

Théorèmes de dualité pour les complexes de tores

Cyril Demarche

18 juin 2009

Résumé

On considère un complexe de tores de longueur 2 défini sur un corps de nombres k . On établit des résultats de dualité locale et globale pour l'hypercohomologie (étale ou galoisienne) de ce complexe. On obtient notamment une suite de Poitou-Tate pour de tels complexes, généralisant les suites de Poitou-Tate pour les modules galoisiens finis ou les tores. En particulier, on démontre l'existence d'une telle suite pour les k -groupes de type multiplicatifs. Les résultats généraux obtenus ici pour les complexes de tores ont par exemple des applications dans des résultats récents concernant le défaut d'approximation forte dans les groupes linéaires connexes et des théorèmes de dualité sur la cohomologie galoisienne (non-abélienne) de tels groupes.

Abstract

We consider a complex of tori of length 2 defined over a number field k . We establish here some local and global duality theorems for the (étale or Galois) hypercohomology of such a complex. We prove the existence of a Poitou-Tate exact sequence for such a complex, which generalizes the Poitou-Tate exact sequences for finite Galois modules and tori. In particular, we obtain a Poitou-Tate exact sequence for k -groups of multiplicative type. The general results proven here lie at the root of recent results about the defect of strong approximation in connected linear algebraic groups and about some arithmetic duality theorems for the (non-abelian) Galois cohomology of such groups.

1 Introduction

Les théorèmes de dualité pour la cohomologie galoisienne des groupes algébriques commutatifs sur les corps locaux et globaux constituent parmi les plus importants résultats en arithmétique.

Un premier résultat bien connu est le théorème de dualité locale pour les modules galoisiens finis (voir par exemple [Mil06], corollaire I.2.3).

On dispose aussi des résultats de Tate-Nakayama et Tate pour les tores et les variétés abéliennes sur des corps locaux, résultats généralisés par Harari et Szamuely (pour des variétés semi-abéliennes et plus généralement les 1-motifs sur un corps local) : si K est un corps local et M un 1-motif sur K , et M^* le 1-motif dual, alors on dispose d'accouplements naturels, définis par le cup-produit

$$\mathbf{H}^i(K, M) \times \mathbf{H}^{1-i}(K, M^*) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

($-1 \leq i \leq 2$) qui induisent des dualités parfaites entre ces deux groupes (après une complétion profinie pour $i = -1$ ou 0) : voir [HS05], théorème 2.3.

Concernant les théorèmes de dualité globale, on dispose du théorème de Tate pour les modules galoisiens finis, à savoir : si F est un module galoisien fini sur un corps de nombres k , on dispose d'accouplements naturels non-dégénérés entre groupes finis

$$\mathbf{III}^i(F) \times \mathbf{III}^{3-i}(F^*) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

où F^* est le dual de Cartier de F , et $i = 1, 2$ (voir [Mil06], théorème 4.10.(a)).

Un autre exemple de résultat de dualité globale est donné par le théorème de Cassels-Tate pour les variétés abéliennes, ainsi que par le théorème analogue pour les tores, souvent attribué à Kottwitz (voir par exemple l'appendice de [KS99], où les preuves ne sont parfois pas complètes). Ces deux résultats ont été généralisés par Harari et Szamuely, sous la forme suivante : si k est un corps de nombres et M est un 1-motif sur k , alors on dispose d'un accouplement canonique

$$\mathrm{III}^i(M) \times \mathrm{III}^{2-i}(M^*) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

($i = 0, 1$) qui est non-dégénéré modulo les sous-groupes divisibles. Les auteurs démontrent d'ailleurs différentes versions de ce résultat, en remplaçant parfois les groupes de Tate-Shafarevich par des variantes faisant intervenir des complétions profinies : voir [HS05], théorème 4.8, corollaire 4.9, propositions 4.12 et 5.1.

Enfin, on peut rassembler les théorèmes de dualité locale et globale dans une suite exacte dite de Poitou-Tate : voir [HS05], théorème 5.6 pour les 1-motifs, et [Mil06], théorème 4.10 pour les modules galoisiens finis.

On citera enfin les résultats de Gonzales-Aviles (voir [GA08]) à propos des théorèmes de dualité sur les corps locaux et globaux de caractéristique positive.

L'objectif de ce texte est de démontrer de nouveaux théorèmes de dualité, locale et globale, pour l'hypercohomologie des complexes de tores de longueur 2, qui généralisent notamment les résultats pour les tores et les modules finis rappelés plus haut. On retrouve en particulier (par une méthode différente) certains des résultats de l'appendice de [KS99]. Ces résultats de dualité ont notamment des applications pour le calcul de la cohomologie galoisienne des groupes linéaires connexes : on citera par exemple les travaux de Borovoi (notamment [Bor98] et [Bor99] section 4), ceux de Kottwitz et Shelstad (voir [KS99]), et les résultats de l'auteur dans [Dem09].

Rappelons quelques notations avant d'énoncer les résultats de ce texte. On utilise les notations usuelles suivantes : si A est un groupe topologique abélien, on note A^D le groupe des morphismes de groupes continus $A \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. On munit ce groupe A^D de la topologie compacte-ouverte. On note A^\wedge le complété de A pour la topologie des sous-groupes ouverts d'indice fini, et $A_\wedge := \varprojlim_n A/nA$.

