COHOMOLOGIE DE HOCHSCHILD NON ABÉLIENNE ET EXTENSIONS DE FAISCEAUX EN GROUPES

par

Cyril Demarche

Résumé. — Un théorème classique dû à Mostow assure que sur un corps de caractéristique nulle, toute extension d'un groupe algébrique réductif par un groupe algébrique unipotent est scindée, et que deux sections de cette extension sont conjuguées sur le corps de base. Suivant des idées de Giraud et Breen, on introduit dans ce texte des ensembles de cohomologie non abélienne qui classifient les extensions d'un schéma en groupes par un autre, ainsi que les sections de telles extensions. On utilise ensuite ces ensembles de cohomologie pour obtenir des versions du résultat de Mostow sur des schémas de base plus généraux que des corps de caractéristique nulle.

Abstract. — A classical result by Mostow states that over a field of characteristic zero, any extension of a reductive algebraic group by a unipotent algebraic group splits, and that any two sections of this extension are conjugate over the ground field. Following ideas of Giraud and Breen, we introduce in this text some non-abelian cohomology sets that classify both extensions of a given group scheme by another one, and sections of such extensions. We use those cohomology sets to get new versions of Mostow's result over base schemes that are more general than fields of characteristic zero.

1. Introduction

L'objectif de ce texte est d'utiliser et de préciser les constructions classiques de Giraud ([**Gir71**] VIII.7) et Breen ([**Bre90**], paragraphe 8) sur la classification des extensions de faisceaux en groupes en termes de gerbes, afin d'obtenir des versions du théorème suivant de Mostow sur des bases plus générales qu'un corps de caractéristique nulle (voir par exemple [**Mos56**], théorème 7.1) :

Mots clefs. — Cohomologie non abélienne, schémas en groupes, torseurs, gerbes.
MSC 2000: 14L15, 18F20, 20J06, 20G07.

***Théorème* (Mostow).** — *Soit k un corps de caractéristique nulle. Soit* G *un k-groupe réductif et* H *un k-groupe unipotent. Alors toute suite exacte de k-groupes algébriques*

$$1 \longrightarrow \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{G} \longrightarrow 1$$

est scindée, et deux sections de cette suite sont conjuguées par un élément de $\mathrm{H}(k)$.

Le point de départ et la motivation pour ce texte est l'exposé XVII de [**SGA3**], et en particulier la section 5 de cet exposé (voir notamment le théorème 5.1.1) qui traite de la question des extensions d'un groupe de type multiplicatif par un groupe unipotent sur un corps quelconque. Une autre référence importante est la section 2 de l'exposé XXVI de [**SGA3**], qui traite des sous-groupes de Levi pour les sous-groupes paraboliques d'un schéma en groupes réductif sur une base quelconque.

Remerciements. — Je tiens à remercier vivement Philippe Gille pour m'avoir suggéré de travailler sur ces questions. Je remercie également les deux rapporteurs pour leur lecture attentive du manuscript et leurs précieux commentaires.

2. Cohomologie des G-foncteurs en groupes

Dans cette section, on définit des ensembles de cohomologie de Hochschild pour des foncteurs en groupes non commutatifs. On renvoie à [**DG70**], chapitre II, paragraphe 3, pour le cas de la cohomologie de Hochschild des foncteurs en groupes commutatifs.

Dans toute cette section, $\mathscr{A}$ désigne une catégorie, munie d'un objet initial A_0. Par définition, un foncteur en groupes sur $\mathscr{A}$ est un foncteur $\mathrm{F} : \mathscr{A} \to \underline{\mathrm{Groupes}}$ à valeurs dans la catégories des groupes.

2.1. Degré 0.

— Soient G et H deux $\mathscr{A}$-foncteurs en groupes.

Définition 2.1.1. — Une action (à gauche) de G sur H est un foncteur $m : \mathrm{G} \times \mathrm{H} \to \mathrm{H}$ vérifiant les conditions suivantes : pour tout $\mathrm{A} \in \mathscr{A}$, pour tout $g, g' \in \mathrm{G}(\mathrm{A})$, tout $h, h' \in \mathrm{H}(\mathrm{A})$, $m(g, m(g', h)) = m(gg', h)$ et $m(g, h.h') = m(g, h).m(g, h')$. On dira alors que m définit une structure de $\mathscr{A}$-foncteur en G-groupes sur H.

Définition 2.1.2. — Soit H un $\mathscr{A}$-foncteur en G-groupes. On définit le groupe $\mathrm{H}^0_{\mathrm{coc}}(\mathrm{G}, \mathrm{H})$ comme l'ensemble $\mathrm{H}^{\mathrm{G}}(\mathrm{A}_0)$, où H^{G} désigne le foncteur des points fixes de H sous G.

2.2. Degré 1. — Donnons une définition cocyclique de l'ensemble $\mathrm{H}^1_{\mathrm{coc}}(\mathrm{G},\mathrm{H})$:

Définition 2.2.1. — Si H est un G-groupe, on note $\mathrm{H}^1_{\mathrm{coc}}(\mathrm{G},\mathrm{H})$ le quotient de l'ensemble $\mathrm{Crois}(\mathrm{G},\mathrm{H})$ des homomorphismes croisés de G dans H (un tel morphisme croisé est une famille indexée par $\mathscr{A}$ de morphismes croisés $\mathrm{G}(\mathrm{A}) \to \mathrm{H}(\mathrm{A})$) par l'action usuelle de $\mathrm{H}(\mathrm{A}_0)$.

Soit $f : \mathrm{H}_1 \to \mathrm{H}_2$ un morphisme de $\mathscr{A}$-foncteurs en groupes. On définit $\mathrm{Sect}_{\mathscr{A}}(f : \mathrm{H}_1 \to \mathrm{H}_2)$ comme l'ensemble des sections du morphisme de groupes f, quotienté par la relation d'équivalence suivante : $s, s' : \mathrm{H}_2 \to \mathrm{H}_1$ sont dites équivalentes lorsqu'il existe $h \in \mathrm{Ker}(f)(\mathrm{A}_0)$ tel que $s' = h.s.h^{-1}$. On dispose alors de l'interprétation suivante :

Proposition 2.2.2. — *Si* H *est un* $\mathscr{A}$*-foncteur en* G*-groupes, alors on a une bijection naturelle d'ensembles pointés :*

$$\mathrm{H}^1_{\mathrm{coc}}(\mathrm{G},\mathrm{H}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sect}_{\mathscr{A}}(\mathrm{H} \rtimes \mathrm{G} \xrightarrow{\pi} \mathrm{G})$$

où $\pi : \mathrm{H} \rtimes \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ *est la seconde projection.*

Démonstration. — Définissons deux applications $\mathrm{H}^1_{\mathrm{coc}}(\mathrm{G},\mathrm{H}) \to \mathrm{Sect}_{\mathscr{A}}(\mathrm{H} \rtimes \mathrm{G} \xrightarrow{\pi} \mathrm{G})$ et $\mathrm{Sect}_{\mathscr{A}}(\mathrm{H} \rtimes \mathrm{G} \xrightarrow{\pi} \mathrm{G}) \to \mathrm{H}^1_{\mathrm{coc}}(\mathrm{G},\mathrm{H})$: pour la première, on associe à un morphisme croisé $\varphi : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ la section (multiplicative) $s : g \mapsto (\varphi(g), g)$ de π. Pour la seconde, on associe à une section $s : \mathrm{G} \to \mathrm{H} \rtimes \mathrm{G}$ de π le morphisme croisé $\varphi : g \mapsto \mathrm{pr}_{\mathrm{H}}(s(g))$, où $\mathrm{pr}_{\mathrm{H}} : \mathrm{H} \rtimes \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ est la projection sur le premier facteur. On vérifie alors aisément que ces deux applications sont réciproques l'une de l'autre. Cela conclut la preuve. □

2.3. Degré 2. — On rappelle que si H est un foncteur en groupes, alors $\mathrm{Autext}(\mathrm{H})$ désigne le foncteur des automorphismes extérieurs de H, i.e. $\mathrm{Autext}(\mathrm{H})(\mathrm{A}) := \mathrm{Aut}(\mathrm{H}(\mathrm{A}))/\mathrm{Int}(\mathrm{H}(\mathrm{A}))$.

Définition 2.3.1. — Une structure de $\mathscr{A}$-foncteur en G-groupes extérieurs sur H est la donnée d'un morphisme de $\mathscr{A}$-foncteurs en groupes $\varphi : \mathrm{G} \to \mathrm{Autext}(\mathrm{H})$.

Remarque 2.3.2. — Cela revient à se donner une famille de morphismes de groupes $\mathrm{G}(\mathrm{A}) \to \mathrm{Autext}(\mathrm{H}(\mathrm{A}))$, fonctoriellement en A.

Définition 2.3.3. — Soit H un $\mathscr{A}$-foncteur en G-groupes extérieurs. Un 2-cocycle sur G à valeurs dans H est un couple (f, g) de morphismes de foncteurs $f : \mathrm{G} \to \mathrm{Aut}(\mathrm{H})$ et $g : \mathrm{G} \times \mathrm{G} \to \mathrm{H}$, vérifiant les conditions suivantes (pour tout $\mathrm{A} \in \mathscr{A}$ et tout $s, t, u \in \mathrm{G}(\mathrm{A})$) :

$$\begin{cases} f \bmod \mathrm{Int}(\mathrm{H}) = \varphi \\ f_s \circ f_t = \mathrm{int}(g_{s,t}) \circ f_{st} \\ f_s(g_{t,u}).g_{s,tu} = g_{s,t}.g_{st,u}\,. \end{cases}$$

On note $\mathrm{Z}^2(\mathrm{G}, \mathrm{H})$ l'ensemble des 2-cocycles.

Définition 2.3.4. — Deux 2-cocycles (f, g) et (f', g') sont dits équivalents s'il existe un morphisme de foncteurs $h : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ tel que

$$\begin{cases} f'_s & = & \mathrm{int}(h_s) \circ f_s \\ g'_{s,t} & = & h_s f_s(h_t) g_{s,t} h_{st}^{-1}\,. \end{cases}$$

La classe d'équivalence d'un élément $(f, g) \in \mathrm{Z}^2(\mathrm{G}, \mathrm{H})$ est notée $[(f, g)]$. L'ensemble des classes d'équivalence est noté $\mathrm{H}^2_{\mathrm{coc}}(\mathrm{G}, \mathrm{H})$.

Un 2-cocycle (f, g) est dit neutre si $g_{s,t} = 1$ pour tout $s, t \in \mathrm{G}$. Une classe $\alpha \in \mathrm{H}^2_{\mathrm{coc}}(\mathrm{G}, \mathrm{H})$ est dite neutre si elle est représentée par un 2-cocycle neutre.

L'ensemble $\mathrm{H}^2_{\mathrm{coc}}(\mathrm{G}, \mathrm{H})$ est ainsi un ensemble marqué par les classes neutres.

Comparons l'ensemble $\mathrm{H}^2_{\mathrm{coc}}(\mathrm{G}, \mathrm{H})$ avec l'ensemble des classes d'extensions de G par H.

Définition 2.3.5. — Soit H un $\mathscr{A}$-foncteur en G-groupes extérieurs. Notons $\varphi : \mathrm{G} \to \mathrm{Autext}(\mathrm{H})$ l'action extérieure de G sur H. Une φ-extension de G par H est une suite exacte courte de $\mathscr{A}$-foncteurs en groupes

$$1 \longrightarrow \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{G} \longrightarrow 1$$

(i.e. pour tout $\mathrm{A} \in \mathscr{A}$, la suite $1 \to \mathrm{H}(\mathrm{A}) \to \mathrm{E}(\mathrm{A}) \to \mathrm{G}(\mathrm{A}) \to 1$ est exacte) telle que

– le morphisme $\mathrm{E} \to \mathrm{G}$ soit scindé comme morphisme de foncteurs.

– l'action extérieure de G sur H induite par cette suite exacte soit φ.

On note $\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}(\mathrm{G}, \mathrm{H}; \varphi)$ l'ensemble des classes d'équivalence de telles extensions, où deux extensions E et E′ sont dites équivalentes s'il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \mathrm{H} \arrow[r] \arrow[d, "="] & \mathrm{E} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{G} \arrow[r] \arrow[d, "="] & 1 \\ 1 \arrow[r] & \mathrm{H} \arrow[r] & \mathrm{E}' \arrow[r] & \mathrm{G} \arrow[r] & 1\,. \end{tikzcd}$$

L'ensemble $\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}(\mathrm{G}, \mathrm{H}; \varphi)$ est marqué par les classes d'extensions scindées.

Proposition 2.3.6. — *Il existe un isomorphisme naturel d'ensembles marqués :*

$$\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}(\mathrm{G}, \mathrm{H}; \varphi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^2_{\mathrm{coc}}(\mathrm{G}, \mathrm{H})\,.$$

Démonstration. — Commençons par construire le morphisme : soit

$$1 \longrightarrow \mathrm{H} \xrightarrow{i} \mathrm{E} \xrightarrow{\pi} \mathrm{G} \longrightarrow 1$$

une φ-extension de G par H. Soit ϵ une section (fonctorielle) de π. On définit $f : \mathrm{G} \to \mathrm{Aut(H)}$ et $g : \mathrm{G} \times \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ par les formules suivantes : $f_s := \mathrm{int}(\epsilon(s))$ et $g_{s,t} := \epsilon(s).\epsilon(t).\epsilon(s.t)^{-1}$. On vérifie que $(f, g) \in \mathrm{Z}^2(\mathrm{G}, \mathrm{H})$, et que sa classe dans $\mathrm{H}^2_{\mathrm{coc}}(\mathrm{G}, \mathrm{H})$ ne dépend pas de la section ϵ choisie. Enfin, deux φ-extensions équivalentes conduisent à la même classe dans $\mathrm{H}^2_{\mathrm{coc}}(\mathrm{G}, \mathrm{H})$. On a donc défini l'application $\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}(\mathrm{G}, \mathrm{H}; \varphi) \to \mathrm{H}^2_{\mathrm{coc}}(\mathrm{G}, \mathrm{H})$. Construisons sa réciproque : si $(f, g) \in \mathrm{Z}^2(\mathrm{G}, \mathrm{H})$, on définit une extension E de G par H de la façon suivante : $\mathrm{E} := \mathrm{H} \times \mathrm{G}$ comme foncteur, et la structure de groupe est définie par

$$(s, t).(s', t') := (s.f_t(s').g_{t,t'}, t.t') .$$

On a bien une suite exacte naturelle de foncteurs en groupes

$$1 \longrightarrow \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{G} \longrightarrow 1 ,$$

clairement scindée comme suite de foncteurs, et on vérifie que l'action extérieure de G sur H qu'elle induit est exactement φ. D'où une application $\mathrm{H}^2_{\mathrm{coc}}(\mathrm{G}, \mathrm{H}) \to \mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}(\mathrm{G}, \mathrm{H}; \varphi)$.

On conclut la preuve en vérifiant que ces constructions sont inverses l'une de l'autre. □

3. Cohomologie des G-faisceaux en groupes

Dans cette section, on donne une version des constructions précédentes (qui concernent les extensions de foncteurs en groupes) pour les extensions de faisceaux en groupes.

Soit S un site, dont on supposera pour simplifier dans toute la suite qu'il admet un objet terminal. Soient G et H deux faisceaux en groupes sur S. On définit ici les ensembles de cohomologie suivants, en termes de classes d'isomorphie de certains objets (torseurs, gerbes) :

– Si H est muni d'une action de G sur S, on définit un groupe $\mathrm{H}^0_0(\mathrm{G}, \mathrm{H})$ et un ensemble pointé $\mathrm{H}^1_0(\mathrm{G}, \mathrm{H})$.
– Si H est muni d'une action extérieure de G sur S, on définit un ensemble marqué $\mathrm{H}^2_0(\mathrm{G}, \mathrm{H})$.

Avant de commencer, rappelons qu'étant donné H un S-faisceau en groupes et P un S-torseur sous H, on dispose du groupe tordu ${}_{\mathrm{P}}\mathrm{H}$ (noté ${}^{\mathrm{P}}\mathrm{H}$ dans [**Gir71**]). Pour des généralités concernant la torsion par un torseur, on renvoie par exemple à [**Gir71**], section III.2.3.

3.1. Degré 0. —

Définition 3.1.1. — Une action (à gauche) de G sur H est une structure de S-objet à opérateurs à gauche $(\mathrm{H}, \mathrm{G}, m)$, pour laquelle l'opération $m : \mathrm{G} \times \mathrm{H} \to \mathrm{H}$ vérifie la compatibilité suivante :

$$m(g, h.h') = m(g, h).m(g, h') \,.$$

On dit alors que m définit une structure de S-G-groupe sur H.

La définition du groupe $\mathrm{H}^0_0(\mathrm{G}, \mathrm{H})$ est la plus naturelle :

Définition 3.1.2. — Soit H un S-G-groupe. On définit le groupe $\mathrm{H}^0_0(\mathrm{G}, \mathrm{H})$ comme le groupe des sections globales du faisceau des points fixes (voir [**SGA3**], VIII, 6.e)) H^{G}, i.e.

$$\mathrm{H}^0_0(\mathrm{G}, \mathrm{H}) := \mathrm{H}^0(\mathrm{S}, \mathrm{H}^{\mathrm{G}}) \,.$$

3.2. Degré 1. —

Définition 3.2.1. — Soit H un S-G-groupe. Un S-G-H-torseur est un faisceau P sur S, muni d'une structure $(\mathrm{P}, \mathrm{H}, \alpha)$ de S-torseur à gauche sous H et d'une structure $(\mathrm{P}, \mathrm{G}, \beta)$ de S-objet à opérateurs à gauche, vérifiant la compatibilité suivante :

$$\beta(g, \alpha(h, p)) = \alpha(m(g, h), \beta(g, p)) \,.$$

Remarque 3.2.2. — La condition de compatibilité se réécrit de manière plus intuitive sous la forme suivante :

$${}^g(h.p) = ({}^g h).({}^g p) \,.$$

Remarque 3.2.3. — On peut représenter un tel S-G-H-torseur sous la forme suivante :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G} \circlearrowleft \mathrm{P} \arrow[d, "\mathrm{H}"'] \\ \mathrm{S} \,. \end{tikzcd}$$

Un exemple évident de S-G-H-torseur est le suivant : on note $\mathrm{P} = \mathrm{H}_a$ le H-torseur trivial (muni de l'action de H par translation à droite). Alors P est naturellement muni de l'action m de G sur H. Cela définit une structure de S-G-H-torseur sur H_a. Ce torseur est appelé le S-G-H-torseur trivial.

Définition 3.2.4. — Soient P et Q deux S-G-H-torseurs. Un morphisme $f : \mathrm{P} \to \mathrm{Q}$ de S-G-H-torseurs est un S-morphisme tel que f soit G-équivariant et H-équivariant.

