(en remplaçant $\mathbf{H}^i(k, C)$ par son complété pour $i = 0$), où le morphisme ∂_{B} est le cobord provenant de la suite exacte (16), ∂_{PT} provient des théorèmes de dualité globale 5.7, 5.12 et 5.14, ϕ est induit par le cup-produit (18) et ψ est l'identification naturelle $\mathbf{H}^i(k, \check{C} \otimes \overline{k}^*) \cong \mathbf{H}^i(k, C)$. Et cette commutativité résulte de la comparaison établie précédemment entre les accouplements des théorèmes 5.7, 5.12 et 5.14 et les accouplements (20).

Résumons les résultats de cette section : on a un diagramme commutatif de suites exactes, fonctoriel en C, entre la suite exacte longue (17) et la suite exacte de Poitou-Tate du théorème 6.1 :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathbf{H}^i(k, \check{C} \otimes \overline{k}^*) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{H}^i(k, \check{C} \otimes \overline{\mathbf{A}}^*) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{H}^i(k, \check{C} \otimes \overline{\mathbf{C}}^*) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{H}^{i+1}(k, \check{C} \otimes \overline{k}^*) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathbf{H}^i(k, C)^{(\wedge)} \arrow[r] & \mathbf{P}^i(k, C) \arrow[r] & \mathbf{H}^{1-i}(k, \widehat{C})^D \arrow[r] & \mathbf{H}^{i+1}(k, C)^{(\wedge)} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

où $\mathbf{H}^i(k, C)^{(\wedge)} := \mathbf{H}^i(k, C)^\wedge$ si $i = 0$, et $\mathbf{H}^i(k, C)^{(\wedge)} := \mathbf{H}^i(k, C)$ sinon. Dans ce diagramme commutatif, on sait en outre que les morphismes verticaux sont des isomorphismes si $i \geq 1$, et des flèches de complétion profinie si $i = 0$. On peut donc dire en quelque sorte que la suite de Poitou-Tate du théorème 6.1 est la complétion profinie de la suite d'hypercohomologie (4.3.1) de [3]. Le fait de considérer la suite "complétée" fait apparaître des groupes plus facilement identifiables : par exemple, si C est un complexe de tores associé à un k-groupe réductif (voir [3] par exemple), le groupe $\mathbf{H}^0(k, \check{C} \otimes \overline{\mathbf{C}})$ peut sembler mystérieux dans ce contexte, alors que sa complétion profinie s'identifie naturellement au dual du groupe de Brauer algébrique de G.

6.2 Cas où ρ est surjective

Théorème 6.3. *Soit M un k-groupe de type multiplicatif. On a deux suites exactes, fonctorielles en M :*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0(k,M)^\wedge \arrow[r] & P^0(k,M)^\wedge \arrow[r] & H^2(k,\widehat{M})^D \arrow[d] & \\
& H^1(k,\widehat{M})^D \arrow[d] & P^1(k,M) \arrow[l] & H^1(k,M) \arrow[l] & \\
& H^2(k,M) \arrow[r] & P^2(k,M) \arrow[r] & H^0(k,\widehat{M})^D \arrow[r] & 0\,,
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0(k,\widehat{M})^\wedge \arrow[r] & P^0(k,\widehat{M})^\wedge \arrow[r] & H^2(k,M)^D \arrow[d] & \\
& H^1(k,M)^D \arrow[d] & P^1(k,\widehat{M}) \arrow[l] & H^1(k,\widehat{M}) \arrow[l] & \\
& H^2(k,\widehat{M}) \arrow[r] & P^2(k,\widehat{M})_{\mathrm{tors}} \arrow[r] & \left(H^0(k,M)^D\right)_{\mathrm{tors}} \arrow[r] & 0\,.
\end{tikzcd}$$

Remarque 6.4. Cette suite de Poitou-Tate généralise les suites usuelles de Poitou-Tate pour les modules galoisiens finis (voir [18], théorème I.4.10) et pour les tores (voir le théorème 5.6 de Harari et Szamuely dans [13]). Elle n'était pas connue pour des groupes de type multiplicatif généraux : voir la remarque après le corollaire I.4.21 de [18], ainsi que la suite de Poitou-Tate partielle du théorème 8.6.14 de [19]. Citons également la thèse de P. Jossen (voir [15]) où cette suite de Poitou-Tate a été obtenue de façon indépendante.

Démonstration. On voit M comme le noyau d'un morphisme surjectif de k-tores, $M = \mathrm{Ker}(\rho : T_1 \to T_2)$, et on note $C := [T_1 \xrightarrow{\rho} T_2]$ le complexe de tores. On a un quasi-isomorphisme $C \cong M[1]$. La preuve est très similaire à celle du théorème 6.1, à la différence que l'on utilise ici $\varinjlim_n T_{\mathbf{Z}/n}(C) = 0$ (au lieu de $\varprojlim_n {}_n\mathrm{Ker}(\rho) = 0$).