Si k est un corps, on note Γ_k son groupe de Galois absolu. Si C est un complexe de modules galoisiens sur k , et $i \in \mathbf{N}$, on note $\mathbf{H}^i(k, C) := \mathbf{H}^i(\Gamma_k, C(\bar{k}))$ le i -ème groupe d'hypercohomologie galoisienne. Si k est un corps de nombres et Ω_k l'ensemble des places de k , $\mathbf{P}^i(k, C)$ désigne le produit restreint des groupes $\mathbf{H}^i(\widehat{k}_v, C)$ par rapport aux groupes $\mathbf{H}^i(\widehat{\mathcal{O}}_v, \mathcal{C})$, où $\widehat{\mathcal{O}}_v$ désigne l'anneau des entiers de \widehat{k}_v . On définit aussi

$$\mathrm{III}^i(k, C) = \mathrm{III}^i(C) := \mathrm{Ker}(\mathbf{H}^i(k, C) \rightarrow \mathbf{P}^i(k, C))$$

où \widehat{k}_v désigne le complété de k à la place v . On aura également besoin d'une version modifiée de ces groupes, à savoir :

$$\mathrm{III}_\wedge^i(C) := \mathrm{Ker}(\mathbf{H}^i(k, C)_\wedge \rightarrow \mathbf{P}^i(k, C)_\wedge)$$

On peut désormais résumer les résultats principaux de ce texte.

Étant donné un complexe de tores $C = [T_1 \xrightarrow{\rho} T_2]$ (en degrés -1 et 0) sur un corps local K , les groupes $\mathbf{H}^i(K, C)$ sont munis d'une topologie naturelle, et l'on dispose d'un accouplement canonique entre les groupes d'hypercohomologie

$$\mathbf{H}^i(K, C) \times \mathbf{H}^{1-i}(K, \widehat{C}) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

qui induit une dualité parfaite après certaines complétions profinies (voir théorème 3.1), où \widehat{C} désigne le complexe (concentré en degrés -1 et 0) de modules galoisiens $[\widehat{T}_2 \xrightarrow{\widehat{\rho}} \widehat{T}_1]$, \widehat{T}_i étant le module des caractères du tore T_i .

On obtient également le résultat de dualité globale suivant (voir théorèmes 5.7, 5.12, 5.14, 5.23 et proposition 5.10) :

Théorème. *Soit k un corps de nombres et $C = [T_1 \xrightarrow{\rho} T_2]$ un complexe de k -tores. Alors il existe un accouplement canonique*

$$\mathbb{H}^1(C) \times \mathbb{H}^1(\widehat{C}) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

qui est une dualité parfaite de groupes finis. Il existe un accouplement canonique, fonctoriel en C

$$\mathbb{H}^2(C) \times \mathbb{H}_\wedge^0(\widehat{C}) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

qui est une dualité parfaite.

– *Si $\text{Ker } \rho$ est fini, alors il existe des accouplements canoniques, fonctoriels en C*

$$\mathbb{H}^1(C) \times \mathbb{H}^1(\widehat{C}) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

$$\mathbb{H}^2(C) \times \mathbb{H}^0(\widehat{C}) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

et

$$\mathbb{H}_\wedge^0(C) \times \mathbb{H}^2(\widehat{C}) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

qui sont des dualités parfaites entre groupes finis.

– *Si le morphisme ρ est surjectif, il existe des accouplements canoniques, fonctoriels en C*

$$\mathbb{H}^1(C) \times \mathbb{H}^1(\widehat{C}) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

et

$$\mathbb{H}^0(C) \times \mathbb{H}^2(\widehat{C}) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

qui sont des dualités parfaites entre groupes finis.

Remarque 1.1. L'hypothèse de surjectivité du morphisme ρ implique que le complexe C est quasi-isomorphe (dans la catégorie dérivée associée à la catégorie des complexes bornés de modules galoisiens sur k) à $(\text{Ker } \rho)[1]$, $\text{Ker } \rho$ étant un k -groupe de type multiplicatif. Réciproquement, tout k -groupe de type multiplicatif est le noyau d'un morphisme surjectif de k -tores : par conséquent, le théorème précédent contient un théorème de dualité globale pour les groupes de type multiplicatif.

On obtient également des suites de type Poitou-Tate pour certains complexes de tores, comme par exemple le résultat suivant, où les différents morphismes proviennent des théorèmes de dualité locale et globale, et $(.)^\wedge$ désigne la complétion pour la topologie des sous-groupes ouverts d'indice fini :

Théorème (Théorème 6.1). *Soit $C = [T_1 \xrightarrow{\rho} T_2]$ un complexe de tores défini sur k , avec $\text{Ker}(\rho)$ fini. On a alors une suite exacte de groupes topologiques, fonctorielle en C :*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbf{H}^{-1}(k, C) & \longrightarrow & \mathbf{P}^{-1}(k, C) & \longrightarrow & \mathbf{H}^2(k, \widehat{C})^D \\ & & & & & & \downarrow \\ & & \mathbf{H}^1(k, \widehat{C})^D & \longleftarrow & \mathbf{P}^0(k, C)^\wedge & \longleftarrow & \mathbf{H}^0(k, C)^\wedge \\ & & \downarrow & & & & \\ & & \mathbf{H}^1(k, C) & \longrightarrow & \mathbf{P}^1(k, C) & \longrightarrow & \mathbf{H}^0(k, \widehat{C})^D \\ & & & & & & \downarrow \\ 0 & \longleftarrow & \mathbf{H}^{-1}(k, \widehat{C})^D & \longleftarrow & \mathbf{P}^2(k, C) & \longleftarrow & \mathbf{H}^2(k, C) \end{array}$$