Mentionnons le résultat suivant, dont la preuve est laissée au lecteur :

Lemme 3.2.5. — *La catégorie* $\mathcal{T}ors(\mathrm{S};\mathrm{G},\mathrm{H})$ *des* S-G-H-*torseurs est un groupoïde.*

Définition 3.2.6. — Soit H un S-G-groupe. On définit $\mathrm{H}^1_0(\mathrm{G},\mathrm{H})$ comme l'ensemble des classes d'isomorphisme de S-G-H-torseurs. C'est un ensemble non vide, pointé par la classe du S-G-H-torseur trivial H_a.

Notons que l'on dispose d'une application naturelle $\omega^{(1)} : \mathrm{H}^1_0(\mathrm{G},\mathrm{H}) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{S},\mathrm{H})$ obtenue en oubliant l'action de G.

Relions cette définition et la définition cocyclique de $\mathrm{H}^1_0(\mathrm{G},\mathrm{H})$. Notons que la définition suivante est un cas particulier de la définition 2.2.1, appliquée à la catégorie $\mathscr{A}$ définie comme la catégorie opposée de la catégorie sous-jacente à S.

Définition 3.2.7. — Si H est un S-G-groupe, on note $\mathrm{H}^1_{\mathrm{coc}}(\mathrm{G},\mathrm{H})$ le quotient de l'ensemble $\mathrm{Crois}(\mathrm{G},\mathrm{H})$ des homomorphismes croisés de G dans H par l'action usuelle de $\mathrm{H}(\mathrm{S})$.

Pour cette proposition, on renvoie à [**Gir71**], proposition VIII.7.3.7.1.

Proposition 3.2.8. — *On a une suite exacte naturelle d'ensembles pointés :*

$$1 \longrightarrow \mathrm{H}^1_{\mathrm{coc}}(\mathrm{G},\mathrm{H}) \xrightarrow{d^{(1)}} \mathrm{H}^1_0(\mathrm{G},\mathrm{H}) \xrightarrow{\omega^{(1)}} \mathrm{H}^1(\mathrm{S},\mathrm{H})\,.$$

Soit $f : \mathrm{H}_1 \to \mathrm{H}_2$ un morphisme de S-faisceaux en groupes. On définit $\mathrm{Sect}_{\mathrm{S}}(f : \mathrm{H}_1 \to \mathrm{H}_2)$ comme l'ensemble des sections du morphisme de groupes f, quotienté par la relation d'équivalence suivante : $s, s' : \mathrm{H}_2 \to \mathrm{H}_1$ sont dites équivalentes lorsqu'il existe $h \in \mathrm{Ker}(f)(\mathrm{S})$ tel que $s' = h.s.h^{-1}$. On dispose alors de l'interprétation suivante (voir la preuve de la proposition 2.2.2) :

Proposition 3.2.9. — *Si* H *est un* S-G-*groupe, alors on a une bijection naturelle d'ensembles pointés :*

$$\mathrm{H}^1_{\mathrm{coc}}(\mathrm{G},\mathrm{H}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sect}_{\mathrm{S}}(\mathrm{H} \rtimes \mathrm{G} \xrightarrow{\pi} \mathrm{G})$$

où $\pi : \mathrm{H} \rtimes \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ *est la seconde projection.*

3.3. Degré 2. — On renvoie à [**Gir71**], chapitre IV, pour les notions de lien et de gerbe.

Pour définir l'ensemble $\mathrm{H}^2_0(\mathrm{G},\mathrm{H})$, il n'est pas nécessaire de se donner une structure de S-G-groupe sur H : il suffit de considérer une action extérieure de G sur H, i.e. une action de G sur le lien $\mathrm{L}_{\mathrm{H}} := \underline{\mathrm{lien}}(\mathrm{H})$.

Définition 3.3.1. — Soit L un lien sur S. Une structure de S-G-lien sur L est la donnée d'une action de G sur L, i.e. d'un morphisme de S-groupes, $\varphi : \mathrm{G} \to \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{L})$.

Cette notion est notamment utile dans le cas où le lien L est représentable :

Définition 3.3.2. — Une structure de S-G-groupe extérieur sur H est la donnée d'un morphisme de S-groupes, $\varphi : \mathrm{G} \to \underline{\mathrm{Autext}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{H})$ (on rappelle que $\underline{\mathrm{Autext}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{H})$ désigne le faisceau quotient $\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{H})/\underline{\mathrm{Int}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{G})$, où $\underline{\mathrm{Int}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{G})$ est le faisceau des automorphismes intérieurs : voir par exemple [**Gir71**], IV.1.1.2 et IV.1.1.3).

Remarque 3.3.3. — Cela revient effectivement à se donner une action de G sur $\underline{\mathrm{lien}}(\mathrm{H})$ au sens de la définition 3.3.1, i.e. un morphisme $\varphi : \mathrm{G} \to \underline{\mathrm{Aut}}(\underline{\mathrm{lien}}(\mathrm{H}))$.

On rappelle (voir [**Rom05**]) que si G est un S-groupe et si $\mathscr{M}$ est un champ sur S, une action de G sur $\mathscr{M}$ est la donnée d'un morphisme de champs $\mu : \mathrm{G} \times \mathscr{M} \to \mathscr{M}$ vérifiant les conditions naturelles de compatibilité (ici, G est vu comme un champ, dont les seuls morphismes sont les applications identité).

Définition 3.3.4. —

- Soit L un S-G-lien. Une S-G-L-gerbe est par définition une gerbe $\mathscr{C}$ sur S, liée par L, et munie d'une action μ de G, telle que μ soit compatible à l'action de G sur L, au sens suivant : pour tout $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S}')$, le morphisme de gerbes $\mathscr{C}_{/\mathrm{S}'} \to \mathscr{C}_{/\mathrm{S}'}$ défini par g via μ est lié par le morphisme de liens $\varphi(g) : \mathrm{L}_{/\mathrm{S}'} \to \mathrm{L}_{/\mathrm{S}'}$.
- Soit H un S-G-groupe extérieur. Une S-G-H-gerbe est par définition une S-G-$\underline{\mathrm{lien}}$(H)-gerbe.

Définition 3.3.5. — Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ deux S-G-L-gerbes. Un morphisme $f : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ de S-G-L-gerbes est un morphisme de L-gerbes lié par l'identité (i.e. une équivalence de L-gerbes) qui est G-équivariant.

Définition 3.3.6. —

- Soit L un S-G-lien. On définit l'ensemble $\mathrm{H}^2_0(\mathrm{G}, \mathrm{L})$ comme l'ensemble des classes d'équivalence de S-G-L-gerbes.
- Soit H un S-G-groupe extérieur. On note $\mathrm{H}^2_0(\mathrm{G}, \mathrm{H})$ ou $\mathrm{H}^2_0(\mathrm{G}, \mathrm{H}; \varphi)$ l'ensemble $\mathrm{H}^2_0(\mathrm{G}, \underline{\mathrm{lien}}(\mathrm{H}))$.

3.3.7. Une variante. — Pour l'étude des extensions de faisceaux en groupes, il peut être utile d'introduire une variante des définitions précédentes. Si celles-ci utilisent la notion de gerbe liée au sens de Giraud [**Gir71**], on peut les formuler avec la notion de H-gerbes au sens de Breen (voir [**Bre90**], paragraphe 8) :

Définition 3.3.8. — Soit $\mathrm{G}, \mathrm{H}/\mathrm{S}$ deux faisceaux en groupes.

- Une H-gerbe au sens de Breen est une gerbe $\mathscr{C}$ sur S telle qu'il existe un recouvrement (S_i) de S, des sections $c_i \in \mathscr{C}(\mathrm{S}_i)$ et des isomorphismes $\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}_i}(c_i) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_{\mathrm{S}_i}$. Cela signifie exactement que $\mathscr{C}$ est une gerbe localement isomorphe à la gerbe $\underline{\mathrm{TORS}}(\mathrm{H})$.
- Une S-G-H-gerbe au sens de Breen est la donnée d'une H-gerbe au sens de Breen $\mathscr{C}$ et d'une action du groupe G sur le champ $\mathscr{C}$.

On sait que les H-gerbes au sens de Breen sont classifiées par l'ensemble de cohomologie $\mathrm{H}^1(\mathrm{S}, \mathrm{H} \to \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{H}))$ (voir [**Bre90**], paragraphe 7 pour davantage de détails). On note $\widetilde{\mathrm{H}}^2_0(\mathrm{G}, \mathrm{H})$ ou $\mathrm{H}^1(\mathrm{G}, \mathrm{H} \to \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{H}))$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de S-G-H-gerbes au sens de Breen.

On peut comparer les deux notions : fixons une action extérieure $\varphi : \mathrm{G} \to \underline{\mathrm{Autext}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{H})$. On dispose alors d'une suite de morphismes

$$\mathrm{H}^2_0(\mathrm{G}, \mathrm{H}; \varphi) \xrightarrow{\text{oubli}} \widetilde{\mathrm{H}}^2_0(\mathrm{G}, \mathrm{H}) \xrightarrow{\text{lien}} \mathrm{H}^1_0(\mathrm{G}, \underline{\mathrm{Autext}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{H}))$$

où le premier morphisme est le morphisme d'oubli de l'isomorphisme global entre le lien d'une S-G-H-gerbe et φ, et le second morphisme associe à une gerbe au sens de Breen son lien : ce lien est naturellement un S-torseur sous $\underline{\mathrm{Autext}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{H})$, et l'action de G sur la gerbe induit naturellement une action de G sur ce torseur. Cette suite est exacte au sens suivant : l'image du premier morphisme est exactement la fibre du second au-dessus de l'image de $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{S-groupes}}(\mathrm{G}, \underline{\mathrm{Autext}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{H}))$ dans $\mathrm{H}^1_0(\mathrm{G}, \underline{\mathrm{Autext}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{H}))$.

3.3.9. Lien avec les extensions de faisceaux en groupes.— On renvoie à [**Rom05**] pour la définition du champ $\mathscr{M}^{\mathrm{G}}$ des points fixes d'un champ $\mathscr{M}$ muni d'une action de G.

Définition 3.3.10. — Soit $\mathscr{C}$ une S-G-L-gerbe. On dit que $\mathscr{C}$ est neutre si le S-champ $\mathscr{C}^{\mathrm{G}}$ admet une section globale sur S, i.e. si $\mathscr{C}^{\mathrm{G}}(\mathrm{S}) \neq \varnothing$. Si $\mathrm{L} = \underline{\mathrm{lien}}(\mathrm{H})$, on dit que $\mathscr{C}$ est triviale si on a un isomorphisme de H-gerbes $\mathscr{C} \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{TORS}}(\mathrm{H})$.

L'ensemble $\mathrm{H}^2_0(\mathrm{G}, \mathrm{L})$ est ainsi un ensemble marqué par les classes d'isomorphisme des gerbes neutres, qui forment un sous-ensemble noté $\mathrm{N}^2(\mathrm{G}, \mathrm{L})$ (voir à ce sujet la remarque 1.4 de [**Rom05**]). On note aussi $\mathrm{H}^2_{\mathrm{triv}}(\mathrm{G}, \mathrm{H})$ le sous-ensemble des classes de gerbes triviales, et $\mathrm{N}^2_{\mathrm{triv}}(\mathrm{G}, \mathrm{H})$ l'intersection $\mathrm{H}^2_{\mathrm{triv}}(\mathrm{G}, \mathrm{H}) \cap \mathrm{N}^2(\mathrm{G}, \mathrm{H})$. On a des définitions analogues pour $\widetilde{\mathrm{N}}^2(\mathrm{G}, \mathrm{H})$, $\widetilde{\mathrm{H}}^2_{\mathrm{triv}}(\mathrm{G}, \mathrm{H})$ et $\widetilde{\mathrm{N}}^2_{\mathrm{triv}}(\mathrm{G}, \mathrm{H})$ comme sous-ensembles de $\widetilde{\mathrm{H}}^2(\mathrm{G}, \mathrm{H})$.

La définition suivante est importante pour la suite :

Définition 3.3.11. — Soit L un S-G-lien, $\mathscr{C}$ une S-G-L-gerbe. Soit $s \in \mathscr{C}(\mathrm{S})$. On définit le S-groupe des semi-automorphismes de s par rapport à G comme

$$\underline{\mathrm{SAut}}_{\mathrm{S}}(s; \mathrm{G}) : \mathrm{S}'/\mathrm{S} \mapsto \left\{(g, \phi) : g \in \mathrm{G}(\mathrm{S}'), \phi \in \mathrm{Isom}_{\mathrm{S}'}(g.s, s)\right\},$$

avec la loi de groupe

$$(g, \phi).(h, \psi) := (g.h, \phi \circ (g.\psi)).$$

On remarque que ce groupe s'inscrit dans la suite exacte canonique de groupes sur S :

$$1 \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(s) \longrightarrow \underline{\mathrm{SAut}}_{\mathrm{S}}(s; \mathrm{G}) \longrightarrow \mathrm{G} \longrightarrow 1. \tag{1}$$

Lemme 3.3.12. — *La suite exacte (1) est scindée si et seulement si* $s \in \mathscr{C}^{\mathrm{G}}(\mathrm{S})$.

Démonstration. — Supposons d'abord la suite scindée ; soit $t : \mathrm{G} \to \underline{\mathrm{SAut}}(s;\mathrm{G})$ une section. Pour tout $g \in \mathrm{G}$, on note $t(g) = (g, \phi_g) \in \underline{\mathrm{SAut}}(s;\mathrm{G})$. Alors on a des isomorphismes

$$\phi_g : g.s \longrightarrow s$$

qui vérifient $\phi_{g.h} = \phi_g \circ (g.\phi_h)$ (puisque t est un morphisme de groupes). La donnée de tels morphismes ϕ_g assure que la section s de $\mathscr{C}$ est G-invariante.

Supposons maintenant que $s \in \mathscr{C}^{\mathrm{G}}(\mathrm{S})$. Alors on dispose d'isomorphismes $\phi_g : g.s \to s$ pour tout g, vérifiant $\phi_{g.h} = \phi_g \circ (g.\phi_h)$, ce qui permet de définir $t : \mathrm{G} \to \underline{\mathrm{SAut}}(s;\mathrm{G})$ par $t(g) = (g, \phi_g)$. Il est alors clair que t est une section de (1). Cela conclut la preuve. □

Comparons maintenant l'ensemble $\mathrm{H}^2_0(\mathrm{G},\mathrm{L})$ et l'ensemble des classes d'extensions de G par L. La notion d'extension de G par L est définie dans [**Gir71**], VIII, 7.3.1. On définit de même, pour un S-G-groupe H, une extension de G par H comme une extension de G par $\underline{\mathrm{lien}}(\mathrm{H})$.

On note $\mathrm{Ext}_{\mathrm{S}}(\mathrm{G},\mathrm{L})$ (resp. $\mathrm{Ext}_{\mathrm{S}}(\mathrm{G},\mathrm{H};\varphi)$) l'ensemble des classes d'équivalence de telles extensions. L'ensemble $\mathrm{Ext}_{\mathrm{S}}(\mathrm{G},\mathrm{L})$ est marqué par les classes d'extensions scindées.

Dans [**Gir71**], section VIII.7.1, Giraud obtient une classification des φ-extensions de G par L en termes de l'ensemble de cohomologie non abélienne $\mathrm{H}^2(\mathrm{BG},\mathrm{L})$, où BG désigne le topos classifiant du S-groupe G et L est vu comme un lien sur ce topos. En revanche, la description qui suit fait intervenir un ensemble de cohomologie qui classifie certaines gerbes sur S et non sur BG.

Pour tout morphisme $\pi : \mathrm{E} \to \mathrm{G}$ de S-faisceaux en groupes, on définit une catégorie fibrée, notée $\underline{\mathrm{TORS}}(\pi : \mathrm{E} \to \mathrm{G})$, de la façon suivante : pour tout objet S' du site S, les objets de cette catégorie sur S' sont les couples (P, s) où P est un S'-torseur sous E et $s : \mathrm{S}' \to \pi_*\mathrm{P}$ est une section du S'-torseur $\pi_*\mathrm{P}$ sous G obtenu à partir de P en le poussant en avant par π. Les morphismes dans cette catégorie sont les morphismes de torseurs sous E compatibles avec les sections.

Montrons le lemme suivant :

Lemme 3.3.13. — *Soit* $1 \to \mathrm{H} \to \mathrm{E} \xrightarrow{\pi} \mathrm{G} \to 1$ *une suite exacte de* S-*groupes.*

Alors la catégorie fibrée $\underline{\mathrm{TORS}}(\pi : \mathrm{E} \to \mathrm{G})$ *est canoniquement une* S-G-H-*gerbe triviale.*

Démonstration. — On vérifie que cette catégorie fibrée est un champ en groupoïdes, en utilisant le fait que $\underline{\mathrm{TORS}}(\mathrm{E})$ est un champ en groupoïdes.

On voit que $\underline{\mathrm{TORS}}(\pi : \mathrm{E} \to \mathrm{G})$ admet une section globale, à savoir le torseur trivial E et la section de $\pi_*\mathrm{E} = \mathrm{G}$ définie par le neutre de G. Enfin, le fait que $\underline{\mathrm{TORS}}(\pi : \mathrm{E} \to \mathrm{G})$ soit localement connexe est une conséquence du fait que le morphisme π soit un épimorphisme de faisceaux.

Définissons l'action de G sur la gerbe $\underline{\mathrm{TORS}}(\pi : \mathrm{E} \to \mathrm{G})$: soit S' un objet de S et (P, s) un objet de $\underline{\mathrm{TORS}}(\pi : \mathrm{E} \to \mathrm{G})$ sur S'. Pour tout $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S}')$, on définit l'action de g sur (P, s) comme le couple $(\mathrm{P}, g.s)$, où l'action de g sur $s \in \pi_*\mathrm{P}(\mathrm{S}')$ vient de l'action de G sur le S-G-torseur $\pi_*\mathrm{P}$. L'action sur les morphismes est évidente. Cela définit alors une action de G sur la gerbe $\underline{\mathrm{TORS}}(\pi : \mathrm{E} \to \mathrm{G})$, qui fait de celle-ci une S-G-H-gerbe. □

Remarque 3.3.14. — Une autre façon de décrire la S-G-H-gerbe associée à une extension $1 \to \mathrm{H} \to \mathrm{E} \xrightarrow{\pi} \mathrm{G} \to 1$ est la suivante : tout élément $g \in \mathrm{G}$ définit un morphisme de gerbes

$$\varphi_g : \underline{\mathrm{TORS}}(\mathrm{H}) \longrightarrow \underline{\mathrm{TORS}}(\mathrm{H})$$

de la façon suivante : la fibre $\pi^{-1}(g) \subset \mathrm{E}$ est munie canoniquement d'une structure de bitorseur sous H, de sorte que pour tout $\mathrm{P} \in \underline{\mathrm{TORS}}(\mathrm{H})$, on ait

$$\varphi_g(\mathrm{P}) := \mathrm{P} \wedge^{\mathrm{H}} \pi^{-1}(g)\,.$$

Cette action est considérée par Breen dans [**Bre90**], paragraphe 8.