- Pour la première ligne, un dévissage via le triangle ${}_nT_1 \to {}_nT_2 \to (C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)[-1] \to {}_nT_1[1]$ assure que
$$\varprojlim_n \mathbf{H}^{-1}(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \to \varprojlim_n \mathbf{P}^{-1}(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \to \varprojlim_n \mathbf{H}^1(k, \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)^D$$
est exacte. Pour cela, on utilise notamment le fait que $\varprojlim_n Ш^1(k, {}_nT_i) = \mathrm{Ker}\left(T_i(k)_\wedge \to P^0(k, T_i)_\wedge\right) = 0$, ainsi que la finitude du groupe $Ш^0(C)$.
- Pour la deuxième ligne, on déduit l'exactitude de la suite
$$\varinjlim_n \mathbf{H}^{-1}(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \to \varinjlim_n \mathbf{P}^{-1}(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \to \varinjlim_n \mathbf{H}^1(k, \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)^D$$

du fait que $\varinjlim_n T_{\mathbf{Z}/n}(C) = 0$, et on conclut par finitude de $Ш^2(\widehat{C})$.

– Pour la troisième ligne, la suite

$$\varinjlim_n \mathbf{H}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \to \varinjlim_n \mathbf{P}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \to \varinjlim_n \mathbf{H}^0(k, \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)^D$$

est exacte, et on conclut par finitude de $Ш^1(\widehat{C})$ et par le fait que $\mathbf{H}^1(k, C)$ et $\mathbf{P}^1(k, C)$ sont de torsion.

– Pour la suite duale, on utilise des arguments similaires.

□

Remerciements

Je remercie très chaleureusement David Harari pour son aide et sa patience. Je remercie également Mikhail Borovoi pour ses précieux commentaires. Je remercie enfin le rapporteur pour sa lecture attentive du manuscrit et pour ses remarques importantes.

Références

[1] Michael Artin, Alexander Grothendieck et Jean-Louis Verdier, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 269-270-305, Springer-Verlag, Berlin, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4), 1973.

[2] Siegfried Bosch, Werner Lütkebohmert et Michel Raynaud, *Néron models*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), vol. 21, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[3] Mikhail Borovoi, *Abelian Galois cohomology of reductive groups*, Mem. Amer. Math. Soc., **132** (1998), no. 626, viii+50.

[4] Mikhail Borovoi, *A cohomological obstruction to the Hasse principle for homogeneous spaces*, Math. Ann., **314** (1999), no. 3, 491–504.

[5] Pierre Deligne, *Théorie de Hodge. III*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1974) no. 44, 5–77.

[6] Cyril Demarche, *Le défaut d'approximation forte dans les groupes linéaires connexes* (2009), prépublication, `arXiv :0906.3456v1[math.NT]`.

[7] Cyril Demarche, *Méthodes cohomologiques pour l'étude des points rationnels sur les espaces homogènes* (2009), Thèse de doctorat, disponible sur `http ://www.math.u-psud.fr/~demarche/thesedemarche.pdf`.

[8] Michel Demazure et Alexander Grothendieck, *Schémas en groupes*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1962/64 (SGA 3). Lecture Notes in Mathematics, Vol. 151-152-153, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[9] Eberhard Freitag et Reinhardt Kiehl, *Étale cohomology and the Weil conjecture*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), vol. 13, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[10] Christian D. González-Avilés, *Arithmetic duality theorems for 1-motives over function fields* (2008), prépublication, `http ://arxiv.org/abs/0709.4255`.

[11] Marvin J. Greenberg, *Rational points in Henselian discrete valuation rings*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1966), no. 31, 59–64.

[12] Edwin Hewitt et Kenneth A. Ross, *Abstract harmonic analysis. Vol. I*, deuxième édition, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 115, Springer-Verlag, Berlin, 1979, Structure of topological groups, integration theory, group representations.

[13] David Harari et Tamás Szamuely, *Arithmetic duality theorems for 1-motives*, J. reine angew. Math., **578** (2005), 93–128, et *Corrigenda for "Aritmetic duality theorems for 1-motives"*, disponible sur `http ://www.math.u-psud/~harari/errata/corrigcrelle.pdf`.

[14] C. U. Jensen *Les foncteurs dérivés de* $\varprojlim$ *et leurs applications en théorie des modules*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 254, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[15] Peter Jossen, *The Arithmetic of* 1*-motives*, Thèse de doctorat (2009), disponible sur `http ://www.jossenpeter.ch/Maths.htm`.

[16] Robert E. Kottwitz et Diana Shelstad, *Foundations of twisted endoscopy*, Astérisque (1999), no. 255, vi+190.

[17] James S. Milne, *Étale cohomology*, Princeton Mathematical Series, vol. 33, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1980.

[18] James S. Milne, *Arithmetic duality theorems*, deuxième édition, BookSurge, LLC, Charleston, SC, 2006.

[19] Jürgen Neukirch, Alexander Schmidt et Kay Wingberg, *Cohomology of number fields*, deuxième édition, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 323, Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[20] Louise Nyssen, *Hypercohomologie des complexes de tores et paramétrisation de Langlands*, J. Algebra, **172** (1995), no. 2, 354–378.

[21] Jean-Pierre Serre, *Cohomologie galoisienne*, cinquième édition, Lecture Notes in Mathematics, vol. 5, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[22] Charles A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 38, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.