On dispose également, sous les mêmes hypothèses, de la suite exacte duale :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathbf{H}^{-1}(k, \widehat{C})^\wedge & \longrightarrow & \mathbf{P}^{-1}(k, \widehat{C})^\wedge & \longrightarrow & \mathbf{H}^2(k, C)^D \\
& & & & & & \downarrow \\
& & \mathbf{H}^1(k, C)^D & \longleftarrow & \mathbf{P}^0(k, \widehat{C}) & \longleftarrow & \mathbf{H}^0(k, \widehat{C}) \\
& & \downarrow & & & & \\
& & \mathbf{H}^1(k, \widehat{C}) & \longrightarrow & \mathbf{P}^1(k, \widehat{C})_{\text{tors}} & \longrightarrow & (\mathbf{H}^0(k, C)^D)_{\text{tors}} \\
& & & & & & \downarrow \\
0 & \longleftarrow & \mathbf{H}^{-1}(k, C)^D & \longleftarrow & \mathbf{P}^2(k, \widehat{C}) & \longleftarrow & \mathbf{H}^2(k, \widehat{C})
\end{array}$$

Remarque 1.2. Comme on le montre dans [Dem09], ce théorème est un outil important pour étudier le défaut d'approximation forte dans les groupes linéaires connexes, ainsi que pour obtenir une suite de Poitou-Tate non-abélienne pour de tels groupes, à l'aide des applications d'abélianisation définies notamment par Borovoi dans le chapitre 3 de [Bor98].

On obtient aussi une suite de Poitou-Tate pour les groupes de type multiplicatif, généralisant les suites usuelles de Poitou-Tate pour les modules galoisiens finis (voir [Mil06], théorème I.4.10) et pour les tores (voir le théorème 5.6 de Harari et Szamuely dans [HS05]). Cette suite n'était pas connue pour des groupes de type multiplicatif généraux : voir notamment la remarque après le corollaire I.4.21 de [Mil06], ainsi que la suite de Poitou-Tate partielle du théorème 8.6.14 de [NSW08].

Théorème (Théorème 6.3). *Soit M un k -groupe de type multiplicatif. On a alors une suite exacte de groupes topologiques, fonctorielle en M :*

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & H^0(k, M)^\wedge & \longrightarrow & P^0(k, M)^\wedge & \longrightarrow & H^2(k, \widehat{M})^D \\
& & & & & & \downarrow \\
& & H^1(k, \widehat{M})^D & \longleftarrow & P^1(k, M) & \longleftarrow & H^1(k, M) \\
& & \downarrow & & & & \\
& & H^2(k, M) & \longrightarrow & P^2(k, M) & \longrightarrow & H^0(k, \widehat{M})^D \longrightarrow 0
\end{array}$$

On dispose également de la suite exacte duale :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & H^0(k, \widehat{M})^\wedge & \longrightarrow & P^0(k, \widehat{M})^\wedge & \longrightarrow & H^2(k, M)^D \\
& & & & & & \downarrow \\
& & H^1(k, M)^D & \longleftarrow & P^1(k, \widehat{M}) & \longleftarrow & H^1(k, \widehat{M}) \\
& & \downarrow & & & & \\
& & H^2(k, \widehat{M}) & \longrightarrow & P^2(k, \widehat{M})_{\text{tors}} & \longrightarrow & (H^0(k, M)^D)_{\text{tors}} \longrightarrow 0
\end{array}$$

Le plan du texte est le suivant : on montre d'abord les théorèmes de dualité locale à la section 3, puis on établit des résultats de dualité en cohomologie étale à l'aide du théorème d'Artin-Verdier (section 4). Ensuite, la section 5 est consacrée à la démonstration des théorèmes de dualité globale. Enfin, on obtient les suites exactes de type Poitou-Tate à la section 6, et on fait le lien avec une suite en hypercohomologie obtenue par Borovoi.

Remerciements Je remercie très chaleureusement David Harari pour son aide et sa patience. Je remercie également Mikhail Borovoi pour ses précieux commentaires.

2 Quelques préliminaires sur les complexes de tores

Si A est un groupe topologique abélien, on note A^\wedge son complété pour la topologie des sous-groupes ouverts d'indice fini, et A_\wedge désigne le groupe $\varprojlim_n A/n$ (où $A/n := A/nA$ par définition). En outre, pour un groupe abélien A , on note ${}_nA$ le sous-groupe de n -torsion de A . On considère également le module de Tate de A , à savoir le groupe $T(A) := \varprojlim_n {}_nA$; de même, si G est un schéma en groupes de type multiplicatif et de type fini sur la base, on note ${}_nG$ le sous-groupe de type multiplicatif noyau de la multiplication par n sur G (voir [DG70], proposition 2.2). Enfin, pour un groupe abélien A et un nombre premier l , on note $A\{l\}$ le sous-groupe de torsion l -primaire de A , \overline{A} le quotient de A par son sous-groupe divisible maximal, $\overline{A}\{l\}$ le quotient de $A\{l\}$ par son sous-groupe divisible maximal, et $A^{(l)}$ la limite projective $\varprojlim_n A/l^n$.

Introduisons désormais quelques notations concernant les complexes de tores de longueur 2. Le contexte est le suivant : soit S un schéma. On se donne deux S -tores (au sens de [DG70], Exposé IX, définition 1.3) T_1 et T_2 , et un morphisme de S -tores $\rho : T_1 \rightarrow T_2$. On note $C := [T_1 \xrightarrow{\rho} T_2]$ le complexe de S -tores ainsi obtenu, où T_1 est en degré -1 et T_2 en degré 0.

On note aussi \widehat{T}_i le faisceau \mathbf{Z} -constructible sur S dual de T_i (on rappelle qu'un faisceau \mathcal{F} pour la topologie étale sur S est dit \mathbf{Z} -constructible s'il existe un revêtement étale fini d'un ouvert de S sur lequel \mathcal{F} est le faisceau constant associé à un groupe abélien de type fini et les tiges \mathcal{F} hors de cet ouvert sont de type fini comme groupes abéliens), et \widehat{C} le complexe de faisceaux étales (localement constants) $[\widehat{T}_2 \xrightarrow{\widehat{\rho}} \widehat{T}_1]$, où $\widehat{\rho}$ est le morphisme dual de ρ . On travaille dans la catégorie des faisceaux en groupes abéliens sur le site fppf de la base S , et dans la catégorie dérivée associée à la catégorie des complexes bornés de faisceaux fppf.