Proposition 3.3.15. — *Soit* L *un* S-G-*lien. Il existe une suite exacte naturelle d'ensembles marqués :*

$$\mathrm{Ext}_{\mathrm{S}}(\mathrm{G}, \mathrm{L}) \xrightarrow{d^{(2)}} \mathrm{H}^2_0(\mathrm{G}, \mathrm{L}) \xrightarrow{\omega^{(2)}} \mathrm{H}^2(\mathrm{S}, \mathrm{L})$$

telle que pour toute extension $1 \to \mathrm{H}' \to \mathrm{E} \to \mathrm{G} \to 1$ *de* G *par* L, *d'image neutre par* $d^{(2)}$, *il existe un* S-*torseur* P *sous* H' *tel que la suite exacte*

$$1 \longrightarrow {}_{\mathrm{P}}\mathrm{H}' \longrightarrow {}_{\mathrm{P}}\mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{G} \longrightarrow 1$$

soit scindée.

On en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 3.3.16. — *Il existe une suite exacte naturelle d'ensembles marqués*

$$\mathrm{Ext}_{\mathrm{S}}(\mathrm{G}, \mathrm{H}; \varphi) \xrightarrow{d^{(2)}} \mathrm{H}^2_0(\mathrm{G}, \mathrm{H}) \xrightarrow{\omega^{(2)}} \mathrm{H}^2(\mathrm{S}, \mathrm{H})$$

de sorte que, si $\alpha \in \mathrm{Ext}_{\mathrm{S}}(\mathrm{G}, \mathrm{H}; \varphi)$, $d^{(2)}(\alpha)$ *est neutre si et seulement si* α *est la classe de la tordue d'une extension scindée.*

Démonstration de la proposition 3.3.15. — Commençons par construire l'application $d^{(2)}$: soit

$$1 \longrightarrow \mathrm{H}' \xrightarrow{i} \mathrm{E} \xrightarrow{\pi} \mathrm{G} \longrightarrow 1$$

une extension de G par L. On définit $\mathscr{C}_{\mathrm{E}} := \underline{\mathrm{TORS}}(\pi : \mathrm{E} \to \mathrm{G})$. Le lemme 3.3.13 assure que $\mathscr{C}_{\mathrm{E}}$ est une S-G-L-gerbe. Soit E' une extension de G par L (représentée par une extension de G par H''), et soit $\epsilon : \mathrm{E} \to \mathrm{E}'$ une équivalence entre les extensions E et E'. Montrons que $\mathscr{C}_{\mathrm{E}}$ et $\mathscr{C}_{\mathrm{E}'}$ sont équivalentes comme S-G-L-gerbes. Il est clair que ϵ induit un morphisme de gerbes $\epsilon_* : \mathscr{C}_{\mathrm{E}} \to \mathscr{C}_{\mathrm{E}'}$, lié par le morphisme $\underline{\mathrm{lien}}(\epsilon)$. Il reste à montrer que ϵ_* est G-équivariant, et ceci est évident avec la définition de l'action de G sur $\mathscr{C}_{\mathrm{E}}$ et $\mathscr{C}_{\mathrm{E}'}$. Finalement, on a montré que la formule $d^{(2)}([\mathrm{E}]) := [\mathscr{C}_{\mathrm{E}}]$ définit une application

$$d^{(2)} : \mathrm{Ext}_{\mathrm{S}}(\mathrm{G}, \mathrm{L}) \longrightarrow \mathrm{H}^2_0(\mathrm{G}, \mathrm{L})\,.$$

Montrons que les fibres de $d^{(2)}$ sont bien celles décrites par la proposition. Soit E une extension de G par L :

$$1 \longrightarrow \mathrm{H}' \longrightarrow \mathrm{E} \xrightarrow{\pi} \mathrm{G} \longrightarrow 1$$

telle que $\mathscr{C}_{\mathrm{E}}$ admette une section G-invariante $s \in \mathscr{C}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{G}}(\mathrm{S})$. L'objet s correspond à un E-torseur P et à un point $q \in (\pi_*\mathrm{P})(\mathrm{S})$. Notons $\mathrm{H}'' := \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{P} \to \pi_*\mathrm{P})$ et $\mathrm{E}' := \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{P})$. On dispose alors d'un diagramme commutatif de suites exactes courtes :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathrm{H}'' \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{E}' \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{G} \arrow[r] \arrow[d, "="] & 1 \\
1 \arrow[r] & \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(s) \arrow[r] & \underline{\mathrm{SAut}}_{\mathrm{S}}(s;\mathrm{G}) \arrow[r] & \mathrm{G} \arrow[r] & 1\,.
\end{tikzcd}$$

Or $s \in \mathscr{C}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{G}}(\mathrm{S})$, donc par le lemme 3.3.12, la suite inférieure est scindée, donc la suite supérieure également. Enfin il est clair que la première ligne est obtenue en tordant l'extension E par le H'-torseur P_q (la fibre de $\mathrm{P} \to \pi_*\mathrm{P}$ au-dessus de $q \in \pi_*\mathrm{P}(\mathrm{S})$). Finalement, une extension E a une image neutre dans $\mathrm{H}^2_0(\mathrm{G}, \mathrm{L})$ si et seulement si il existe un H'-torseur P tel que l'extension ${}_{\mathrm{P}}\mathrm{E}$ soit scindée.

On définit maintenant l'application $\omega^{(2)}$ comme l'application d'oubli de l'action de G sur la gerbe considérée. Montrons alors l'exactitude en $\mathrm{H}^2_0(\mathrm{G}, \mathrm{L})$. Soit $[\mathscr{C}] \in \mathrm{H}^2_0(\mathrm{G}, \mathrm{L})$ tel que $\omega^{(2)}([\mathscr{C}])$ soit neutre. Il existe alors une section $s \in \mathscr{C}(\mathrm{S})$. On définit $\mathrm{E} := \underline{\mathrm{SAut}}_{\mathrm{S}}(s, \mathrm{G})$ et $\mathrm{H}' := \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(s)$. On a alors une suite exacte courte naturelle

$$1 \longrightarrow \mathrm{H}' \longrightarrow \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{G} \longrightarrow 1$$

et on vérifie que $d^{(2)}([\mathrm{E}]) = [\mathscr{C}]$, i.e. que $\mathscr{C}_{\mathrm{E}}$ est équivalente à $\mathscr{C}$ comme S-G-L-gerbe, via le morphisme

$$\mathscr{C} \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{TORS}}(\mathrm{H}') \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}_{\mathrm{E}}$$

où le premier isomorphisme est induit par la section $s \in \mathscr{C}(\mathrm{S})$ et le second est le morphisme naturel. □

On peut relier ces résultats aux résultats analogues pour les gerbes au sens de Breen. Définissons $\mathrm{Ext}_{\mathrm{S}}(\mathrm{G},\mathrm{H})_{\varphi}$ comme l'ensemble des classes d'extensions de S-faisceaux en groupes de G par H compatibles à φ, et $\mathrm{Ext}_{\mathrm{S}}(\mathrm{G},\mathrm{H})$ comme l'ensemble des classes d'extensions S-faisceaux en groupes de G par H.

La preuve de la proposition suivante et de son corollaire est immédiate :

Proposition 3.3.17. — *Soit* G,H *deux* S-*groupes et* $\varphi : \mathrm{G} \to \underline{\mathrm{Autext}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{H})$. *On a un diagramme commutatif naturel exact d'ensembles marqués :*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Ext}_{\mathrm{S}}(\mathrm{G},\mathrm{H};\varphi) \arrow[r, "d^{(2)}"] \arrow[d, "\text{oubli}"] & \mathrm{H}^2_0(\mathrm{G},\mathrm{H},\varphi) \arrow[r, "\omega^{(2)}"] \arrow[d, "\text{oubli}"] & \mathrm{H}^2(\mathrm{S},\mathrm{H}) \arrow[d, "\text{oubli}"] \\
 & \mathrm{Ext}_{\mathrm{S}}(\mathrm{G},\mathrm{H}) \arrow[r, "d^{(2)}"] \arrow[d, "\underline{\text{lien}}"] & \widetilde{\mathrm{H}}^2_0(\mathrm{G},\mathrm{H}) \arrow[r, "\omega^{(2)}"] \arrow[d, "\underline{\text{lien}}"] & \widetilde{\mathrm{H}}^2(\mathrm{S},\mathrm{H}) \arrow[d, "\underline{\text{lien}}"] \\
1 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{S-gr}}(\mathrm{G},\underline{\mathrm{Autext}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{H})) \arrow[r, "d^{(2)}"] & \mathrm{H}^1_0(\mathrm{G},\underline{\mathrm{Autext}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{H})) \arrow[r, "\omega^{(2)}"] & \mathrm{H}^1(\mathrm{S},\underline{\mathrm{Autext}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{H}))\,,
\end{tikzcd}$$

de sorte que pour les deux premières lignes, deux extensions ont la même image par $d^{(2)}$ *si et seulement si l'une est obtenue en tordant l'autre par un* S-*torseur sous le noyau de l'autre.*

Corollaire 3.3.18. — *Avec les notations précédentes, si on suppose* $\mathrm{H}^1(\mathrm{S},\mathrm{H}) = 1$, *alors on a des bijections*

$$d^{(2)} : \mathrm{Ext}_{\mathrm{S}}(\mathrm{G},\mathrm{H})_{\varphi} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^2_{\mathrm{triv}}(\mathrm{G},\mathrm{H};\varphi)$$

et

$$d^{(2)} : \mathrm{Ext}_{\mathrm{S}}(\mathrm{G},\mathrm{H}) \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathrm{H}}^2_{\mathrm{triv}}(\mathrm{G},\mathrm{H})$$

qui font correspondre les sous-ensembles respectifs formés des extensions scindées avec les sous-ensembles respectifs $\mathrm{N}^2_{\mathrm{triv}}(\mathrm{G},\mathrm{H})$ *et* $\widetilde{\mathrm{N}}^2_{\mathrm{triv}}(\mathrm{G},\mathrm{H})$.

3.4. Centre d'un S-G-lien. — Si L est un lien, on note C_{L} son centre, comme dans [**Gir71**].

Proposition 3.4.1. — *On dispose d'une opération naturelle*

$$\mathrm{H}^2_0(\mathrm{G},\mathrm{C}_{\mathrm{L}}) \times \mathrm{H}^2_0(\mathrm{G},\mathrm{L}) \longrightarrow \mathrm{H}^2_0(\mathrm{G},\mathrm{L})$$

de sorte que

- *soit* $\mathrm{H}^2_0(\mathrm{G},\mathrm{L}) = \varnothing$.
- *soit cette opération fait de* $\mathrm{H}^2_0(\mathrm{G},\mathrm{L})$ *un espace principal homogène sous le groupe* $\mathrm{H}^2_0(\mathrm{G},\mathrm{C}_{\mathrm{L}})$.

Démonstration. — Définissons l'opération : soit $\mathscr{C}$ une S-G-L-gerbe et $\mathscr{C}'$ une S-G-$\mathrm{C_L}$-gerbe. On considère le produit contracté $\mathscr{C} \wedge^{\mathrm{C_L}} \mathscr{C}'$, qui est naturellement une S-L-gerbe. Munissons celle-ci d'une action canonique de G : pour tout $\mathrm{S'/S}$, pour tout $g \in \mathrm{G(S')}$, on dispose du morphisme $\mu(g) : \mathscr{C}_{/\mathrm{S'}} \to \mathscr{C}_{/\mathrm{S'}}$ (lié par $\varphi(g) : \mathrm{L}_{/\mathrm{S'}} \to \mathrm{L}_{/\mathrm{S'}}$) et du morphisme $\mu'(g) : \mathscr{C}'_{/\mathrm{S'}} \to \mathscr{C}'_{/\mathrm{S'}}$ (lié par $\varphi'(g) : \mathrm{C}_{\mathrm{L}/\mathrm{S'}} \to \mathrm{C}_{\mathrm{L}/\mathrm{S'}}$). D'où un morphisme produit $\mu''(g) : \mathscr{C}_{/\mathrm{S'}} \times \mathscr{C}'_{/\mathrm{S'}} \to \mathscr{C}_{/\mathrm{S'}} \times \mathscr{C}'_{/\mathrm{S'}}$, lié par $\varphi \times \varphi'$. La propriété universelle définissant le produit contracté assure que $\mu''(g)$ induit naturellement un morphisme $\nu(g) : (\mathscr{C} \wedge^{\mathrm{C_L}} \mathscr{C}')_{/\mathrm{S'}} \to (\mathscr{C} \wedge^{\mathrm{C_L}} \mathscr{C}')_{/\mathrm{S'}}$. On vérifie que cette construction définit une action de G sur la L-gerbe $\mathscr{C} \wedge^{\mathrm{C_L}} \mathscr{C}'$, compatible avec φ. On vérifie que cette opération induit un morphisme $\mathrm{H}^2_0(\mathrm{G}, \mathrm{C_L}) \times \mathrm{H}^2_0(\mathrm{G}, \mathrm{L}) \to \mathrm{H}^2_0(\mathrm{G}, \mathrm{L})$.

Pour montrer que cette action est libre et transitive, la preuve est similaire à celle de [**Gir71**], VI.2.4.4 et 2.4.5. □

3.5. Dévissage et comportement vis-à-vis des suites exactes. — Soit G un S-faisceau en groupes. Dans cette section, on associe à une suite exacte de S-G-groupes

$$1 \longrightarrow \mathrm{H}_1 \longrightarrow \mathrm{H}_2 \longrightarrow \mathrm{H}_3 \longrightarrow 1$$

une suite exacte longue avec les ensembles $\mathrm{H}^i_0(\mathrm{G}, \mathrm{H}_j)$.

Proposition 3.5.1. — *Soit*

$$1 \longrightarrow \mathrm{H}_1 \xrightarrow{i} \mathrm{H}_2 \xrightarrow{\pi} \mathrm{H}_3 \longrightarrow 1$$

une suite exacte de S-G-*groupes. Alors on a une suite exacte d'ensembles pointés :*

$$1 \longrightarrow \mathrm{H}^{\mathrm{G}}_1(\mathrm{S}) \longrightarrow \mathrm{H}^{\mathrm{G}}_2(\mathrm{S}) \longrightarrow \mathrm{H}^{\mathrm{G}}_3(\mathrm{S}) \xrightarrow{\partial} \mathrm{H}^1_0(\mathrm{G}, \mathrm{H}_1) \longrightarrow \mathrm{H}^1_0(\mathrm{G}, \mathrm{H}_2) \longrightarrow \mathrm{H}^1_0(\mathrm{G}, \mathrm{H}_3) \, .$$

Si on suppose en outre que $\mathrm{H}_3 \to \underline{\mathrm{Autext}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{H}_1)$ *(induit par la suite exacte courte) est trivial ou que* $\mathrm{H}^1(\mathrm{S}, \mathrm{H}_3) = 1$*, alors la suite précédente se prolonge à droite :*

$$1 \longrightarrow \mathrm{H}^{\mathrm{G}}_1(\mathrm{S}) \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathrm{H}^1_0(\mathrm{G}, \mathrm{H}_2) \longrightarrow \mathrm{H}^1_0(\mathrm{G}, \mathrm{H}_3) \xrightarrow{\partial'} \mathrm{H}^2_0(\mathrm{G}, \mathrm{H}_1) \, .$$

Démonstration. — L'exactitude en $\mathrm{H}^{\mathrm{G}}_1(\mathrm{S})$ et en $\mathrm{H}^{\mathrm{G}}_2(\mathrm{S})$ est claire.

Définissons l'application $\partial : \mathrm{H}^{\mathrm{G}}_3(\mathrm{S}) \to \mathrm{H}^1_0(\mathrm{G}, \mathrm{H}_1)$. Soit $h_3 \in \mathrm{H}^{\mathrm{G}}_3(\mathrm{S})$. On définit $\partial(h_3) \in \mathrm{H}^1_0(\mathrm{G}, \mathrm{H}_1)$ comme la classe de $\pi^{-1}(h_3) \to \mathrm{S}$. Alors $\pi^{-1}(h_3) \to \mathrm{S}$ est un S-torseur sous H_1. Le fait que h_3 soit G-invariant assure que l'action de G sur H_2 induit naturellement une action de G sur $\pi^{-1}(h_3)$, ce qui munit $\pi^{-1}(h_3)$ d'une structure de S-G-H_1-torseur. La trivialité de $\partial(h_3)$ équivaut alors au fait que h_3 se relève dans $\mathrm{H}^{\mathrm{G}}_2(\mathrm{S})$.

Montrons l'exactitude en $\mathrm{H}^1_0(\mathrm{G},\mathrm{H}_1)$. Soit $[\mathrm{G} \circlearrowleft \mathrm{P}] \in \mathrm{H}^1_0(\mathrm{G},\mathrm{H}_1)$, d'image triviale dans $\mathrm{H}^1_0(\mathrm{G},\mathrm{H}_2)$. On dispose du diagramme commutatif, G-équivariant, de torseurs suivant :

$$\begin{tikzcd} {}^{\mathrm{G}\circlearrowleft}\mathrm{P} \arrow[r, "i_*"] \arrow[dr, "\mathrm{H}_1"'] & {}^{\mathrm{G}\circlearrowleft}\mathrm{H}_2 \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\mathrm{H}_2"] & {}^{\mathrm{G}\circlearrowleft}\mathrm{H}_3 \arrow[dl, "\mathrm{H}_3"] \\ & \mathrm{S} & \end{tikzcd} .$$

La composée $\pi \circ i_*$ envoie P sur un point $h_3 \in \mathrm{H}_3(\mathrm{S})$, qui est G-invariant. Enfin, ce diagramme identifie bien P avec $\pi^{-1}(h_3)$, via i_*, qui est bien G-équivariante. D'où l'exactitude en $\mathrm{H}^1_0(\mathrm{G},\mathrm{H}_1)$.

Montrons l'exactitude en $\mathrm{H}^1_0(\mathrm{G},\mathrm{H}_2)$. Soit $[\mathrm{G} \circlearrowleft \mathrm{P}] \in \mathrm{H}^1_0(\mathrm{G},\mathrm{H}_2)$, d'image triviale dans $\mathrm{H}^1_0(\mathrm{G},\mathrm{H}_3)$. On dispose donc d'un morphisme G-H_2-équivariant $\tau : \mathrm{P} \to \mathrm{H}_3$. Alors la fibre $\mathrm{Q} := \tau^{-1}(1)$ est naturellement un S-G-H_1-torseur. On vérifie alors que $i_*\mathrm{Q}$ est canoniquement isomorphe à P, ce qui conclut la preuve de l'exactitude de la première suite de la proposition.