On construit alors un accouplement naturel $C \otimes^{\mathbf{L}} \widehat{C} \rightarrow \mathbf{G}_m[1]$, fonctoriel en C , qui prolonge l'accouplement bien connu $T \otimes \widehat{T} \rightarrow \mathbf{G}_m$ pour un tore T : pour cela, on remarque que \widehat{C} étant un complexe de faisceaux plats sur S , le produit tensoriel dérivé $C \otimes^{\mathbf{L}} \widehat{C}$ coïncide avec le complexe "produit tensoriel total" (voir [Wei94], 10.5.5 et 10.6.2). L'objet $C \otimes^{\mathbf{L}} \widehat{C}$ est donc représenté par le complexe $[T_1 \otimes \widehat{T}_2 \rightarrow (T_1 \otimes \widehat{T}_1) \oplus (T_2 \otimes \widehat{T}_2) \rightarrow T_2 \otimes \widehat{T}_1]$, la première flèche étant $(t_1, \widehat{t}_2) \mapsto t_1 \otimes \widehat{\rho}(\widehat{t}_2) - \rho(t_1) \otimes \widehat{t}_2$ et la seconde $t_1 \otimes \widehat{t}_1 + t_2 \otimes \widehat{t}_2 \mapsto \rho(t_1) \otimes \widehat{t}_1 + t_2 \otimes \widehat{\rho}(\widehat{t}_2)$. On dispose alors du morphisme canonique $(T_1 \otimes \widehat{T}_1) \oplus (T_2 \otimes \widehat{T}_2) \rightarrow \mathbf{G}_m \oplus \mathbf{G}_m$, qui composé avec le morphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G}_m \oplus \mathbf{G}_m & \longrightarrow & \mathbf{G}_m \\ (t, t') & \longmapsto & t.t' \end{array}$$

fournit un morphisme $(T_1 \otimes \widehat{T}_1) \oplus (T_2 \otimes \widehat{T}_2) \rightarrow \mathbf{G}_m$.

Celui-ci induit clairement un morphisme de complexes

$$C \otimes^{\mathbf{L}} \widehat{C} \rightarrow \mathbf{G}_m[1]$$

On vérifie aisément que dans le cas où $C = [0 \rightarrow T]$ ou $C = [T \rightarrow 0]$, on retrouve bien l'accouplement usuel entre un tore T et son dual \widehat{T} .

Remarque 2.1. Cet accouplement correspond à une biextension naturelle de (C, \widehat{C}) par \mathbf{G}_m (au sens de [Del74], 10.2.1), via la bijection canonique $\text{Biext}(C, \widehat{C}; \mathbf{G}_m) \cong \text{Hom}(C \otimes^{\mathbf{L}} \widehat{C}, \mathbf{G}_m[1])$.

Réalisations n -adiques On définit ici les réalisations n -adiques d'un complexe $C = [T_1 \xrightarrow{\rho} T_2]$ sur S .

Définition 2.2. On pose, pour $n \geq 1$, $T_{\mathbf{Z}/n}(C) := H^0(C[-1] \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$ et $T_{\mathbf{Z}/n}(\widehat{C}) := H^0(\widehat{C}[-1] \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$.

Montrons alors le lemme suivant :

Lemme 2.3. *Le faisceau fppf $T_{\mathbf{Z}/n}(C)$ est représentable par un schéma en groupes de type multiplicatif fini sur S , et $T_{\mathbf{Z}/n}(\widehat{C})$ est représentable par le groupe constant tordu fini dual $\underline{\text{Hom}}_{S\text{-gr}}(T_{\mathbf{Z}/n}(C), \mathbf{G}_m)$, et le produit tensoriel dérivé $C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n$ s'insère dans les triangles exacts suivants, fonctoriels en C , dans la catégorie dérivée des faisceaux abéliens fppf sur S :*

$${}_n(\text{Ker } \rho)[2] \rightarrow C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n \rightarrow T_{\mathbf{Z}/n}(C)[1] \rightarrow {}_n(\text{Ker } \rho)[3]$$

et

$$T_{\mathbf{Z}/n}(\widehat{C})[1] \rightarrow \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n \rightarrow {}_n(\widehat{\text{Ker } \rho}) \rightarrow T_{\mathbf{Z}/n}(\widehat{C})[2]$$