Montrons l'exactitude de la seconde suite : on commence par définir l'application ∂'. Soit $[\mathrm{G} \circlearrowleft \mathrm{P}] \in \mathrm{H}^1_0(\mathrm{G},\mathrm{H}_3)$. On définit K(P) comme la gerbe des relèvements de P via le morphisme $\underline{\mathrm{TORS}}(\mathrm{H}_2) \xrightarrow{\pi_*} \underline{\mathrm{TORS}}(\mathrm{H}_3)$. Cette gerbe est liée par le lien $\mathrm{L}(\mathrm{P}) := {}^{\mathrm{P}}\underline{\mathrm{lien}}(\mathrm{H}_1)$ (voir [**Gir71**], proposition IV.2.5.8). Or par hypothèse un torseur sous H_3 agit trivialement sur $\underline{\mathrm{lien}}(\mathrm{H}_1)$, donc K(P) est une H_1-gerbe. Soit S'/S, soit $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S}')$ et $\mathrm{Q} \in \mathrm{K}(\mathrm{P})(\mathrm{S}')$. Par définition, on a un diagramme commutatif de torseurs

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Q} \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\mathrm{H}_2"'] & {}^{\mathrm{G}\circlearrowleft}\mathrm{P} \arrow[d, "\mathrm{H}_3"] \\ & \mathrm{S}' \end{tikzcd} .$$

On définit alors $g.\mathrm{Q}$ comme le relèvement de P défini par la composée

$$(g.\mathrm{Q} \longrightarrow \mathrm{P}) := (\mathrm{Q} \longrightarrow \mathrm{P} \xrightarrow{g} \mathrm{P}) .$$

On fait également agir G trivialement sur les morphismes dans la gerbe K(P). On voit que l'on définit ainsi une action du groupe G sur la gerbe K(P), faisant de cette dernière une S-G-H_1-gerbe. Par définition, on pose alors

$$\partial'([\mathrm{P}]) := [\mathrm{K}(\mathrm{P})] \in \mathrm{H}^2_0(\mathrm{G},\mathrm{H}_1) .$$

Montrons désormais l'exactitude en $\mathrm{H}^1_0(\mathrm{G},\mathrm{H}_3)$: on suppose que $\mathrm{K}(\mathrm{P})^{\mathrm{G}}(\mathrm{S}) \neq \varnothing$. Soit $[\mathrm{Q}] \in \mathrm{K}(\mathrm{P})^{\mathrm{G}}(\mathrm{S})$: on a un S-torseur Q sous H_2 et un morphisme H_2-équivariant $\phi : \mathrm{Q} \to \mathrm{P}$. Or Q est invariant par G dans K(P). Par conséquent, pour tout $g \in \mathrm{G}$, il existe un automorphisme α_g du torseur Q, de sorte que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "\alpha_g"] \arrow[d, "\tau"] & Q \arrow[d, "\tau"] \\ P \arrow[r, "g"] & P, \end{tikzcd}$$

et la compatibilité suivante est vérifiée : $\alpha_{g.h} = \alpha_g \circ \alpha_h$ (on rappelle que G agit trivialement sur les morphismes dans K(P)). Par conséquent, cette construction munit Q d'une structure naturelle de S-G-H_2-torseur, de sorte que le morphisme $\phi : \mathrm{Q} \to \mathrm{P}$ soit G-H_2-équivariant. Cela assure que $[\mathrm{P}] \in \mathrm{H}^1_0(\mathrm{G}, \mathrm{H}_3)$ se relève en $[\mathrm{Q}] \in \mathrm{H}^1_0(\mathrm{G}, \mathrm{H}_2)$.

□

Proposition 3.5.2. — *Soit*

$$1 \longrightarrow \mathrm{H}_1 \xrightarrow{i} \mathrm{H}_2 \xrightarrow{\pi} \mathrm{H}_3 \longrightarrow 1$$

une suite exacte de S*-groupes, avec* H_1 *caractéristique dans* H_2*. On suppose que* $\mathrm{H}^1(\mathrm{S}, \mathrm{H}_2) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{S}, \mathrm{H}_3)$ *est surjectif. Soit* $\mathrm{G} \circlearrowleft \underline{\mathrm{TORS}}(\mathrm{H}_2)$ *une* S-G-H_2*-gerbe triviale. Alors la gerbe* $\pi_*(\underline{\mathrm{TORS}}(\mathrm{H}_2)) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{TORS}}(\mathrm{H}_3)$ *est munie d'une action de* G *induite. Soit* $\mathrm{P} \in \underline{\mathrm{TORS}}(\mathrm{H}_3)^{\mathrm{G}}(\mathrm{S})$*. Fixons* $\mathrm{Q} \in \underline{\mathrm{TORS}}(\mathrm{H}_2)(\mathrm{S})$ *un relevé de* P*.*

Alors la gerbe $\underline{\mathrm{K}}(\mathrm{P})$ *des relèvements de* P *à* H_2 *est canoniquement une* S-G-${}_{\mathrm{Q}}\mathrm{H}_1$*-gerbe triviale.*

En outre, $\mathrm{G} \circlearrowleft \underline{\mathrm{TORS}}(\mathrm{H}_2)$ *est neutre si et seulement si il existe* $\mathrm{P} \in \underline{\mathrm{TORS}}(\mathrm{H}_3)^{\mathrm{G}}(\mathrm{S})$ *tel que* $\underline{\mathrm{K}}(\mathrm{P})^{\mathrm{G}}(\mathrm{S}) \neq \varnothing$*.*

Démonstration. — La preuve est immédiate. Il faut seulement vérifier que l'action de G sur $\underline{\mathrm{TORS}}(\mathrm{H}_2)$ induit une action de G sur $\underline{\mathrm{TORS}}(\mathrm{H}_3)$. Ceci est par exemple une conséquence du fait que puisque H_1 est caractéristique dans H_2, le morphisme $\mathrm{H}_2 \to \mathrm{H}_3$ induit un morphisme additif entre les gr-champs $\underline{\mathrm{BITORS}}(\mathrm{H}_2) \to \underline{\mathrm{BITORS}}(\mathrm{H}_3)$ (voir [**Bre90**], proposition 2.9). On conclut alors grâce à [**Gir71**], IV, proposition 5.2.5.(iii). □

On peut reformuler cette proposition de la façon suivante.

Sous les mêmes hypothèses, une S-G-H_2-gerbe triviale $\mathrm{G} \circlearrowleft \underline{\mathrm{TORS}}(\mathrm{H}_2)$ est neutre si et seulement si il existe $\mathrm{P} \in \underline{\mathrm{TORS}}(\mathrm{H}_3)^{\mathrm{G}}(\mathrm{S})$ tel que la gerbe induite $\mathrm{G} \circlearrowleft \underline{\mathrm{TORS}}({}_{\mathrm{P}}\mathrm{H}_1)$ soit neutre.

4. Extensions de foncteurs et extensions de faisceaux

Dans cette section, on compare les constructions des deux sections précédentes : en effet, un faisceau en groupes sur le site S définit naturellement un foncteur en groupes sur la catégorie opposée à la catégorie sous-jacente au site

S. On peut donc appliquer les constructions de la section 3 à des faisceaux en groupes et celles de la section 2 aux foncteurs en groupes correspondants.

Soit S un site (admettant un objet final) et G un faisceau en groupes sur S. Soit H un S-G-groupe. Commençons par les degrés 0 et 1. La preuve de la proposition suivante est laissée au lecteur :

Proposition 4.0.3. — *Supposons que* G *et* H *soient des faisceaux en groupes sur le site* S. *Alors l'ensemble pointé* $\mathrm{H}^1_{\mathrm{coc}}(\mathrm{G},\mathrm{H})$ *défini en 3.2.7 est naturellement isomorphe à l'ensemble* $\mathrm{H}^1_{\mathrm{coc}}(\mathrm{G},\mathrm{H})$ *défini en 2.2.1. De même pour les groupes* $\mathrm{H}^0_0(\mathrm{G},\mathrm{H})$ *et* $\mathrm{H}^0_{\mathrm{coc}}(\mathrm{G},\mathrm{H})$ *définis en 3.1.2 et 2.1.2.*

Considérons maintenant le degré 2.

Définissons d'abord le préchamp en groupoïdes $\mathrm{K}(\mathrm{H},1)$: pour tout objet S' de S, on définit $\mathrm{K}(\mathrm{H},1)(\mathrm{S}')$ comme le groupoïde constitué d'un unique objet $*$, dont le groupe d'automorphismes est $\mathrm{H}(\mathrm{S}')$.

On sait alors que le morphisme de préchamps naturel

$$\mathrm{K}(\mathrm{H},1) \longrightarrow \underline{\mathrm{TORS}}(\mathrm{H})$$

est un champ associé (voir [**Gir71**], II.2 pour la notion de champ associé).

Le lemme suivant donne une interprétation de la définition cocyclique du H^2 en termes d'action sur une catégorie fibrée :

Lemme 4.0.4. — *Soit* G *un foncteur en groupes, et* H *un* G*-foncteur en groupes. La donnée d'un* 2*-cocycle* $(f,g) \in \mathrm{Z}^2(\mathrm{G},\mathrm{H})$ *équivaut à la donnée d'une* φ*-action de* G *sur la catégorie fibrée en groupoïdes* $\mathrm{K}(\mathrm{H},1)$. *En outre, la neutralité du cocycle* (f,g) *équivaut à l'existence d'une section de* $\mathrm{K}(\mathrm{H},1)^{\mathrm{G}}$.

Démonstration. — Définissons une action de G sur $\mathrm{K}(\mathrm{H},1)$ à partir de (f,g). Le morphisme $f : \mathrm{G} \to \mathrm{Aut}(\mathrm{H})$ permet de définir pour tout objet S' de S et tout $s \in \mathrm{G}(\mathrm{S}')$, un morphisme de catégorie fibrées $\mu_s : \mathrm{K}(\mathrm{H},1)_{/\mathrm{S}'} \to \mathrm{K}(\mathrm{H},1)_{/\mathrm{S}'}$. On en déduit un foncteur $\mu : \mathrm{G} \times \mathrm{K}(\mathrm{H},1) \to \mathrm{K}(\mathrm{H},1)$. L'application g et les conditions de cocycles vérifiées par (f,g) permettent de définir un 2-foncteur α de sorte que le diagramme de foncteurs suivant

$$(2) \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{G} \times \mathrm{G} \times \mathrm{K}(\mathrm{H},1) \arrow[r, "m\times\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\times\mu"'] & \mathrm{G} \times \mathrm{K}(\mathrm{H},1) \arrow[d, "\mu"] \\ \mathrm{G} \times \mathrm{K}(\mathrm{H},1) \arrow[r, "m"] \arrow[ur, Rightarrow, "\alpha"] & \mathrm{K}(\mathrm{H},1) \end{tikzcd}$$

soit 2-commutatif : concrètement, pour tout $s,t \in \mathrm{G}$, $\alpha^*_{s,t}$ est défini sur les morphismes par

$$\alpha^*_{s,t} := g_{s,t} \in \mathrm{H} = \mathrm{Aut}(*)\,.$$

La 2-commutativité de (2) équivaut alors à la relation de cocycle $f_s \circ f_t = \mathrm{int}(g_{s,t}) \circ f_{st}$.

On sait que $f_1 = \mathrm{int}(g_{1,t}) \in \mathrm{Int}(\mathrm{H})$ pour tout $t \in \mathrm{G}$. Alors en posant $a^* := g_{1,1} \in \mathrm{H} = \mathrm{Aut}(*)$, on a un diagramme de foncteurs 2-commutatifs

(3)
$$\begin{tikzcd} \mathrm{K}(\mathrm{H},1) \arrow[d, "1\times \mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & \\ \mathrm{G} \times \mathrm{K}(\mathrm{H},1) \arrow[r, "\mu"'] \arrow[ur, phantom, "a \Uparrow"] & \mathrm{K}(\mathrm{H},1)\,. \end{tikzcd}$$

Il reste à vérifier les trois compatibilités de la définition 1.3.(i) de [**Rom05**] : la première (à une convention près) est un conséquence immédiate de la relation de cocycle $f_s(g_{t,u}).g_{s,tu} = g_{s,t}.g_{st,u}$. La deuxième s'écrit dans ce contexte $f_s(g_{1,1}) = g_{s,1}$, et elle résulte également de la même formule (avec $t = u = 1$). La troisième s'écrit $g_{1,t} = g_{1,1}$, et s'obtient aussi grâce à cette formule (prendre le triplet $(s', t', u') := (t^{-1}, 1, t)$).

Les deux diagrammes (2) et (3), ainsi que les trois compatibilités, assurent que μ définit une action de G sur la catégorie fibrée $\mathrm{K}(\mathrm{H},1)$, au sens de [**Rom05**], définition 1.3.(i).

Réciproquement, montrons que la donnée d'une action $\mu : \mathrm{G} \times \mathrm{K}(\mathrm{H},1) \to \mathrm{K}(\mathrm{H},1)$ définit naturellement un 2-cocycle (f,g). Par définition, une telle action est la donnée d'un triplet (μ, α, a) vérifiant toutes les compatibilités précédentes. Il suffit alors de définir $f_s \in \mathrm{Aut}(\mathrm{H})$ de la façon suivante : $f_s(h) := \mu(s,h)$, où dans le second membre h est vu comme un élément de $\mathrm{Aut}(*) = \mathrm{H}$. De même, on définit $g_{s,t} := \alpha^*_{s,t} \in \mathrm{H} = \mathrm{Aut}(*)$. Les mêmes calculs que précédemment assurent alors que $(f,g) \in \mathrm{Z}^2(\mathrm{G},\mathrm{H})$. Enfin, il est clair que ces deux constructions sont inverses l'une de l'autre, ce qui conclut la preuve. □

Désormais, G et H sont des faisceaux en groupes sur S. On définit $\mathrm{H}^2_{0,\mathrm{fonct}}(\mathrm{G},\mathrm{H})$ comme l'ensemble des classes d'isomorphisme des actions de G sur $\mathrm{K}(\mathrm{H},1)$. Or on sait que le morphisme de préchamps naturel

$$\mathrm{K}(\mathrm{H},1) \longrightarrow \underline{\mathrm{TORS}}(\mathrm{H})$$

est un champ associé. Par conséquent, on peut associer à toute action de G sur $\mathrm{K}(\mathrm{H},1)$, une action de G sur la gerbe $\underline{\mathrm{TORS}}(\mathrm{H})$, bien définie à isomorphisme unique près. On en déduit un morphisme canonique $\mathrm{H}^2_{0,\mathrm{fonct}}(\mathrm{G},\mathrm{H}) \to \mathrm{H}^2_0(\mathrm{G},\mathrm{H})$.

On a donc construit un morphisme canonique

$$\beta : \mathrm{H}^2_{\mathrm{coc}}(\mathrm{G},\mathrm{H}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^2_{0,\mathrm{fonct}}(\mathrm{G},\mathrm{H}) \longrightarrow \mathrm{H}^2_0(\mathrm{G},\mathrm{H})\,.$$

Proposition 4.0.5. — *Soit* G *un faisceau en groupes sur le site* S*, et* H *un* S-G*-faisceau en groupes extérieurs. On dispose alors d'un diagramme commutatif* *exact naturel :*

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathrm{Ext}_{\mathrm{fonct}}(\mathrm{G},\mathrm{H};\varphi) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Ext}_{\mathrm{faisc}}(\mathrm{G},\mathrm{H};\varphi) \arrow[d, "d^{(2)}"] \\
& \mathrm{H}^2_{\mathrm{coc}}(\mathrm{G},\mathrm{H};\varphi) \arrow[r, "\beta"] & \mathrm{H}^2_0(\mathrm{G},\mathrm{H};\varphi) \arrow[d, "\omega^{(2)}"] \\
& & \mathrm{H}^2(\mathrm{S},\mathrm{H}),
\end{tikzcd}$$

où $\mathrm{Ext}_{\mathrm{fonct}}(\mathrm{G},\mathrm{H};\varphi)$ *s'identifie au sous-ensemble de* $\mathrm{Ext}_{\mathrm{faisc}}(\mathrm{G},\mathrm{H};\varphi)$ *formé des extensions* E *de* G *par* H *qui admettent une section (comme morphisme de foncteurs)* $\mathrm{H} \to \mathrm{E}$.

Démonstration. — Le fait que la première ligne soit bien définie résulte du fait qu'une extension de foncteurs en groupes dont les deux extrémités sont des faisceaux en groupes est une extension de faisceaux en groupes. □

Proposition 4.0.6. — *Si* $\mathrm{H}^1(\mathrm{S},\mathrm{H}) = 1$ *et si toute extension de* G *par* H *admet une section fonctorielle, alors l'application*

$$\beta : \mathrm{H}^2_{\mathrm{coc}}(\mathrm{G},\mathrm{H};\varphi) \longrightarrow \mathrm{H}^2_{0,\mathrm{triv}}(\mathrm{G},\mathrm{H};\varphi)$$

est une bijection.

Démonstration. — Cela résulte par exemple de la proposition précédente. □

Pour le corollaire suivant, on renvoie à [**SGA3**], exposé I, sections 4.6 et 4.7 pour les définitions et les notations.

Corollaire 4.0.7. — *Si* S *est un schéma affine,* G *un* S*-schéma en groupes affine et* $\mathcal{F}$ *un* G-$\mathcal{O}_\mathrm{S}$*-module quasi-cohérent, alors on a des bijections naturelles*

$$\mathrm{H}^i_0(\mathrm{G},\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^i_{\mathrm{coc}}(\mathrm{G},\mathbf{W}(\mathcal{F})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^i_0(\mathrm{G},\mathbf{W}(\mathcal{F})),$$

pour $i = 1, 2$.

Démonstration. — Pour $i = 1$, la seconde bijection résulte de la proposition 4.0.3.

Montrons la seconde bijection pour $i = 2$. Vérifions que l'on peut appliquer la proposition 4.0.6 au S-G-groupe $\mathrm{H} := \mathbf{W}(\mathcal{F})$. Par [**EGA**], III_1, théorème 1.3.1, la cohomologie du $\mathcal{O}_\mathrm{G}$-module quasi-cohérent $\mathcal{F}_\mathrm{G}$ sur G est nulle en degré 1 (car le schéma G est affine). Or par [**Mil80**], III, proposition 3.7, ce groupe de cohomologie coïncide avec le groupe $\mathrm{H}^1_{\mathrm{fppf}}(\mathrm{G},\mathbf{W}(\mathcal{F}))$. Donc $\mathrm{H}^1_{\mathrm{fppf}}(\mathrm{G},\mathbf{W}(\mathcal{F})) = 0$. Cela assure que tout torseur sous $\mathbf{W}(\mathcal{F})$ au-dessus de G est trivial, donc en particulier, toute extension de G par $\mathbf{W}(\mathcal{F})$ admet une section fonctorielle. Le théorème 1.3.1 de [**EGA**], III_1, assure également que $\mathrm{H}^1(\mathrm{S},\mathbf{W}(\mathcal{F})) = 0$ puisque S est affine.

On peut donc appliquer la proposition 4.0.6 pour obtenir la seconde bijection du corollaire (cas $i = 2$).

Pour finir, la première bijection est exactement la proposition II.3.3.1 de [**DG70**]. □

5. Principe local-global pour les extensions de schémas en groupes

Dans cette section, on se donne un schéma de base S, muni du site fppf, des S-schémas en groupes G, H et une action $\varphi : \mathrm{G} \to \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{H})$ (resp. une action extérieure $\varphi : \mathrm{G} \to \underline{\mathrm{Autext}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{H})$). On cherche à étudier les ensembles suivants

$$Ш^i_0(\mathrm{G}, \mathrm{H}; \varphi) := \mathrm{Ker} \left(\mathrm{H}^i_0(\mathrm{G}, \mathrm{H}; \varphi) \longrightarrow \prod_{s \in \mathrm{S}} \mathrm{H}^i_0(\mathrm{G}_{k(s)}, \mathrm{H}_{k(s)}; \varphi) \right) ,$$

où $s \in \mathrm{S}$ décrit tous les points de S. On définit aussi

$$Ш^i_{0,f}(\mathrm{G}, \mathrm{H}; \varphi) := \mathrm{Ker} \left(\mathrm{H}^i_0(\mathrm{G}, \mathrm{H}; \varphi) \longrightarrow \prod_{s \in \mathrm{S}^0} \mathrm{H}^i_0(\mathrm{G}_{k(s)}, \mathrm{H}_{k(s)}; \varphi) \right) ,$$

$$Ш^i_{0,\text{gén}}(\mathrm{G}, \mathrm{H}; \varphi) := \mathrm{Ker} \left(\mathrm{H}^i_0(\mathrm{G}, \mathrm{H}; \varphi) \longrightarrow \mathrm{H}^i_0(\mathrm{G}_\eta, \mathrm{H}_\eta; \varphi) \times \prod_{s \in \mathrm{S}^0} \mathrm{H}^i_0(\mathrm{G}_{k(s)}, \mathrm{H}_{k(s)}; \varphi) \right) ,$$

si S est intègre, si $\eta \in \mathrm{S}$ désigne son point générique et S^0 l'ensemble des points fermés de S. On peut aussi considérer des variantes de ces ensembles :

$$\overline{Ш}^i_0(\mathrm{G}, \mathrm{H}; \varphi) := \mathrm{Ker} \left(\mathrm{H}^i_0(\mathrm{G}, \mathrm{H}; \varphi) \longrightarrow \prod_{\overline{s} \in \mathrm{S}} \mathrm{H}^i_0(\mathrm{G}_{k(\overline{s})}, \mathrm{H}_{k(\overline{s})}; \varphi) \right) ,$$

où $\overline{s} \in \mathrm{S}$ décrit les points géométriques de S ; et

$$\overline{Ш}^i_{0,f}(\mathrm{G}, \mathrm{H}; \varphi) := \mathrm{Ker} \left(\mathrm{H}^i_0(\mathrm{G}, \mathrm{H}; \varphi) \longrightarrow \prod_{s \in \mathrm{S}^0} \mathrm{H}^i_0(\mathrm{G}_{\overline{k(s)}}, \mathrm{H}_{\overline{k(s)}}; \varphi) \right) ,$$

$$\overline{Ш}^i_{0,\text{gén}}(\mathrm{G}, \mathrm{H}; \varphi) := \mathrm{Ker} \left(\mathrm{H}^i_0(\mathrm{G}, \mathrm{H}; \varphi) \longrightarrow \mathrm{H}^i_0(\mathrm{G}_{\overline{\eta}}, \mathrm{H}_{\overline{\eta}}; \varphi) \times \prod_{s \in \mathrm{S}^0} \mathrm{H}^i_0(\mathrm{G}_{\overline{k(s)}}, \mathrm{H}_{\overline{k(s)}}; \varphi) \right)$$

si S est intègre.

5.1. Sur le champ des points fixes $\mathscr{C}^{\mathrm{G}}$. — On s'intéresse dans cette section aux propriétés du champ $\mathscr{C}^{\mathrm{G}}$, quand $\mathscr{C}$ est une S-G-H-gerbe.

Proposition 5.1.1. — *On suppose que*
- $\mathscr{C}^{\mathrm{G}}$ *est localement non vide (par exemple s'il existe un recouvrement* (S_i) *de* S *tel que pour tout* i, $\mathrm{H}^2_0(\mathrm{G}_{\mathrm{S}_i}, \mathrm{H}_{\mathrm{S}_i}) = \mathrm{N}^2(\mathrm{G}_{\mathrm{S}_i}, \mathrm{H}_{\mathrm{S}_i})$*).*
- *pour tout* T/S*, il existe un recouvrement* (T_j) *de* T *tel que pour tout* j*, pour toute* φ*-action de* $\mathrm{G}_{\mathrm{T}_j}$ *sur* $\mathrm{H}_{\mathrm{T}_j}$, $\mathrm{H}^1_{0,\mathrm{triv}}(\mathrm{G}_{\mathrm{T}_j}, \mathrm{H}_{\mathrm{T}_j}) = 1$.

Alors le champ $\mathscr{C}^{\mathrm{G}}$ *est une gerbe, dont le lien est localement représentable par* H^{G}*, pour certaines* φ*-actions de* G *sur* H.

Démonstration. — Puisque $\mathscr{C}^{\mathrm{G}}$ est un champ localement non vide, il suffit de montrer que la seconde hypothèse implique que $\mathscr{C}^{\mathrm{G}}$ est localement connexe. Soient (s, α) et (t, β) dans $\mathscr{C}^{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$. Il existe un recouvrement (T_j) tel que $\mathrm{H}^1_{0,\mathrm{triv}}(\mathrm{G}_{\mathrm{T}_j}, \mathrm{H}_{\mathrm{T}_j}) = 1$, $s, t \in \mathscr{C}(\mathrm{T}_j)$ sont isomorphes et $\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{T}_j}(s) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}$. Alors le faisceau $\mathrm{P} := \underline{\mathrm{Isom}}_{\mathrm{T}_j}(s,t)$ des isomorphismes dans $\mathscr{C}/\mathrm{T}_j$ est un T_j-torseur trivial sous H. Puisque s et t sont invariants par G, le torseur P est muni d'une action naturelle de G, qui est compatible avec l'action de G sur H induite par (s, α). Donc $[\mathrm{P}] \in \mathrm{H}^1_{0,\mathrm{triv}}(\mathrm{G}_{\mathrm{T}_j}, \mathrm{H}_{\mathrm{T}_j})$ pour cette action de G sur H. Par hypothèse, cet ensemble de cohomologie est trivial, donc $\mathrm{P}^{\mathrm{G}}(\mathrm{T}_j) \neq \varnothing$. Or on a un isomorphisme naturel de faisceaux entre P^{G} et le faisceau des isomorphismes entre (s, α) et (t, β) dans le champ $\mathscr{C}^{\mathrm{G}}/\mathrm{T}_j$, donc (s, α) et (t, β) sont isomorphes dans $\mathscr{C}^{\mathrm{G}}/\mathrm{T}_j$. Cela conclut la preuve (si $(s, \alpha) = (t, \beta)$, on trouve bien que localement, le faisceau des automorphismes de (s, α) est isomorphe à H^{G}). □

5.2. Cas d'un corps algébriquement clos. — Dans cette section, $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(k)$, où k est un corps. On renvoie à [**Mar09**], section 3.1, pour la définition et quelques propriétés des k-schémas en groupes linéairement réductifs.

Définition 5.2.1. — Soit k un corps, G un k-schéma en groupes et H un k-schéma en groupes vectoriel (i.e. $\mathrm{H} \xrightarrow{\sim} \mathbb{G}^n_{a,k}$). On dit qu'une action de G sur H est k-linéarisable s'il existe un k-isomorphisme G-équivariant $\mathrm{H} \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{H})$ (voir [**McN10**] 2.3).

Si H est une k-forme de $\mathbb{G}^n_{a,k}$, on dit qu'une action de G sur H est géométriquement linéarisable si l'action de $\mathrm{G}_{\overline{k}}$ sur $\mathrm{H}_{\overline{k}}$ est linéarisable.

Plus généralement, pour un k-groupe unipotent H, on dit qu'une action (resp. une action extérieure) de G sur H est linéarisable s'il existe une suite de composition caractéristique de H telle que les actions induites de G sur les quotients de cette suite soient linéarisables (resp. telle que l'action extérieure induise des actions de G sur les quotients de cette suite et que celles-ci soient linéarisables).

Remarque 5.2.2. — En particulier, l'hypothèse de linéarisabilité (resp. de linéarisabilité géométrique) implique que le groupe unipotent H est lisse, connexe et k-déployé (resp. lisse et connexe).

Exemple 5.2.3. — Si G est réductif, l'hypothèse de linéarisabilité est satisfaite par exemple dans les cas suivants :
- le corps k est de caractéristique nulle (via l'application exponentielle : voir par exemple l'introduction de [**McN12**]).
- l'action de G sur H provient d'une extension de G par H qui est un k-groupe trigonalisable (voir par exemple [**DG70**], IV.2.3 proposition 3.4.(v)).
- l'action de G sur H provient d'une extension de G par H qui est un sous-groupe parabolique d'un k-groupe réductif (voir [**SGA3**], XXVI, proposition 2.1 pour le cas d'une base quelconque).
- le groupe H est k-déployé (c'est un résultat récent de Mc Ninch : voir [**McN12**], théorème C).

Proposition 5.2.4. — *Soient* H, G *deux k-groupes. On suppose* H *unipotent,* G *linéairement réductif et l'action de* G *sur* H *linéarisable. Alors* $\mathrm{H}^1_0(\mathrm{G}, \mathrm{H}) = 1$ *et* $\mathrm{H}^2_0(\mathrm{G}, \mathrm{H}) = \mathrm{N}^2(\mathrm{G}, \mathrm{H})$.

Démonstration. — Pour montrer que $\mathrm{H}^1_0(\mathrm{G}, \mathrm{H}) = 1$ et $\mathrm{H}^2_0(\mathrm{G}, \mathrm{H}) = \mathrm{N}^2(\mathrm{G}, \mathrm{H})$, on utilise les dévissages des propositions 3.5.1 et 3.5.2 pour se ramener au cas où H est de la forme $\mathbb{G}^n_{a,k}$. Ensuite, l'hypothèse de linéarisabilité et le corollaire 4.0.7 assurent que $\mathrm{H}^i_0(\mathrm{G}, \mathrm{V}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^i_0(\mathrm{G}, \mathbb{G}^n_{a,k})$ est une bijection, où V est la représentation linéaire de G correspondant à l'action de G sur $\mathbb{G}^n_{a,k}$. Enfin, $\mathrm{H}^i_0(\mathrm{G}, \mathrm{V}) = 0$ car G est linéairement réductif.

Voir aussi [**McN10**], théorèmes 5.1 et 5.2, pour une preuve similaire en termes d'extensions de groupes. □

5.3. Descente sur un corps quelconque. — Soit $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(k)$, k un corps, k^s une clôture séparable de k et $\overline{k}$ une clôture algébrique de k. Si X est une k-variété algébrique, on note $\overline{\mathrm{X}}$ ou $\mathrm{X}_{\overline{k}}$ le produit fibré $\mathrm{X} \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}(\overline{k})$.

On veut décrire les noyaux

$$\mathrm{H}^i_{0,\mathrm{fppf}}(\mathrm{G}, \mathrm{H}; \varphi) := \mathrm{Ker}\left(\mathrm{H}^i_0(\mathrm{G}, \mathrm{H}; \varphi) \longrightarrow \mathrm{H}^i_0(\mathrm{G}_{\overline{k}}, \mathrm{H}_{\overline{k}}; \varphi)\right)$$

et

$$\mathrm{H}^i_{0,\text{ét}}(\mathrm{G}, \mathrm{H}; \varphi) := \mathrm{Ker}\left(\mathrm{H}^i_0(\mathrm{G}, \mathrm{H}; \varphi) \longrightarrow \mathrm{H}^i_0(\mathrm{G}_{k^s}, \mathrm{H}_{k^s}; \varphi)\right) .$$

Remarquons que $\mathrm{H}^0_{0,*}(\mathrm{G}, \mathrm{H}; \varphi) = 1$ (ici et dans la suite, $* =$ fppf ou ét).

Dans cette partie, on suppose les groupes H et G de type fini sur k. Les énoncés de cette section sont en quelque sorte des versions non commutatives des énoncés classiques de changement de base pour la cohomologie de Hochschild usuelle (voir par exemple [**Jan03**], 4.13.(a)).

Lemme 5.3.1. — *On dispose d'un isomorphisme naturel d'ensembles pointés :*

$$\mathrm{H}^1_{0,*}(\mathrm{G},\mathrm{H};\varphi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1_*(k,\mathrm{H}^{\mathrm{G}})\,.$$

Démonstration. — Pour tout Spec(k)-G-H-torseur P, le foncteur des points fixes P^{G} est un pseudo-torseur sous le groupe H^{G}. Par définition, si $[\mathrm{P}] \in \mathrm{H}^1_{0,*}(\mathrm{G},\mathrm{H};\varphi)$, $\mathrm{P}^{\mathrm{G}}(\overline{k}) \neq \varnothing$ (resp. $\mathrm{P}^{\mathrm{G}}(k^s) \neq \varnothing$), donc le torseur P^{G} définit bien une classe dans $\mathrm{H}^1_*(k,\mathrm{H}^{\mathrm{G}})$ puisque H et G sont de type fini. On vérifie ensuite que cette application est une bijection. □

Pour le H^2, la situation est un peu plus délicate, notamment si H n'est pas commutatif.

Lemme 5.3.2. — *Soit $\mathscr{C}$ une gerbe telle que $[\mathscr{C}] \in \mathrm{H}^2_{0,*}(\mathrm{G},\mathrm{H};\varphi)$. On suppose que $\mathrm{H}^1_0(\mathrm{G}_{\overline{k}},\mathrm{H}_{\overline{k}}) = 1$ pour toute action de $\mathrm{G}_{\overline{k}}$ sur $\mathrm{H}_{\overline{k}}$ relevant l'action extérieure φ de $\mathrm{G}_{\overline{k}}$ sur $\mathrm{H}_{\overline{k}}$ (resp. la même hypothèse avec k^s au lieu de $\overline{k}$). Alors le champ $\mathscr{C}^{\mathrm{G}}$ est une gerbe fppf (resp. étale), dont le lien est localement représentable par H^{G} (pour une certaine action de* G *sur* H*).*

Démonstration. — C'est une reformulation de la proposition 5.1.1. □

Dans le cas commutatif, on a le cas particulier suivant :

Corollaire 5.3.3. — *Supposons le groupe* H *commutatif. Si $\mathrm{H}^1_0(\mathrm{G}_{\overline{k}},\mathrm{H}_{\overline{k}}) = 0$, alors on a une suite exacte naturelle d'ensembles marqués*

$$1 \longrightarrow \mathrm{H}^2_{0,*}(\mathrm{G},\mathrm{H};\varphi) \longrightarrow \mathrm{H}^2_*(k,\mathrm{H}^{\mathrm{G}})\,.$$

Appliquons ces considérations au cas des extensions de groupes linéairement réductifs par des groupes unipotents.

Proposition 5.3.4. — *Soient* H, G *deux k-groupes de type fini. On suppose $\mathrm{H}_{\overline{k}}$ unipotent, $\mathrm{G}_{\overline{k}}$ linéairement réductif et l'action de* G *sur* H *géométriquement linéarisable. Alors $\mathrm{H}^2_0(\mathrm{G},\mathrm{H}) = \mathrm{N}^2(\mathrm{G},\mathrm{H})$.*

Si on suppose en outre que H *est muni d'une action de* G*, alors $\mathrm{H}^1_0(\mathrm{G},\mathrm{H}) = 1$ dès que $\mathrm{H}^1_{\mathrm{fppf}}(k,\mathrm{H}^{\mathrm{G}}) = 1$ ou que l'action de* G *sur* H *est linéarisable sur k.*

Démonstration. — Par la proposition 5.2.4, on a $\mathrm{H}^2_0(\overline{\mathrm{G}},\overline{\mathrm{H}}) = \mathrm{N}^2(\overline{\mathrm{G}},\overline{\mathrm{H}})$ et $\mathrm{H}^1_0(\overline{\mathrm{G}},\overline{\mathrm{H}}) = 1$. On conclut en utilisant le lemme 5.3.2, en remarquant que l'on a $\mathrm{H}^2_{\mathrm{fppf}}(k,\overline{\mathrm{H}}^{\overline{\mathrm{G}}}) = \mathrm{N}^2(k,\overline{\mathrm{H}}^{\overline{\mathrm{G}}})$ par un résultat de Douai (voir par exemple [**Bor93**], corollaire 4.2), puisque $\overline{\mathrm{H}}^{\overline{\mathrm{G}}}$ est un groupe unipotent. □

Exemple 5.3.5. — Si le corps k est de caractéristique nulle, l'hypothèse de linéarisabilité est satisfaite. On obtient alors, via le corollaire 3.3.16 et la proposition 3.2.9, le théorème de Mostow rappelé dans l'introduction, puisqu'en caractéristique nulle, le H^1 d'un groupe unipotent est trivial.

Remarque 5.3.6. — Au vu du corollaire 3.3.16 et de la proposition 3.2.9, la proposition 5.3.4 généralise à la fois le résultat de Mostow de l'introduction (si la caractéristique est nulle) et les résultats récents de McNinch (voir [**McN10**], théorèmes 5.1 et 5.2), où l'auteur considère le cas des extensions k-linéarisables. En effet, il est clair que l'on peut remplacer dans 5.3.4, l'hypothèse "$\mathrm{G}_{\overline{k}}$ linéairement réductif" par les hypothèses qui figurent dans les théorèmes 5.1 et 5.2 de [**McN10**].

Remarquons en outre que cette proposition permet d'expliquer certains contre-exemples au théorème de Mostow en caractéristique positive : sous l'hypothèse de linéarisabilité géométrique (qui est satisfaite dans tous les exemples connus), toute extension d'un groupe linéairement réductif G par un groupe unipotent H est scindée *à torsion près par un torseur sous* H : en particulier, dans tous les contre-exemples de [**SGA3**], Exposé XVII, 5.9, l'extension n'est pas scindée, mais il existe un torseur sous H tel que l'extension tordue par ce torseur admette une section.

5.4. Cas d'un anneau local artinien. — Soit $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$, A anneau local artinien, de corps résiduel k.