Démonstration : En utilisant la résolution plate $(\mathbf{Z} \xrightarrow{n} \mathbf{Z})$ de \mathbf{Z}/n , on voit que $C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n$ s'identifie au complexe $\left[T_1 \xrightarrow{n \oplus \rho} T_1 \oplus T_2 \xrightarrow{(t_1, t_2) \mapsto \rho(t_1)/t_2^n} T_2 \right]$, où T_1 est en degré -2 (voir par exemple [Wei94], lemme 10.6.2). On note $\rho - n$ le second morphisme. On voit immédiatement que $\rho - n$ est surjectif, par conséquent ce complexe est quasi-isomorphe à $\left[T_1 \xrightarrow{n \oplus \rho} \text{Ker}(\rho - n) \right]$. Or on dispose du diagramme commutatif suivant, dont les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & {}_n(\text{Ker } \rho) & \longrightarrow & T_1 & \xrightarrow{n \oplus \rho} & \text{Im}(n \oplus \rho) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow n \oplus \rho & & \downarrow n \oplus \rho & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \text{Ker}(\rho - n) & \xrightarrow{=} & \text{Ker}(\rho - n) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Or par définition, $T_{\mathbf{Z}/n}(C) = \text{Ker}(\rho - n)/\text{Im}(n \oplus \rho)$, et la troisième flèche verticale est injective, donc le complexe $[\text{Im}(n \oplus \rho) \rightarrow \text{Ker}(\rho - n)]$ est quasi-isomorphe à $T_{\mathbf{Z}/n}(C)$, donc ce diagramme s'identifie au premier triangle exact du lemme, dans la catégorie dérivée (voir par exemple [Wei94], 10.4.9). En ce qui concerne la finitude de $T_{\mathbf{Z}/n}(C)$, deux applications successives du lemme du serpent assurent que l'on a une suite exacte de faisceaux ${}_n T_1 \xrightarrow{\rho} {}_n T_2 \rightarrow \text{Ker}(\rho - n)/\text{Im}(n \oplus \rho) \rightarrow 0$. Or la catégorie des S schémas en groupes de type multiplicatif de type fini est une catégorie abélienne (voir [DG70], Exposé 9, corollaire 2.8), et ${}_n T_i$ est un- S schéma en groupes de type multiplicatif fini (voir [DG70], Exposé 9, proposition 2.2), donc $T_{\mathbf{Z}/n}(C)$, qui est isomorphe au quotient ${}_n T_2/\rho({}_n T_1)$, est bien un S -schéma en groupes de type multiplicatif fini.

Montrons désormais le second triangle exact : le complexe $\widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n$ s'identifie cette fois à $\left[\widehat{T}_2 \xrightarrow{n \oplus \widehat{\rho}} \widehat{T}_2 \oplus \widehat{T}_1 \xrightarrow{\widehat{\rho} - n} \widehat{T}_1 \right]$, avec \widehat{T}_2 en degré -2 . Or \widehat{T}_2 est sans torsion, donc $n \oplus \widehat{\rho}$ est injectif. Donc $\widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n$ est quasi-isomorphe au complexe $\left[(\widehat{T}_2 \oplus \widehat{T}_1) / \text{Im}(n \oplus \widehat{\rho}) \xrightarrow{\widehat{\rho} - n} \widehat{T}_1 \right]$. On en déduit

que $T_{\mathbf{Z}/n}(\widehat{C}) = \text{Ker}(\widehat{\rho} - n) / \text{Im}(n \oplus \widehat{\rho})$, ainsi que le diagramme commutatif suivant, à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & T_{\mathbf{Z}/n}(\widehat{C}) & \longrightarrow & (\widehat{T}_2 \oplus \widehat{T}_1) / \text{Im}(n \oplus \widehat{\rho}) & \xrightarrow{\widehat{\rho} - n} & \text{Im}(\widehat{\rho} - n) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow \widehat{\rho} - n & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \widehat{T}_1 & \xrightarrow{=} & \widehat{T}_1 \longrightarrow 0
\end{array}$$

qui fournit exactement le second triangle exact du lemme, étant donné que le complexe $[\text{Im}(\widehat{\rho} - n) \hookrightarrow \widehat{T}_1]$ est quasi-isomorphe à $\widehat{T}_1 / \text{Im}(\widehat{\rho} - n)$, qui n'est autre que ${}_n(\widehat{\text{Ker}} \rho)$ (car $(\rho \oplus -)(n) = \widehat{\rho} - n$ et $\text{Ker}(\rho \oplus (-n)) = {}_n \text{Ker}(\rho)$).

Montrons désormais que $T_{\mathbf{Z}/n}(C)$ et $T_{\mathbf{Z}/n}(\widehat{C})$ se correspondent via l'équivalence de catégorie entre S -schémas en groupes de type multiplicatif de type fini et S -groupes constants tordus finiment engendrés (voir [DG70], Exposé 10, corollaire 5.9) : on remarque que l'accouplement canonique $C \otimes^{\mathbf{L}} \widehat{C} \rightarrow \mathbf{G}_m[1]$ défini plus haut induit naturellement un accouplement

$$(C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \otimes^{\mathbf{L}} (\widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \rightarrow \mathbf{G}_m[2]$$

d'où en particulier un accouplement $T_{\mathbf{Z}/n}(C) \times T_{\mathbf{Z}/n}(\widehat{C}) \rightarrow \mathbf{G}_m$. Or on a montré par application du lemme du serpent que l'on avait une suite exacte naturelle

$${}_n T_1 \xrightarrow{\rho} {}_n T_2 \rightarrow T_{\mathbf{Z}/n}(C) \rightarrow 0$$

De même, on montre facilement la suite exacte suivante :

$$0 \rightarrow T_{\mathbf{Z}/n}(\widehat{C}) \rightarrow \widehat{T}_2/n \xrightarrow{\widehat{\rho}} \widehat{T}_1/n$$

Alors on conclut immédiatement que $T_{\mathbf{Z}/n}(\widehat{C})$ est constant tordu, et qu'il s'identifie au dual de $T_{\mathbf{Z}/n}(C)$, en remarquant que ${}_n T_i$ est le dual de \widehat{T}_i/n pour $i = 1, 2$. \square

Remarque 2.4. Les calculs précédents montrent en fait que $C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n$ s'identifie au cône $C(\rho_n)$ du morphisme de complexes $[T_1 \xrightarrow{n} T_1] \xrightarrow{\rho_n} [T_2 \xrightarrow{n} T_2]$. Il se trouve que les deux complexes apparaissant ici sont respectivement quasi-isomorphes à ${}_n \widehat{T}_1[1]$ et ${}_n T_2[1]$, on a donc un triangle exact dans la catégorie dérivée :

$${}_n T_1[1] \xrightarrow{\rho_n} {}_n T_2[1] \rightarrow C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n \rightarrow {}_n T_1[2]$$

de même, dualement on obtient un triangle exact :

$$\widehat{T}_2/n \xrightarrow{\widehat{\rho}_n} \widehat{T}_1/n \rightarrow \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n \rightarrow \widehat{T}_2/n[1]$$

Ces triangles exacts sont des variantes des triangles exacts précédents, les suites d'hypercohomologie ne sont pas les mêmes, mais une partie de la suite du raisonnement peut se faire en utilisant ces variantes, les arguments de dévissage étant exactement les mêmes, puisque les schémas en groupes de type multiplicatif ${}_n T_i$, ${}_n \text{Ker}(\rho)$ et $T_{\mathbf{Z}/n}(C)$ sont finis. On utilise dans la suite de cette section uniquement la version du lemme, qui a l'avantage de présenter une analogie avec [HS05]. En outre, la version du lemme fait intervenir le noyau $\text{Ker}(\rho)$, sur lequel vont porter des hypothèses de finitude dans les sections suivantes, hypothèse qui sera cruciale pour certains des résultats de type Poitou-Tate qui vont suivre (voir section 6).

Remarque 2.5. Dans sa thèse [Jos09], P. Jossen a présenté un formalisme très général pour construire les modules de Tate l -adiques de complexes (dits “modérés”) de faisceaux fppf sur une base quelconque comme objets dans une catégorie dérivée de faisceaux l -divisibles localement consants (voir le chapitre 2 de [Jos09]). En particulier, son travail s’applique à des complexes de tores. Les constructions de cette section, ainsi que certains des résultats qui suivent, peuvent se reformuler dans le langage qu’il a développé, et se voir ainsi de façon plus naturelle.

3 Théorèmes de dualité locale

Soit K un corps complet pour une valuation discrète, à corps résiduel fini \mathbf{F} , \mathcal{O} son anneau des entiers. On se donne deux K -tores T_1 et T_2 , et un morphisme de K -tores algébriques $\rho : T_1 \rightarrow T_2$. On note $C := [T_1 \xrightarrow{\rho} T_2]$ le complexe de tores ainsi obtenu, où T_1 est en degré -1 et T_2 en degré 0 .

Topologie On munira $\mathbf{H}^i(K, C)$ de la topologie discrète, sauf pour $i = -1, 0$: pour $i = -1$, $\mathbf{H}^{-1}(K, C)$ est muni de la topologie induite par celle de $T_1(K)$ via l’identification $\mathbf{H}^{-1}(K, C) = \text{Ker}(T_1(K) \rightarrow T_2(K))$. Pour $i = 0$, on considère la suite exacte de groupes abéliens

$$T_1(K) \xrightarrow{\rho} T_2(K) \rightarrow \mathbf{H}^0(K, C) \rightarrow H^1(K, T_1)$$

On sait que l’image de $T_1(K)$ par ρ s’identifie à un sous-groupe fermé de $T_2(K)$, et par conséquent le quotient topologique $T_2(K)/\rho(T_1(K))$ est un groupe topologique séparé. La suite exacte permet d’identifier ce quotient à un sous-groupe d’indice fini de $\mathbf{H}^0(K, C)$ (le groupe $H^1(K, T_2)$ est fini par [Mil06], I, théorème 2.1), et on munit ce sous-groupe d’indice fini de la topologie quotient sur $T_2(K)/\rho(T_1(K))$, ce qui définit une topologie sur $\mathbf{H}^0(K, C)$. Par définition, le morphisme $T_2(K) \rightarrow \mathbf{H}^0(K, C)$ est alors continu et ouvert, et $\mathbf{H}^0(K, C)$ est séparé.

Remarquons que l’accouplement $C \otimes^{\mathbf{L}} \widehat{C} \rightarrow \mathbf{G}_m[1]$ induit, via le cup produit, un morphisme sur les groupes d’hypercohomologie $\mathbf{H}^i(K, C) \times \mathbf{H}^{1-i}(K, \widehat{C}) \rightarrow H^1(K, \mathbf{G}_m[1]) \cong H^2(K, \mathbf{G}_m) \xrightarrow{j_K} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ où j_K est l’invariant donné par la théorie du corps de classes local. Montrons alors le résultat suivant :

Théorème 3.1. *Le cup-produit $\mathbf{H}^i(K, C) \times \mathbf{H}^{1-i}(K, \widehat{C}) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ réalise des dualités parfaites, fonctorielles en C , entre les groupes suivants :*

- le groupe profini $\mathbf{H}^{-1}(K, C)^\wedge$ et le groupe discret $\mathbf{H}^2(K, \widehat{C})$.
- le groupe profini $\mathbf{H}^0(K, C)^\wedge$ et le groupe discret $\mathbf{H}^1(K, \widehat{C})$.
- le groupe discret $\mathbf{H}^1(K, C)$ et le groupe profini $\mathbf{H}^0(K, \widehat{C})^\wedge$.
- le groupe discret $\mathbf{H}^2(K, C)$ et le groupe profini $\mathbf{H}^{-1}(K, \widehat{C})^\wedge$.

Démonstration : Ce résultat s’obtient essentiellement par dévissage à partir de la dualité locale de Tate-Nakayama pour les tores (voir [Mil06], corollaires I.2.3 et I.2.4).

- $i = -1$.