Proposition 5.4.1. — *On suppose* H *lisse et* G *plat de type fini sur* A*, tel que* $\mathrm{G}_{\overline{k}}$ *soit linéairement réductif. Alors*

$$Ш^1_{0,f}(\mathrm{G}, \mathrm{H}; \varphi) = 1\,.$$

Démonstration. — Soit P un Spec(A)-G-H-torseur. Remarquons d'abord que le théorème XI.3.1.1 de [**Ray70**] assure que P est représentable par un A-schéma. Puisque $\mathrm{G}_{\overline{k}}$ est linéairement réductif, on a $\mathrm{H}^1(\mathrm{G}_{\overline{k}}, (\Omega^1_{\mathrm{P}_{\overline{k}}})^*) = 0$. Donc le théorème 9.7 de [**SGA3**], exposé XII, assure que le schéma P^{G} est lisse. Par conséquent, le morphisme $\mathrm{P}^{\mathrm{G}}(\mathrm{A}) \to \mathrm{P}^{\mathrm{G}}(k)$ est surjectif, d'où le résultat. $\square$

Proposition 5.4.2. — *On suppose* H *lisse et* G *plat de type fini sur* A*, tel que* $\mathrm{G}_{\overline{k}}$ *soit linéairement réductif. Alors*

$$Ш^2_{0,f}(\mathrm{G}, \mathrm{H}; \varphi) = \mathrm{N}^2(\mathrm{G}, \mathrm{H}; \varphi)\,.$$

Démonstration. — La preuve s'inspire de la précédente, la difficulté étant l'analogue du théorème 9.7 de [**SGA3**], exposé XII, pour un champ. On commence par le lemme suivant :

Lemme 5.4.3. — *Soit* T *un schéma et* H/T *un schéma en groupes lisse séparé de présentation finie. Soit* $\mathscr{C}$ *une* T*-gerbe liée par* H*. Alors* $\mathscr{C}$ *est un champ algébrique lisse sur* T.

Démonstration. — C'est une conséquence de l'exemple 4.6.1 de [**LMB00**]. □

On a besoin d'une version champêtre du théorème 9.7 de [**SGA3**], exposé XII :

Théorème 5.4.4. — *Soit* T *un schéma noetherien,* G *un* T*-schéma en groupes plat de type fini opérant sur un* T*-champ algébrique lisse* $\mathscr{X}$*. On suppose que pour tout point géométrique* $t \in \mathrm{T}$*,* $\mathrm{H}^1(\mathrm{G}_t, \Omega^1_{\mathscr{X}_t}) = 0$.

Alors le champ des points fixes $\mathscr{X}^{\mathrm{G}}$ *est formellement lisse sur* T*, au sens suivant : pour tout immersion fermée* $\mathrm{S}_0 \to \mathrm{S}$ *de* T*-schémas définie par un idéal* $\mathscr{I}$ *de carré nul, le foncteur naturel*

$$\mathscr{X}^{\mathrm{G}}(\mathrm{S}) \longrightarrow \mathscr{X}^{\mathrm{G}}(\mathrm{S}_0)$$

est essentiellement surjectif. Autrement dit, le foncteur

$$\mathrm{S}/\mathrm{T} \mapsto \big\{\text{classes d'isomorphisme dans} \mathscr{X}^{\mathrm{G}}(\mathrm{S})\big\}$$

est formellement lisse.

Démonstration. — On s'inspire de la preuve du théorème 9.7 de [**SGA3**], exposé XII, en remplaçant la théorie des déformations classique (pour les schémas) par une version champêtre, due à Olsson. On rappelle d'abord que le complexe cotangent $\mathrm{L}^\bullet_{\mathscr{X}/\mathrm{S}}$ du morphisme $\mathscr{X} \to \mathrm{T}$ est défini dans [**Ols07**], section 8. Puisque le champ $\mathscr{X}$ est lisse sur S, on dispose d'un quasi-isomorphisme canonique (voir [**LMB00**], lemme 17.5.8) :

$$\mathrm{L}^\bullet_{\mathscr{X}/\mathrm{S}} \xrightarrow{\text{qis}} \Omega^1_{\mathscr{X}/\mathrm{S}}\,.$$

Soit alors $\epsilon_0 \in \mathscr{X}^{\mathrm{G}}(\mathrm{S}_0)$. Par lissité de $\mathscr{X}/\mathrm{S}$, il existe un relèvement $\epsilon \in \mathscr{X}(\mathrm{S})$ de ϵ_0 à isomorphisme près (voir [**LMB00**], proposition 4.25.(ii)). On démontre alors le lemme suivant :

Lemme 5.4.5. — *Avec les notations précédentes, l'obstruction à relever* ϵ_0 *dans* $\mathscr{X}^{\mathrm{G}}(\mathrm{S})$ *(à isomorphisme près) est une classe* $c(\epsilon_0) \in \mathrm{H}^1(\mathrm{G}_{\mathrm{S}_0}, \mathrm{L}_0)$*, où* L_0 *est le* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}$*-module*

$$\mathrm{L}_0 := \mathscr{H}\!om_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}}(\epsilon_0^*\Omega^1_{\mathscr{X}_0/\mathrm{S}_0}; \mathscr{I})\,.$$

Démonstration. — On considère la catégorie $\underline{\mathrm{Def}}(\epsilon_0)$ des déformations de $\epsilon_0 : \mathrm{S}_0 \to \mathscr{X}_0$ au-dessus de $\mathrm{S}_0 \to \mathrm{S}$ (voir [**Ols06**], 4.1). Par le théorème 1.5.(ii) de [**Ols06**], pour S'/S variable, l'ensemble des classes d'isomorphisme de relèvements de ϵ_0 à $\mathscr{X}(\mathrm{S}')$ est naturellement un torseur sous le groupe

$\mathrm{Ext}^0(\mathrm{L}\epsilon_0^*\mathrm{L}^\bullet_{\mathscr{X}_0'/\mathrm{S}_0'};\mathscr{I})$. Or le champ $\mathscr{X}/\mathrm{S}$ est lisse, donc ce torseur est trivial (il existe un relèvement ϵ) et on a le quasi-isomorphisme déjà mentionné $\mathrm{L}^\bullet_{\mathscr{X}_0'/\mathrm{S}_0'} \xrightarrow{\mathrm{qis}} \Omega^1_{\mathscr{X}_0'/\mathrm{S}_0'}$. Par conséquent, l'ensemble des classes d'isomorphisme de relèvements de ϵ_0 à $\mathscr{X}(\mathrm{S}')$ est un torseur trivial sous le groupe $\mathrm{Hom}(\epsilon_0^*\Omega^1_{\mathscr{X}_0'/\mathrm{S}_0'};\mathscr{I})$. On pose alors $\mathrm{L}_0 := \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}}(\epsilon_0^*\Omega^1_{\mathscr{X}_0/\mathrm{S}_0};\mathscr{I})$, qui est un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}$-module. Il est muni d'une action naturelle de G_0 (puisque $\epsilon_0 \in \mathscr{X}_0^{\mathrm{G}_0}(\mathrm{S}_0)$). On poursuit alors la preuve exactement comme dans [**SGA3**], XII, lemme 9.4 pour conclure la preuve du lemme. □

Pour prouver le théorème, on peut supposer $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$, où A est un anneau local artinien, et $\mathrm{S}_0 = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}_0)$, où $\mathrm{A}_0 = \mathrm{A}/\mathrm{I}$, I idéal de A de carré nul. Par dévissage, on se ramène au cas où I est annulé par l'idéal maximal de A. On conclut alors exactement comme dans [**SGA3**], exposé XII, théorème 9.7. □

Montrons la proposition 5.4.2. Soit $\mathscr{C}$ une Spec(A)-G-H-gerbe dont la classe est dans $\text{Ш}^2_{0,f}(\mathrm{G},\mathrm{H};\varphi)$. La conjonction du lemme 5.4.3 et du théorème 5.4.4 appliqués à l'action de G sur $\mathscr{C}$ assure que le champ $\mathscr{C}^{\mathrm{G}}$ est formellement lisse sur A (on rappelle que H/A est séparé, voir par exemple [**SGA3**], exposé VI_{A}, 0.3). Par définition de la lissité formelle d'un champ, l'existence d'une k-section du k-champ $\mathscr{C}_k^{\mathrm{G}_k}$ assure alors l'existence d'une A-section du A-champ $\mathscr{C}^{\mathrm{G}}$. Donc la Spec(A)-G-H-gerbe $\mathscr{C}$ est neutre. □

5.5. Cas d'un anneau noetherien local complet. — On commence par un lemme :

Lemme 5.5.1. — *Soit* T *un schéma et* H, G *deux* T*-schémas en groupes. Si* H *est lisse de présentation finie sur* T*, alors pour toute* H*-gerbe* $\mathscr{C}$ *sur* T*, le foncteur des classes d'isomorphismes* $\mathrm{T}'/\mathrm{T} \mapsto \mathscr{C}(\mathrm{T}')/\sim$ *est un foncteur localement de présentation finie.*

Supposons en outre que G *soit de présentation finie. Alors pour toute* T-G-H*-gerbe* $\mathscr{C}$*, le foncteur associé à* $\mathscr{C}^{\mathrm{G}}$ *est localement de présentation finie. De même, pour tout* T-G-H*-torseur* P*, le foncteur associé à* P^{G} *est localement de présentation finie.*

Remarque 5.5.2. — Par "foncteur associé à une gerbe", on entend le foncteur des classes d'isomorphisme des sections de cette gerbe.

Démonstration. — Montrons l'assertion concernant $\mathscr{C}^{\mathrm{G}}$. La propriété étant locale, on peut supposer que $\mathscr{C} \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{TORS}}(\mathrm{H})$. Soit $(\mathrm{T}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ un système projectif filtrant de T-schémas, qui sont affines comme schémas. On cherche à montrer que le foncteur canonique

$$\varinjlim_{\lambda} \underline{\mathrm{TORS}}(\mathrm{H})^{\mathrm{G}}(\mathrm{T}_\lambda) \longrightarrow \underline{\mathrm{TORS}}(\mathrm{H})^{\mathrm{G}}(\varprojlim_{\lambda} \mathrm{T}_\lambda)$$

induit une bijection entre les ensembles de classes d'isomorphisme respectifs. Pour ce faire, on remarque pour tout T-schéma T', la catégorie $\underline{\mathrm{TORS}}(\mathrm{H})^{\mathrm{G}}(\mathrm{T}')$ est canoniquement équivalente à la catégorie des couples (P, s), où $\mathrm{P} \in \underline{\mathrm{TORS}}(\mathrm{H})(\mathrm{T}')$ et s est une section de l'extension de T'-faisceaux en groupes

$$1 \longrightarrow {}_{\mathrm{P}}\mathrm{H} \longrightarrow \underline{\mathrm{SAut}}(\mathrm{P}; \mathrm{G}) \longrightarrow \mathrm{G} \longrightarrow 1\,,$$

ce qui induit un isomorphisme entre le foncteur associé à $\underline{\mathrm{TORS}}(\mathrm{H})^{\mathrm{G}}$ et le foncteur des telles paires (P, s). On note $\mathscr{P}(\mathrm{T}')$ la catégorie des classes d'isomorphisme de ces paires (P, s) définies sur T'.

Par hypothèse, les schémas en groupes G et H sont de présentation finie, et H/S est lisse, donc le torseur P est un espace algébrique de présentation finie et ${}_{\mathrm{P}}\mathrm{H}$ est un espace algébrique de présentation finie, donc $\underline{\mathrm{SAut}}(\mathrm{P}; \mathrm{G})$ est un espace algébrique de présentation finie (voir [**LMB00**], chapitre 10).

Soient alors deux paires sur T_{λ_0} : $(\mathrm{P}_{\lambda_0}, s_{\lambda_0})$ et $(\mathrm{Q}_{\lambda_0}, t_{\lambda_0})$, telles que l'on ait un isomorphisme

$$\phi : (\mathrm{P}_{\lambda_0} \times_{\mathrm{T}_{\lambda_0}} \mathrm{T}_\infty, s_{\lambda_0} \times_{\mathrm{T}_{\lambda_0}} \mathrm{T}_\infty) \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Q}_{\lambda_0} \times_{\mathrm{T}_{\lambda_0}} \mathrm{T}_\infty, t_{\lambda_0} \times_{\mathrm{T}_{\lambda_0}} \mathrm{T}_\infty)\,.$$

Or H est de présentation finie, donc les espaces algébriques $\mathrm{P}_{\lambda_0} \times_{\mathrm{T}_{\lambda_0}} \mathrm{T}_\infty$ et $\mathrm{Q}_{\lambda_0} \times_{\mathrm{T}_{\lambda_0}} \mathrm{T}_\infty$ aussi, donc par [**EGA**], IV_3, théorème 8.8.2 et la version "champs et espaces algébriques" de [**Ryd11**], l'isomorphisme sur T_∞ (induit par ϕ) entre les H-torseurs $\mathrm{P}_{\lambda_0} \times_{\mathrm{T}_{\lambda_0}} \mathrm{T}_\infty$ et $\mathrm{Q}_{\lambda_0} \times_{\mathrm{T}_{\lambda_0}} \mathrm{T}_\infty$ est défini sur T_{λ_1} pour un $\lambda_1 \geqslant \lambda_0$. De même, l'isomorphisme entre $s_{\lambda_0} \times_{\mathrm{T}_{\lambda_0}} \mathrm{T}_\infty$ et $t_{\lambda_0} \times_{\mathrm{T}_{\lambda_0}} \mathrm{T}_\infty$ est défini sur T_{λ_2} pour un $\lambda_2 \geqslant \lambda_1$, puisque les espaces algébriques en groupes G et $\underline{\mathrm{SAut}}(\mathrm{P}; \mathrm{G})$ sont de présentation finie. Cela assure que les paires $(\mathrm{P}_{\lambda_0} \times_{\mathrm{T}_{\lambda_0}} \mathrm{T}_{\lambda_2}, s_{\lambda_0} \times_{\mathrm{T}_{\lambda_0}} \mathrm{T}_{\lambda_2})$ et $(\mathrm{Q}_{\lambda_0} \times_{\mathrm{T}_{\lambda_0}} \mathrm{T}_{\lambda_2}, t_{\lambda_0} \times_{\mathrm{T}_{\lambda_0}} \mathrm{T}_{\lambda_2})$ sont isomorphes, donc $(\mathrm{P}_{\lambda_0}, s_{\lambda_0})$ et $(\mathrm{Q}_{\lambda_0}, t_{\lambda_0})$ coincident dans $\varinjlim_\lambda \mathscr{P}(\mathrm{T}_\lambda)$.

Soit $(\mathrm{P}, s) \in \mathscr{P}(\mathrm{T}_\infty)$. De même que précédemment, le fait que H et G soient de présentation finie assure que (P, s) est défini sur T_{λ_0} pour un certain λ_0.

Finalement, on a montré que l'application naturelle

$$\varinjlim_{\lambda} \mathscr{P}(\mathrm{T}_\lambda) \longrightarrow \mathscr{P}(\varprojlim_{\lambda} \mathrm{T}_\lambda)$$

est une bijection, ce qui conclut la preuve car $\mathscr{P}$ coincide avec le foncteur associé à $\mathscr{C}^{\mathrm{G}}$.

Montrons maintenant le résultat analogue pour P^{G} : on dispose d'un isomorphisme de foncteurs entre P^{G} et le foncteur $\mathscr{S} : \mathrm{T}/\mathrm{S} \mapsto \mathrm{Sect}_{\mathrm{T}}({}_{\mathrm{P}}\mathrm{H} \rtimes \mathrm{G} \to \mathrm{G})$. Or ${}_{\mathrm{P}}\mathrm{H}$ et G sont des S-espaces algébriques en groupes de présentation finie, donc par [**Ryd11**], le foncteur $\mathscr{S}$ est localement de présentation finie, donc P^{G} est localement de présentation finie. $\square$

Soit A un anneau noetherien local complet, $\mathfrak{m}$ son idéal maximal, k son corps résiduel.

Proposition 5.5.3. — *On suppose* H *et* G *de présentation finie sur* A*, plats sur* A*,* H_k *lisse sur* k *et* $\mathrm{G}_{\overline{k}}$ *linéairement réductif sur* $\overline{k}$*. Alors*

$$Ш^1_{0,f}(\mathrm{G},\mathrm{H};\varphi) = 1\,,$$

$$Ш^2_{0,f}(\mathrm{G},\mathrm{H};\varphi) = \mathrm{N}^2(\mathrm{G},\mathrm{H};\varphi)\,.$$

Démonstration. —
- Degré 1 : Soit P un Spec(A)-G-H-torseur, dont la classe est dans $Ш^1_{0,f}(\mathrm{G},\mathrm{H};\varphi)$. Par la proposition 5.4.1, pour tout $n \geqslant 1$, puisque l'anneau $\mathrm{A}/\mathfrak{m}^n$ est artinien à corps résiduel k, on a

$$\mathrm{P}^{\mathrm{G}}(\mathrm{A}/\mathfrak{m}^n) \neq \varnothing\,. \tag{4}$$

  Un théorème dû à Pfister et Popescu (voir [**PP75**], théorème 2.5 et [**Pop86**], théorème 1.5) assure que l'anneau A vérifie la proprieté d'approximation forte, et donc la condition (4) assure que

$$\mathrm{P}^{\mathrm{G}}(\mathrm{A}) \neq \varnothing\,,$$

  donc que $[\mathrm{P}] = 1 \in \mathrm{H}^1_0(\mathrm{G},\mathrm{H})$.
- Degré 2 : la preuve est la même que pour le degré 1. Soit $\mathscr{C}$ une Spec(A)-G-H-gerbe, dont la classe est dans $Ш^2_{0,f}(\mathrm{G},\mathrm{H};\varphi)$. Par la proposition 5.4.2, pour tout $n \geqslant 1$, puisque l'anneau $\mathrm{A}/\mathfrak{m}^n$ est artinien à corps résiduel k, on a

$$\mathscr{C}^{\mathrm{G}}(\mathrm{A}/\mathfrak{m}^n) \neq \varnothing\,. \tag{5}$$

  Par le lemme 5.5.1, le foncteur associé à $\mathscr{C}^{\mathrm{G}}$ est localement de présentation finie. Donc le théorème de Pfister et Popescu pour le foncteur $\mathscr{C}^{\mathrm{G}}$ (voir [**PP75**], théorème 2.5) assure que la condition (5) implique que

$$\mathscr{C}^{\mathrm{G}}(\mathrm{A}) \neq \varnothing\,,$$

  donc que $[\mathscr{C}] \in \mathrm{N}^2(\mathrm{G},\mathrm{H})$.

□

5.6. Cas d'un anneau local hensélien excellent. — Dans cette section, A est un anneau local hensélien excellent. On note $\widehat{\mathrm{A}}$ le complété de A.

Proposition 5.6.1. — *Si* G *et* H *sont de présentation finie sur* A*, alors pour* $i = 1, 2$*, l'application*

$$\mathrm{H}^i_0(\mathrm{G},\mathrm{H};\varphi) \longrightarrow \mathrm{H}^i_0(\mathrm{G}_{\widehat{\mathrm{A}}},\mathrm{H}_{\widehat{\mathrm{A}}};\varphi)$$

est injective.

Démonstration. — On applique le théorème de Popescu (voir théorème 1.3 de [**Pop86**]) aux foncteurs localement de présentation finie P^{G} et $\mathscr{C}^{\mathrm{G}}$ pour un Spec(A)-G-H-torseur P et une Spec(A)-G-H-gerbe $\mathscr{C}$. $\square$

5.7. Élimination de l'hypothèse excellente. — Au lieu d'utiliser le résultat de Popescu sur les anneaux henséliens excellents, on peut se limiter au résultat classique d'Artin sur les hensélisés des localisés en un idéal premier des **Z**-algèbres de type fini. On conserve les notations et hypothèses précédentes : $(\mathrm{A}, \mathfrak{m})$ est un anneau local hensélien de corps résiduel k, G, H sont deux A-schémas en groupes plats de présentation finie. On suppose H/A lisse et $\mathrm{G}_{\overline{k}}$ linéairement réductif. On va montrer que le résultat d'Artin implique le fait suivant :

Proposition 5.7.1. — *Soit* $(\mathrm{A}, \mathfrak{m})$ *un anneau local hensélien de corps résiduel* k*. Soient* H, G *deux* A*-schémas en groupes comme plus haut. Soit* $\mathscr{C}$ *une* A-G-H-*gerbe (resp. un* A-G-H-*torseur). Soit* F *le foncteur de la catégorie des* A-*algèbres dans celle des ensembles défini par*

$$\mathrm{F}(\mathrm{B}) := \left\{\text{classes d'isomorphisme dans } \mathscr{C}^{\mathrm{G}}(\mathrm{B})\right\} .$$

Alors $\mathrm{F}(k) \neq \varnothing \Rightarrow \mathrm{F}(\mathrm{A}) \neq \varnothing$.

Autrement dit, on a

$$\text{Ш}^1_{0,f}(\mathrm{G}, \mathrm{H}; \varphi) = 1 ,$$
$$\text{Ш}^2_{0,f}(\mathrm{G}, \mathrm{H}; \varphi) = \mathrm{N}^2(\mathrm{G}, \mathrm{H}; \varphi) .$$

Démonstration. — En utilisant notamment les propositions 18.6.14(iii) de [**EGA**], IV_4, et 5.13.3(iii) de [**EGA**], IV_2, on obtient que l'anneau A est limite inductive filtrante

$$\mathrm{A} = \varinjlim_{\alpha} \mathrm{A}_\alpha$$

où les A_α sont les hensélisés des localisations des sous-anneaux de type fini de A. En outre, les morphismes de transition sont des morphismes locaux.

Par ailleurs, on vérifie que $k = \varinjlim_\alpha k_\alpha$, où k_α est le corps résiduel de A_α.

Puisque H et G sont de présentation finie, le théorème 8.8.2 de [**EGA**], IV_2, assure qu'il existe α_0 et $\mathrm{H}_0, \mathrm{G}_0, \mathscr{C}_0, \mathrm{F}_0$ définis sur A_{α_0} tels que $\mathrm{H}, \mathrm{G}, \mathscr{C}, \mathrm{F}$ s'obtiennent par changement de base à partir de $\mathrm{H}_0, \mathrm{G}_0, \mathscr{C}_0, \mathrm{F}_0$.

On se limite maintenant au sous-système inductif de (A_α) de "base" A_{α_0}.

Puisque le foncteur F_0 est localement de présentation finie, on a une bijection :

$$\varinjlim_{\alpha} \mathrm{F}_0(k_\alpha) \xrightarrow{\sim} \mathrm{F}_0(k) = \mathrm{F}(k) .$$

Donc il existe α_1 tel que $\mathrm{F}_0(k_{\alpha_1}) \neq \varnothing$. On applique ensuite les résultats précédents (voir proposition 5.5.3) sur l'anneau A_{α_1} : puisque $\mathrm{F}_0(k_{\alpha_1}) \neq \varnothing$, on en déduit $\mathrm{F}_0(\widehat{\mathrm{A}_{\alpha_1}}) \neq \varnothing$. On applique alors le théorème d'approximation d'Artin (cf [**Art69**], théorème 1.12) à l'anneau A_{α_1} (qui est un hensélisé en un idéal premier d'une **Z**-algèbre de type fini) : on en déduit que $F_0(A_{\alpha_1}) \neq \varnothing$. Enfin, on dispose d'un morphisme naturel

$$F_0(A_{\alpha_1}) \longrightarrow F_0(A) = F(A)$$

dont on déduit que $F(A) \neq \varnothing$. □

5.8. Premiers résultats globaux. — Définissons, pour un schéma T et deux T-schémas en groupes G et H, l'ensemble $H^i_{0,\mathrm{Nis}}(G, H; \varphi)$ comme l'ensemble des classes d'isomorphisme de T-G-H-torseurs P (resp. de T-G-H-gerbes $\mathscr{C}$) sur T, tels que le faisceau P^G (resp. le champ $\mathscr{C}^G$) soit un torseur (resp. une gerbe) pour la topologie de Nisnevich (on renvoie par exemple à [**Nis89**], section 1, pour la définition de cette topologie de Grothendieck).

Proposition 5.8.1. — *Soit* S *un schéma intègre,* G *et* H *des* S*-schémas en groupes de présentation finie. On suppose* H/S *lisse,* G/S *plat et* $G_{k(\overline{s})}$ *linéairement réductif pour tout point géométrique* $\overline{s} \in S$.

- *Si* G *agit sur* H*, alors l'ensemble* $Ш^1_0(G, H)$ *s'identifie à* $H^1_{0,\mathrm{Nis}}(G, H)$*, qui est lui-même isomorphe (comme ensemble pointé) à* $H^1_{\mathrm{Nis}}(S, H^G)$.
- *Si* H *est muni d'une action extérieure* φ *de* G*, et si on suppose en outre que pour tout point* $s \in S$, $H^1_0(G_s, H_s) = 1$ *pour toute action de* G_s *sur* H_s *relevant* φ*, alors l'ensemble* $Ш^2_0(G, H; \varphi)$ *s'identifie à* $H^2_{0,\mathrm{Nis}}(G, H)$.

Démonstration. — Soit $i = 1$ ou 2. On commence par appliquer la proposition 5.7.1 aux anneaux locaux henséliens $\mathscr{O}^h_{S,s}$, pour $s \in S$. Cela assure que pour tout $[X] \in Ш^i_0(G, H; \varphi)$, pour tout $s \in S$, $X^G(\mathscr{O}^h_{S,s}) \neq \varnothing$. Pour $i = 2$, en utilisant la proposition 5.7.1 en degré 1, on voit que la seconde hypothèse de la proposition 5.1.1 est vérifiée pour un recouvrement Nisnevich de S. Donc finalement $[X] \in H^i_{0,\mathrm{Nis}}(G, H)$.

Dans le cas $i = 1$, on dispose du morphisme évident $H^1_{0,\mathrm{Nis}}(G, H) \to H^1_{\mathrm{Nis}}(S, H^G)$ qui envoie un S-G-H-torseur P sur le torseur P^G sous H^G. On vérifie ensuite que ce morphisme est bien une bijection d'ensembles pointés. □

Remarque 5.8.2. —

- Sous certaines hypothèses supplémentaires, on peut remplacer $Ш^i_0(G, H; \varphi)$ par $\overline{Ш}^i_0(G, H; \varphi)$ (voir la section 5.2).
- Si S est un schéma noethérien intègre de dimension 1, la même preuve assure que la proposition 5.8.1 vaut pour les ensembles $Ш^i_{0,\text{gén}}(G, H; \varphi)$ dès que les hypothèses de cette proposition sont vérifiées pour les points fermés et pour le point générique de S.

On en déduit immédiatement le résultat suivant :

Théorème 5.8.3. — *Soit* S *un schéma intègre,* G *et* H *des* S*-schémas en groupes de présentation finie. On munit* H *d'une action de* G*. On suppose*

– H/S *lisse,* G/S *plat et* $G_{k(\overline{s})}$ *linéairement réductif pour tout point géométrique* $\overline{s} \in S$.
– $H^1_{\mathrm{Nis}}(S, H^G) = 1$.

Alors $Ш^1_0(G, H) = 1$.

De même pour le degré 2, dans le cas commutatif :

Théorème 5.8.4. — *Soit* S *un schéma intègre,* G *et* H *des* S*-schémas en groupes de présentation finie. On munit* H *d'une action de* G. *On suppose*
– H/S *lisse et* commutatif, G/S *plat et* $G_{k(\overline{s})}$ *linéairement réductif pour tout point géométrique* $\overline{s} \in S$.
– $H^2_{\mathrm{Nis}}(S, H^G) = 0$.

Alors $Ш^2_0(G, H) = 0$.

5.9. Cohomologie Nisnevich des liens nilpotents. — On rappelle le résultat suivant, dû à Kato et Saito (voir par exemple [**Nis89**], théorème 1.32) :

Théorème 5.9.1. — *Soit* X *un schéma noethérien de dimension de Krull finie égale à d. Alors pour tout faisceau de groupes commutatifs (pour la topologie Nisnevich)* $\mathscr{F}$ *sur* X,

$$H^n_{\mathrm{Nis}}(X, \mathscr{F}) = 0$$

pour tout $n > d$.

L'objectif est d'étendre ce théorème d'annulation, dans le cas $d = 1$ et $n = 2$, à la cohomologie non abélienne de certains liens.

Définition 5.9.2. — Soit L un lien sur S. On définit une suite de liens $\mathrm{Int}^n(L)$ de la façon suivante :
– $\mathrm{Int}^0(L) := L$.
– $\mathrm{Int}^1(L) = \mathrm{Int}(L) := L/Z(L)$, où Z(L) désigne le centre du lien L.
– $\mathrm{Int}^{n+1}(L) := \mathrm{Int}(\mathrm{Int}^n(L))$ pour $n \geqslant 1$.

Définition 5.9.3. — On dit que le lien L est nilpotent s'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $\mathrm{Int}^n(L) = 1$ (lien unité).

Donnons quelques exemples de liens nilpotents.

Exemple 5.9.4. — – Un lien commutatif est nilpotent.
– Soit H/S un faisceau en groupes nilpotent. Alors le lien $L := \underline{\mathrm{lien}}(H)$ est un lien nilpotent (représentable).
– Plus généralement, soit H/S un faisceau en groupes nilpotent, et L/S un lien localement représentable par un sous-groupe de H. Cela signifie qu'il existe un recouvrement $(S_i)_{i \in I}$ de S, et des sous-faisceaux en groupes $H_i \subset H_{S_i}$ tels que pour tout $i \in I$, la restriction L_{S_i} de L à S_i soit isomorphe à $\underline{\mathrm{lien}}(H_i)$. Alors le lien L est un lien nilpotent.

En effet, si l'on note $Z_0(H) := \{1\}$, $Z_1(H) := Z(H)$ et $Z_{n+1}(H) := \{h \in H : [h, H] \subset Z_n(H)\}$ (suite de composition centrale ascendante), alors on vérifie que le lien $\mathrm{Int}^n(L)_{S_i}$ est représentable par le faisceau en groupes $H_i/Z_n(H_i)$. Or $Z_n(H_i) = H_i$ dès que $Z_n(H) = H$, et H étant nilpotent, il existe N tel que $Z_N(H) = H$. Par conséquent, $\mathrm{Int}^N(L)_{S_i} = 1$ pour tout i, donc $\mathrm{Int}^N(L) = 1$, donc L est nilpotent.

Proposition 5.9.5. — *Soit* S *schéma noethérien de dimension* 1*, muni du site Nisnevich. Soit* L/S *un lien nilpotent. Alors* $H^2_{\mathrm{Nis}}(S, L)$ *contient une unique classe, qui est neutre.*

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur l'entier n minimal tel que $\mathrm{Int}^n(L) = 1$.

– Si $n = 1$, le lien L est commutatif, donc représentable par un faisceau Nisnevich en groupes commutatifs, donc le théorème 5.9.1 assure le résultat.
– Si $n \geqslant 2$, on suppose le résultat connu pour $n - 1$. On sait d'abord que $H^2_{\mathrm{Nis}}(S, L)$ est soit vide, soit un espace principal homogène sous le groupe $H^2_{\mathrm{Nis}}(S, Z(L))$. Or ce groupe est trivial par le cas $n = 1$, donc $H^2_{\mathrm{Nis}}(S, L)$ contient au plus un élément.

  Considérons la suite exacte de liens sur S :
$$1 \longrightarrow Z(L) \longrightarrow L \longrightarrow \mathrm{Int}(L) \longrightarrow 1\,.$$
  Le lien Int(L) est nilpotent et $\mathrm{Int}^{n-1}(\mathrm{Int}(L)) = \mathrm{Int}^n(L) = 1$. Donc par hypothèse de récurrence, on a $H^2_{\mathrm{Nis}}(S, \mathrm{Int}(L)) = \{c'\}$, où c' est une classe neutre. Alors le corollaire IV.3.2.4.(i) de [**Gir71**] assure que le lien L est représentable, donc $H^2_{\mathrm{Nis}}(S, L)$ contient au moins une classe neutre c. Puisque cet ensemble contient au plus un élément, on a $H^2(S, L) = \{c\}$, ce qui conclut la preuve par récurrence.

□

Remarque 5.9.6. — La même preuve assure plus généralement que sur un topos S tel que pour tout groupe abélien A de S on ait $H^2(S, A) = 0$, alors pour tout lien nilpotent L sur S, on a $H^2(S, L) = \{c\}$, c étant une classe neutre.

5.10. Applications aux extensions de schémas en groupes. — Dans toute cette section, on fait les hypothèses suivantes :

S *est un schéma,* G *et* H *sont des* S*-schémas en groupes de présentation finie,* H/S *est lisse et* G/S *est plat.*

5.10.1. Conjugaison des sections. — L'objectif de cette sous-section est d'obtenir des résultats de la forme suivante : étant donnée une extension scindée de S-faisceaux en groupes de la forme
$$1 \longrightarrow H \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

vérifiant certaines hypothèses "locales" (typiquement "pour tout point (géométrique) $\overline{s} \in \mathrm{S}$, deux sections quelconques de la fibre de cette suite sur $k(\overline{s})$ sont conjuguées par un élément de $\mathrm{H}(k(\overline{s}))$"), deux sections quelconques de cette suite exacte sont conjuguées par un élément de H(S). Pour cela, on applique les résultats des sections précédentes.

Théorème 5.10.2. — *Soit* A *un anneau local hensélien, de corps résiduel* k. *Soit*

$$1 \longrightarrow \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{G} \longrightarrow 1 \tag{6}$$

une suite exacte de schémas en groupes sur A. *Soit* s_0 *une section de cette suite. On suppose que la fibre géométrique* $\mathrm{G}_{\overline{k}}$ *est un* $\overline{k}$*-groupe linéairement réductif.*

Alors une section s *de (6), dont la fibre sur* k *est conjuguée à* s_0 *par un élément de* $\mathrm{H}(k)$, *est conjuguée à* s_0 *par un élément de* $\mathrm{H}(\mathrm{A})$.

Si on suppose en outre que $\mathrm{H}^1(k, \mathrm{H}^{\mathrm{G}}) = 1$, *alors il suffit de supposer que les fibres géométriques (sur* $\overline{k}$*) des deux sections sont conjuguées par un élément de* $\mathrm{H}(\overline{k})$.

Démonstration. — C'est une application directe de la proposition 5.7.1. □

On en déduit l'application suivante :

Corollaire 5.10.3. — *Soit* A *un anneau local hensélien, de corps résiduel* k. *Soit*

$$1 \longrightarrow \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{G} \longrightarrow 1 \tag{7}$$

une suite exacte scindée de schémas en groupes sur A. *On suppose que* $\mathrm{H}_{\overline{k}}$ *est un* $\overline{k}$*-groupe unipotent (pas forcément connexe). On fait en outre l'une des hypothèses suivantes :*

1. *le* $\overline{k}$*-groupe* $\mathrm{G}_{\overline{k}}$ *est linéairement réductif et l'action de* G_k *sur* H_k *est* k*-linéarisable.*
2. *le* $\overline{k}$*-groupe* $\mathrm{G}_{\overline{k}}$ *est un* $\overline{k}$*-groupe de type multiplicatif et l'une des conditions suivantes est vérifiée :*
   (a) k *est algébriquement clos.*
   (b) $\mathrm{H}^1(k, \mathrm{H}^{\mathrm{G}}) = 1$.
   (c) k *est parfait,* $\mathrm{G}_{\overline{k}}$ *est lisse et* $\mathrm{H}_{\overline{k}}$ *est connexe.*
   (d) $\mathrm{G}_{\overline{k}}$ *est lisse et* H_k *est* k*-résoluble.*

Alors deux sections quelconques de la suite (7) sont conjuguées par un élément de $\mathrm{H}(\mathrm{A})$.

Remarque 5.10.4. — Tout d'abord, on peut remplacer l'hypothèse 1 par : "$\mathrm{G}_{\overline{k}}$ est linéairement réductif et deux sections quelconques de la fibre sur k de (7) sont conjuguées par $\mathrm{H}(k)$".

Et de nouveau, si $\mathrm{H}^1(k, \mathrm{H}^{\mathrm{G}}) = 1$, on peut remplacer l'hypothèse 1 par "$\mathrm{G}_{\overline{k}}$ est linéairement réductif et l'action de $\mathrm{G}_{\overline{k}}$ sur $\mathrm{H}_{\overline{k}}$ est linéarisable".

Démonstration. — Sous l'hypothèse 1, on applique le théorème 5.10.2 et la proposition 5.3.4. Sous l'hypothèse 2, on applique le théorème 5.10.2 et le théorème 5.1.1.(ii) de l'exposé XVII de [**SGA3**]. □

On cherche ensuite à globaliser ces résultats locaux.

Théorème 5.10.5. — *Soit* S *un schéma localement nœthérien. Soit*

$$1 \longrightarrow \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{G} \longrightarrow 1 \tag{8}$$

une extension scindée (par une section s_0) de S*-schémas en groupes. On suppose que*

- *pour tout point géométrique $\overline{s} \in \mathrm{S}$, $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ est un $k(\overline{s})$-groupe linéairement réductif.*
- *pour tout $s \in \mathrm{S}$, toutes les sections de $\mathrm{E}_s \to \mathrm{G}_s$ sont conjuguées à s_0 par $\mathrm{H}(k(s))$.*

Alors on a une bijection (dépendant de s_0) d'ensembles pointés, où le premier ensemble est pointé par la section s_0 :

$$\mathrm{Sect}_{\mathrm{S}}(\mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}(\mathrm{H}^1_{\mathrm{Nis}}(\mathrm{S}, \mathrm{H}^{\mathrm{G}}) \longrightarrow \mathrm{H}^1_{\mathrm{Nis}}(\mathrm{S}, \mathrm{H}))\,.$$

Démonstration. — C'est une conséquence de la proposition 5.8.1. □

Remarque 5.10.6. — Comme dans la remarque 5.8.2, si S est un schéma noethérien intègre de dimension 1, il suffit de vérifier les hypothèses du théorème 5.10.5 pour les points géométriques au-dessus des points fermés et du point générique de S.