Considérons la suite exacte suivante :

$$0 \rightarrow \mathbf{H}^{-1}(K, C) \rightarrow H^0(K, T_1) \xrightarrow{\rho} H^0(K, T_2)$$

où $\mathbf{H}^{-1}(K, C)$ s’identifie au sous-groupe topologique fermé $\text{Ker}(T_1(K) \xrightarrow{\rho} T_2(K))$ du groupe séparé compactement engendré, totalement discontinu et localement compact $T_1(K)$. De même, $T_2(K)$ est séparé compactement engendré, totalement discontinu et localement compact, et l’image de $T_1(K)$ s’identifie à un sous-groupe fermé de $T_2(K)$, donc on est donc bien

dans le cadre de la proposition de l'appendice de [HS05], et par conséquent la suite complétée

$$0 \rightarrow \mathbf{H}^{-1}(K, C)^\wedge \rightarrow H^0(K, T_1)^\wedge \xrightarrow{\rho} H^0(K, T_2)^\wedge$$

reste exacte (l'inclusion $\mathbf{H}^{-1}(K, C) \rightarrow H^0(K, T_1)$ est bien stricte par définition de la topologie sur $\mathbf{H}^{-1}(K, C)$).

On dispose du diagramme commutatif suivant, à lignes exactes (on peut dualiser la suite exacte précédente car les groupes apparaissant sont profinis) :

$$\begin{array}{ccccccc} H^2(K, \widehat{T}_2) & \longrightarrow & H^2(K, \widehat{T}_1) & \longrightarrow & \mathbf{H}^2(K, \widehat{C}) & \longrightarrow & H^3(K, \widehat{T}_2) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow & & \\ (H^0(K, T_2)^\wedge)^D & \longrightarrow & (H^0(K, T_1)^\wedge)^D & \longrightarrow & (\mathbf{H}^{-1}(K, C)^\wedge)^D & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Or $H^3(K, \widehat{T}_2) = 0$ car K est de dimension cohomologique stricte égale à 2 (voir [Ser94], I.5.3, proposition 15), et les deux premières flèches verticales sont des isomorphismes (voir [Mil06], corollaire I.2.4). Donc une chasse au diagramme assure que l'on a un isomorphisme $\mathbf{H}^2(K, \widehat{C}) \simeq (\mathbf{H}^{-1}(K, C)^\wedge)^D$. Dans l'autre sens, on considère le diagramme exact (la seconde ligne est exacte car c'est la suite duale d'une suite exacte de groupes discrets) :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbf{H}^{-1}(K, C)^\wedge & \longrightarrow & H^0(K, T_1)^\wedge & \longrightarrow & H^0(K, T_2)^\wedge \\ & & \downarrow & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ 0 & \longrightarrow & \mathbf{H}^2(K, \widehat{C})^D & \longrightarrow & H^2(K, \widehat{T}_1)^D & \longrightarrow & H^2(K, \widehat{T}_2)^D \end{array}$$

les deux isomorphismes provenant de la dualité locale de Tate-Nakayama (voir [Mil06], corollaire I.2.4). D'où le point 1 du théorème.

– $i = 0$.

On dispose du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} H^0(K, T_1)^\wedge & \longrightarrow & H^0(K, T_2)^\wedge & \longrightarrow & \mathbf{H}^0(K, C)^\wedge & \longrightarrow & H^1(K, T_1) & \longrightarrow & H^1(K, T_2) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ H^2(K, \widehat{T}_1)^D & \longrightarrow & H^2(K, \widehat{T}_2)^D & \longrightarrow & \mathbf{H}^1(K, \widehat{C})^D & \longrightarrow & H^1(K, \widehat{T}_1)^D & \longrightarrow & H^1(K, \widehat{T}_2)^D \end{array}$$

La ligne inférieure est exacte (puisque les groupes dont on prend le dual sont des groupes discrets), le morceau $H^0(K, T_2)^\wedge \rightarrow \mathbf{H}^0(K, C)^\wedge \rightarrow H^1(K, T_1) \rightarrow H^1(K, T_2)$ est exact puisque $H^1(K, T_1)$ est fini, et le morceau $H^0(K, T_1)^\wedge \rightarrow H^0(K, T_2)^\wedge \rightarrow \mathbf{H}^0(K, C)^\wedge$ est un complexe. Par conséquent, une chasse au diagramme assure que le morphisme $\mathbf{H}^0(K, C)^\wedge \rightarrow \mathbf{H}^1(K, \widehat{C})^D$ est un isomorphisme. Dans l'autre sens, on considère le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} H^1(K, \widehat{T}_2) & \longrightarrow & H^1(K, \widehat{T}_1) & \longrightarrow & \mathbf{H}^1(K, \widehat{C}) & \longrightarrow & H^2(K, \widehat{T}_2) & \longrightarrow & H^2(K, \widehat{T}_1) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ H^1(K, T_2)^D & \longrightarrow & H^1(K, T_1)^D & \longrightarrow & \mathbf{H}^0(K, C)^D & \longrightarrow & H^0(K, T_2)^D & \longrightarrow & H^0(K, T_1)^D \end{array}$$

La première ligne est exacte. Concernant la seconde, la finitude des groupes $H^1(K, T_i)$, et la définition de la topologie sur $\mathbf{H}^0(K, C)$ assure que la suite suivante

$$H^1(K, T_2)^D \rightarrow H^1(K, T_1)^D \rightarrow \mathbf{H}^0(K, C)^D \rightarrow H^0(K, T_2)^D$$

est exacte, et le morceau $\mathbf{H}^0(K, C)^D \rightarrow H^0(K, T_2)^D \rightarrow H^0(K, T_1)^D$ est un complexe. Alors une chasse au diagramme assure le point 2.

– $i = 1$.