Donnons quelques applications directes de ce théorème :

Corollaire 5.10.7. — *Soit* S *un schéma localement nœthérien. Soit*

$$1 \longrightarrow \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{G} \longrightarrow 1 \tag{9}$$

une extension scindée de S*-schémas en groupes. On fixe une section s_0. On fait en outre l'une des hypothèses suivantes :*

1. *pour tout point $s \in \mathrm{S}$, $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ est un $k(\overline{s})$-groupe linéairement réductif et l'action de G_s sur H_s (supposé unipotent connexe) est linéarisable sur $k(s)$.*
2. *pour tout point $s \in \mathrm{S}$, $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ est un $k(\overline{s})$-groupe de type multiplicatif, $\mathrm{H}_{\overline{s}}$ est un $k(\overline{s})$-groupe unipotent (pas forcément connexe), et l'une des conditions suivantes est vérifiée :*
   (a) *$k(s)$ est algébriquement clos.*
   (b) *$\mathrm{H}^1(k(s), \mathrm{H}^{\mathrm{G}}) = 1$.*
   (c) *$k(s)$ est parfait, $\mathrm{G}_{\overline{k(s)}}$ est lisse et $\mathrm{H}_{\overline{k(s)}}$ est connexe.*

(d) $G_{\overline{k(s)}}$ *est lisse et* H_s *est* $k(s)$*-résoluble.*

Alors on a une bijection naturelle (dépendant de s_0*) d'ensembles pointés*

$$\mathrm{Sect}_S(E \longrightarrow G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}(H^1_{\mathrm{Nis}}(S, H^G) \longrightarrow H^1_{\mathrm{Nis}}(S, H)) .$$

Remarque 5.10.8. — L'ensemble $H^1_{\mathrm{Nis}}(S, H^G)$ est trivial dans les cas suivants :

- si $S = \mathrm{Spec}(A)$, où A est un anneau de Dedekind dont le corps des fractions est un corps global, et H, G sont de type fini sur A (voir [**Nis84**] ou [**Gil02**] : on utilise ici le fait que les groupes unipotents vérifient l'approximation forte sur un corps global).
- si H^G est un faisceau en groupes finis sur S.

On déduit de cette remarque un cas particulier du corollaire précédent (voir également la remarque 5.10.6) :

Corollaire 5.10.9. — *Soit* A *un anneau de Dedekind dont le corps des fractions est un corps global. Soit*

$$1 \longrightarrow H \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1 \tag{10}$$

une extension scindée de A*-schémas en groupes. On fait en outre l'une des hypothèses suivantes :*

1. *pour tout point fermé ou générique* $s \in \mathrm{Spec}(A)$, $G_{\overline{s}}$ *est un* $k(\overline{s})$*-groupe linéairement réductif et l'action de* G_s *sur* H_s *(supposé unipotent connexe) est linéarisable sur* $k(s)$.
2. *pour tout point fermé ou générique* $s \in \mathrm{Spec}(A)$, $G_{\overline{s}}$ *est un* $k(\overline{s})$*-groupe de type multiplicatif,* $H_{\overline{s}}$ *est un* $k(\overline{s})$*-groupe unipotent (pas forcément connexe), et l'une des conditions suivantes est vérifiée :*
   (a) $k(s)$ *est algébriquement clos.*
   (b) $H^1(k(s), H^G) = 1$.
   (c) $k(s)$ *est parfait,* $G_{\overline{k(s)}}$ *est lisse et* $H_{\overline{k(s)}}$ *est connexe.*
   (d) $G_{\overline{k(s)}}$ *est lisse et* H_s *est* $k(s)$*-résoluble.*

Alors deux sections quelconques de la suite (10) sont conjuguées par un élément de $H(A)$.

5.10.10. Existence de section. — L'objectif de cette sous-section est d'obtenir des résultats de la forme suivante : étant donnée une extension de S-schémas en groupes de la forme

$$1 \longrightarrow H \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

vérifiant certaines hypothèses "locales" (typiquement "pour tout point (géométrique) $\overline{s} \in S$, la fibre de cette suite sur $k(\overline{s})$ est scindée"), la suite en question est scindée sur S.

Théorème 5.10.11. — *Soit* A *un anneau local hensélien, de corps résiduel* k*. Soit*

$$1 \longrightarrow \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{G} \longrightarrow 1 \tag{11}$$

une suite exacte de schémas en groupes sur A*. On suppose que la fibre géométrique* $\mathrm{G}_{\overline{k}}$ *est un* $\overline{k}$*-groupe linéairement réductif.*

Alors la suite (11) est scindée à torsion près par un élément de $\mathrm{H}^1(\mathrm{A},\mathrm{H})$ *si et seulement si sa fibre spéciale est scindée à torsion près par un élément de* $\mathrm{H}^1(k,\mathrm{H})$*.*

Si on suppose en outre que H_k *est unipotent, alors il suffit que la fibre spéciale géométrique (sur* $\overline{k}$*) soit scindée et que ses sections soient toutes conjuguées par* $\mathrm{H}(\overline{k})$*.*

Démonstration. — Ce résultat est une conséquence directe de la proposition 5.7.1. □

On en déduit l'application suivante :

Corollaire 5.10.12. — *Soit* A *un anneau local hensélien, de corps résiduel* k*. Soit*

$$1 \longrightarrow \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{G} \longrightarrow 1 \tag{12}$$

une suite exacte de schémas en groupes sur A*. On suppose que* $\mathrm{H}_{\overline{k}}$ *est un* $\overline{k}$*-groupe unipotent (pas nécessairement connexe). On fait en outre l'une des hypothèses suivantes :*

1. *le* $\overline{k}$*-groupe* $\mathrm{G}_{\overline{k}}$ *est linéairement réductif et l'action de* $\mathrm{G}_{\overline{k}}$ *sur* $\mathrm{H}_{\overline{k}}$ *est linéarisable.*
2. *le* $\overline{k}$*-groupe* $\mathrm{G}_{\overline{k}}$ *est un* $\overline{k}$*-groupe de type multiplicatif.*

Alors la suite (12) est scindée à torsion près par $\mathrm{H}^1(\mathrm{A},\mathrm{H})$*. Elle est scindée si* $\mathrm{H}^1(k,\mathrm{H}) = 1$*.*

Remarque 5.10.13. — On peut remplacer dans l'hypothèse 1 la condition de linéarisabilité par : "la fibre spéciale de la suite exacte est géométriquement scindée".

Démonstration. — Sous l'hypothèse 1, c'est une conséquence du théorème 5.10.11 et de la proposition 5.3.4. Sous l'hypothèse 2, c'est une conséquence du théorème 5.10.11 et de [**SGA3**], exposé XVII, théorème 5.1.1.(ii). □

Afin d'obtenir des résultats globaux, on va être amené à utiliser des annulations de certains ensembles de cohomologie Nisnevich en degré 2 obtenus à la section 5.9. On énonce maintenant le résultat global principal :

Théorème 5.10.14. — *Soit* S *un schéma nœthérien intègre de dimension* $\leqslant 1$. *Soit*

$$1 \longrightarrow \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{G} \longrightarrow 1 \tag{13}$$

une extension de S*-schémas en groupes. On suppose que*

– *pour tout* $s \in \mathrm{S}$ *fermé ou générique,* $\mathrm{G}_{k(\overline{s})}$ *est linéairement réductif et* $\mathrm{H}_{\overline{s}}$ *est nilpotent (resp. unipotent).*

– *pour tout* $s \in \mathrm{S}$ *fermé ou générique, on a*

1. $\mathrm{H}^1(k(s), \mathrm{H}) = 1$.
2. *la fibre de la suite exacte courte en* s *est scindée sur* $k(s)$ *(resp.* $\overline{k(s)}$*).*
3. *les sections de cette suite exacte courte sur* $k(s)$ *sont toutes conjuguées par* $\mathrm{H}(k(s))$.

Alors l'extension (13) *est scindée sur* S*, à torsion près par un élément de* $\mathrm{H}^1_{\mathrm{Nis}}(\mathrm{S}, \mathrm{H})$.

Démonstration. — Montrons d'abord que le S-schéma en groupes H est nilpotent. On note $\mathrm{N} := \dim_{\mathrm{S}}(\mathrm{H})$. Si $\mathrm{Z}_n(\mathrm{H})$ désigne les termes de la suite centrale ascendante de H, l'hypothèse sur les fibres de H assure que le faisceau fppf quotient $\mathrm{H}/\mathrm{Z}_{\mathrm{N}}(\mathrm{H})$ a ses fibres géométriques triviales. Donc cela assure que le faisceau $\mathrm{Z}_{\mathrm{N}}(\mathrm{H})$ coincide avec H sur S, donc H est nilpotent.

On note $\mathscr{C}$ la S-G-H-gerbe associée à la suite exacte (13). L'hypothèse 2 et le théorème 5.10.11 assurent que le champ $\mathscr{C}^{\mathrm{G}}$ est localement non vide pour la topologie Nisnevich. Les hypothèses 1 et 3 assurent que le champ $\mathscr{C}^{\mathrm{G}}$ est localement connexe pour la topologie Nisnevich, via le théorème 5.10.2. Par conséquent, $\mathscr{C}^{\mathrm{G}}$ est naturellement une gerbe pour la topologie Nisnevich, dont on note L^{G} le lien. Or le lien L^{G} est localement représentable (pour la topologie Nisnevich) par un sous-groupe de H, donc L^{G} est un lien nilpotent. Alors la proposition 5.9.5 assure que la gerbe $\mathscr{C}^{\mathrm{G}}$ est neutre, ce qui conclut la preuve. □

On continue avec une définition :

Définition 5.10.15. — Soit S un schéma intègre de dimension $\leqslant 1$ et G, H deux S-schémas en groupes, avec H à fibres unipotentes. Une extension de S-schémas en groupes

$$1 \longrightarrow \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{G} \longrightarrow 1$$

est dite localement linéarisable si pour tout point fermé ou générique $s \in \mathrm{S}$, l'extension de $k(s)$-schémas en groupes

$$1 \longrightarrow \mathrm{H}_s \longrightarrow \mathrm{E}_s \longrightarrow \mathrm{G}_s \longrightarrow 1$$

est linéarisable.

Le résultat suivant étend le théorème de Mostow (voir [**Mos56**], théorème 7.1) et les résultats de Mc Ninch (voir [**McN10**], théorème 5.2) :

Théorème 5.10.16. — *Soit* S *un schéma noethérien intègre de dimension* $\leqslant 1$*. Soient* H, G *deux* S*-schémas en groupes de présentation finie. On suppose que* H/S *est lisse,* G/S *est plat et que pour tout point fermé ou générique* $s \in \mathrm{S}$, $\mathrm{H}_{\overline{s}}$ *est un* $k(\overline{s})$*-groupe unipotent connexe et* $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ *est un* $k(\overline{s})$*-groupe linéairement réductif.*

Alors toute extension localement linéarisable de S*-schémas en groupes*

$$1 \longrightarrow \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{G} \longrightarrow 1$$

est scindée, à torsion près par un élément de $\mathrm{H}^1_{\mathrm{Nis}}(\mathrm{S}, \mathrm{H})$.

Démonstration. — Soit $1 \to \mathrm{H} \to \mathrm{E} \to \mathrm{G} \to 1$ une telle extension localement linéarisable.

On cherche à appliquer le théorème 5.10.14. On remarque d'abord que pour tout $s \in \mathrm{S}$ fermé ou générique, $\mathrm{H}^1(k(s), \mathrm{H}) = 1$, puisque H_s admet une série de composition à quotient $\mathbb{G}_{a,k(s)}$.

Il suffit alors de vérifier les hypothèses 2 et 3. Celles-ci proviennent de la linéarisabilité locale de l'extension, via les résultats obtenus dans le cas des corps (voir proposition 5.3.4). Alors le théorème 5.10.16 est une conséquence du théorème 5.10.14. □

Remarque 5.10.17. — L'hypothèse de linéarisabilité est satisfaite par exemple dans les cas suivants :

– si S est un schéma de caractéristique nulle (voir par exemple l'introduction de [**McN12**]).
– si pour tout $s \in \mathrm{S}$ fermé ou générique, le groupe E_s est $k(s)$-trigonalisable (voir par exemple [**DG70**], IV.2.3 proposition 3.4.(v)).
– si pour tout $s \in \mathrm{S}$ fermé ou générique, le groupe E_s est un sous-groupe parabolique d'un $k(s)$-groupe réductif (voir [**SGA3**], XXVI, proposition 2.1).
– si pour tout $s \in \mathrm{S}$ fermé ou générique, le $k(s)$-groupe G_s est lisse connexe et le groupe H_s est $k(s)$-déployé (voir le résultat récent de Mc Ninch : [**McN12**], théorème C).

Suivant [**SGA3**], exposé XVII, théorème 5.1.1, on montre le résultat suivant :

Théorème 5.10.18. — *Soit* S *un schéma intègre noethérien de dimension* $\leqslant 1$*. Soient* H, G *deux* S*-schémas en groupes de présentation finie. On suppose que* H/S *est lisse,* G/S *est plat et que :*

– *pour tout point fermé ou générique* $s \in \mathrm{S}$, $\mathrm{H}_{\overline{s}}$ *est un* $k(\overline{s})$*-groupe unipotent connexe et* $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ *est un* $k(\overline{s})$*-groupe lisse de type multiplicatif.*

– *pour tout* $s \in \mathrm{S}$ *fermé ou générique, le corps* $k(s)$ *est parfait.*
Alors toute extension de S*-schémas en groupes*

$$1 \longrightarrow \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{G} \longrightarrow 1$$

est scindée, à torsion près par un élément de $\mathrm{H}^1_{\mathrm{Nis}}(\mathrm{S}, \mathrm{H})$.

Démonstration. — Par le théorème 5.1.1 i) de l'exposé XVII de [**SGA3**], l'extension considérée est localement scindée sur $k(s)$ pour tout $s \in \mathrm{S}$ fermé ou générique, i.e. l'hypothèse 2 du théorème 5.10.14 est vérifiée. L'hypothèse 3 est vérifiée en utilisant la proposition 5.6.1 sur $k(s)$. Enfin, l'hypothèse 1 est vérifiée puisque H admet une série de composition sur $k(s)$ à quotients $\mathbb{G}_{a,k(s)}$. Alors le théorème 5.10.14 assure le résultat. □

Remarque 5.10.19. — La conclusion reste valable (avec la même preuve) en remplaçant l'hypothèse "$k(s)$ parfait" par l'hypothèse suivante : "pour tout $s \in \mathrm{S}$ fermé ou générique, H_s est $k(s)$-résoluble" (voir [**SGA3**], exposé XVII, proposition 5.6.1).

Remarque 5.10.20. — Au vu de ces derniers résultats, il reste à étudier l'annulation de $\mathrm{H}^1_{\mathrm{Nis}}(\mathrm{S}, \mathrm{H})$, afin d'obtenir l'existence d'une section sur S. Un cas particulier où cette annulation est vérifiée est le suivant : l'ensemble $\mathrm{H}^1_{\mathrm{Nis}}(\mathrm{S}, \mathrm{H})$ est trivial si on suppose que S est un schéma de Dedekind dont le corps des fonctions K est un corps global (en plus des hypothèses du théorème 5.10.16).

En effet, le groupe unipotent H vérifie l'approximation forte sur un tel corps K, et on conclut avec le théorème 5.1 de [**Gil02**] (ou le théorème 2.1 de [**Nis84**]).

Références

[Art69] M. Artin – « Algebraic approximation of structures over complete local rings », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1969), no. 36, p. 23–58.

[Bor93] M. V. Borovoi – « Abelianization of the second nonabelian Galois cohomology », *Duke Math. J.* **72** (1993), no. 1, p. 217–239.

[Bre90] L. Breen – « Bitorseurs et cohomologie non abélienne », The Grothendieck Festschrift, Vol. I, Progr. Math., vol. 86, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, p. 401–476.

[DG70] M. Demazure & P. Gabriel – *Groupes algébriques. Tome I : Géométrie algébrique, généralités, groupes commutatifs*, Masson & Cie, Éditeur, Paris, 1970, Avec un appendice *Corps de classes local* par Michiel Hazewinkel.

[EGA] A. Grothendieck – « Éléments de géométrie algébrique », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1960-67), no. 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32, p. 231.

[Gil02] P. Gille – « Torseurs sur la droite affine », *Transform. Groups* **7** (2002), no. 3, p. 231–245.

[Gir71] J. Giraud – *Cohomologie non abélienne*, Springer-Verlag, Berlin, 1971, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 179.

[Jan03] J. C. Jantzen – *Representations of algebraic groups*, second éd., Mathematical Surveys and Monographs, vol. 107, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[LMB00] G. Laumon & L. Moret-Bailly – *Champs algébriques*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], vol. 39, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[Mar09] B. Margaux – « Vanishing of Hochschild cohomology for affine group schemes and rigidity of homomorphisms between algebraic groups », *Documenta Math.* **14** (2009), p. 653–672.

[McN10] G. J. McNinch – « Levi decompositions of a linear algebraic group », *Transf. Groups (Morozov centennial issue)* **15** (2010), p. 937–964.

[McN12] G. J. McNinch – « Linearity for actions on vector groups », prépublication, disponible sur `http://gmcninch.math.tufts.edu/storage/Linear.pdf`, 2012.

[Mil80] J. S. Milne – *Étale cohomology*, Princeton Mathematical Series, vol. 33, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1980.

[Mos56] G. D. Mostow – « Fully reducible subgroups of algebraic groups », *Amer. J. Math.* **78** (1956), p. 200–221.

[Nis84] Y. A. Nisnevich – « Espaces homogènes principaux rationnellement triviaux et arithmétique des schémas en groupes réductifs sur les anneaux de Dedekind », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **299** (1984), no. 1, p. 5–8.

[Nis89] Y. A. Nisnevich – « The completely decomposed topology on schemes and associated descent spectral sequences in algebraic K-theory », Algebraic K-theory : connections with geometry and topology (Lake Louise, AB, 1987), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., vol. 279, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1989, p. 241–342.

[Ols06] M. C. Olsson – « Deformation theory of representable morphisms of algebraic stacks », *Math. Z.* **253** (2006), no. 1, p. 25–62.

[Ols07] ______, « Sheaves on Artin stacks », *J. Reine Angew. Math.* **603** (2007), p. 55–112.

[Pop86] D. Popescu – « General Néron desingularization and approximation », *Nagoya Math. J.* **104** (1986), p. 85–115.

[PP75] G. Pfister & D. Popescu – « Die strenge Approximationseigenschaft lokaler Ringe », *Invent. Math.* **30** (1975), no. 2, p. 145–174.

[Ray70] M. Raynaud – *Faisceaux amples sur les schémas en groupes et les espaces homogènes*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 119, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[Rom05] M. Romagny – « Group actions on stacks and applications », *Michigan Math. J.* **53** (2005), no. 1, p. 209–236.

[Ryd11] D. Rydh – « Noetherian approximation of algebraic spaces and stacks », Preprint, available at http://arxiv.org/abs/0904.0227v2, 2011.

[SGA3] M. Demazure & A. Grothendieck – *Schémas en groupes*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1962/64 (SGA 3). Dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck. Édition révisée et annotée, éditeurs P. Gille et P. Polo, Documents Mathématiques (Paris), Société Mathématique de France, 2011.

---

21 novembre 2012

Cyril Demarche, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), Institut de Mathématiques de Jussieu, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France • *E-mail :* demarche@math.jussieu.fr • *Url :* http://www.math.jussieu.fr/~demarche