On fait le même raisonnement que pour $i = 0$: On dispose du diagramme suivant, commutatif à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} H^1(K, T_1) & \longrightarrow & H^1(K, T_2) & \longrightarrow & \mathbf{H}^1(K, C) & \longrightarrow & H^2(K, T_1) & \longrightarrow & H^2(K, T_2) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ H^1(K, \widehat{T}_1)^D & \longrightarrow & H^1(K, \widehat{T}_2)^D & \longrightarrow & \mathbf{H}^0(K, \widehat{C})^D & \longrightarrow & H^0(K, \widehat{T}_1)^D & \longrightarrow & H^0(K, \widehat{T}_2)^D \end{array}$$

donc le morphisme $\mathbf{H}^1(K, C) \rightarrow \mathbf{H}^0(K, \widehat{C})^D$ est un isomorphisme. Dans l'autre sens, on considère le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} H^0(K, \widehat{T}_2)^\wedge & \longrightarrow & H^0(K, \widehat{T}_1)^\wedge & \longrightarrow & \mathbf{H}^0(K, \widehat{C})^\wedge & \longrightarrow & H^1(K, \widehat{T}_2) & \longrightarrow & H^1(K, \widehat{T}_1) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ H^2(K, T_2)^D & \longrightarrow & H^2(K, T_1)^D & \longrightarrow & \mathbf{H}^1(K, C)^D & \longrightarrow & H^1(K, T_2)^D & \longrightarrow & H^1(K, T_1)^D \end{array}$$

et la première ligne est un complexe, et elle est exacte au niveau du morceau $H^0(K, \widehat{T}_1)^\wedge \rightarrow \mathbf{H}^0(K, \widehat{C})^\wedge \rightarrow H^1(K, \widehat{T}_2) \rightarrow H^1(K, \widehat{T}_1)$ (puisque $H^1(K, \widehat{T}_i)$ est fini), et on conclut par une chasse au diagramme.

– $i = 2$.

Comme dans le cas $i = -1$, on remarque que la suite suivante

$$0 \rightarrow \mathbf{H}^{-1}(K, \widehat{C})^\wedge \rightarrow H^0(K, \widehat{T}_2)^\wedge \xrightarrow{\widehat{\rho}} H^0(K, \widehat{T}_1)^\wedge$$

est exacte, puisque l'inclusion $\mathbf{H}^{-1}(K, \widehat{C}) \rightarrow H^0(K, \widehat{T}_2)$ est stricte par définition de la topologie sur $\mathbf{H}^{-1}(K, \widehat{C})$ et puisque les réseaux $H^0(K, \widehat{T}_i)$ sont discrets et de type fini, donc on est bien dans le cadre la proposition de l'appendice de [HS05]. On dispose donc du diagramme commutatif suivant, à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} H^2(K, T_1) & \longrightarrow & H^2(K, T_2) & \longrightarrow & \mathbf{H}^2(K, C) & \longrightarrow & H^3(K, T_1) = 0 \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow & & \\ (H^0(K, \widehat{T}_1)^\wedge)^D & \longrightarrow & (H^0(K, \widehat{T}_2)^\wedge)^D & \longrightarrow & (\mathbf{H}^{-1}(K, \widehat{C})^\wedge)^D & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

d'où un isomorphisme $\mathbf{H}^2(K, C) \simeq (\mathbf{H}^{-1}(K, \widehat{C})^\wedge)^D$. Dans l'autre sens, on considère le diagramme à lignes exactes (les groupes $H^2(K, T_i)$ et $\mathbf{H}^2(K, C)$ sont discrets) :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbf{H}^{-1}(K, \widehat{C})^\wedge & \longrightarrow & H^0(K, \widehat{T}_2)^\wedge & \longrightarrow & H^0(K, \widehat{T}_1)^\wedge \\ & & \downarrow & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ 0 & \longrightarrow & \mathbf{H}^2(K, C)^D & \longrightarrow & H^2(K, T_2)^D & \longrightarrow & H^2(K, T_1)^D \end{array}$$

les deux isomorphismes provenant de la dualité locale de Tate-Nakayama. D'où le point 4 du théorème.

□

Étudions maintenant le comportement des groupes de cohomologie non ramifiée vis-à-vis de cet accouplement. On se place dans la situation suivante : soient \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 deux tores sur $\text{Spec } \mathcal{O}$, et $\rho : \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}_2$ un morphisme de $\text{Spec } \mathcal{O}$ -schémas en groupes. On note \mathcal{C} le complexe de tores associé, et on note aussi T_1 (resp. T_2 , resp. C) la fibre générique de \mathcal{T}_1 (resp. \mathcal{T}_2 , resp. \mathcal{C} , i.e. le complexe de K -tores $[T_1 \xrightarrow{\rho} T_2]$). On définit alors $\mathbf{H}_{\text{nr}}^i(K, C)$ comme l'image de $\mathbf{H}^i(\mathcal{O}, \mathcal{C})$ dans $\mathbf{H}^i(K, C)$. On rappelle que dans le cas des tores, le groupe $H^1(\mathcal{O}, \mathcal{T}_i)$ est trivial (c'est la conjonction de [Mil80], III.3.11 a) et du théorème de Lang).

Montrons d'abord le lemme suivant :

Lemme 3.2. *Soit \mathcal{F} un faisceau (étale) localement constant \mathbf{Z} -constructible sans torsion sur $\text{Spec } \mathcal{O}$.*

Alors le morphisme $H^2(\mathcal{O}, \mathcal{F}) \rightarrow H^2(K, \mathcal{F})$ est injectif.

Démonstration : On note K^{nr} l'extension maximale non ramifiée de K , et \mathcal{O}^{nr} son anneau des entiers. On considère les suites spectrales de Hochschild-Serre suivantes : $H^p(\mathbf{F}, H^q(\mathcal{O}^{\text{nr}}, \mathcal{F})) \Rightarrow H^{p+q}(\mathcal{O}, \mathcal{F})$ et $H^p(\mathbf{F}, H^q(K^{\text{nr}}, \mathcal{F})) \Rightarrow H^{p+q}(K, \mathcal{F})$. Ces deux suites spectrales induisent le diagramme commutatif suivant de suites exactes de bas degré :

$$\begin{array}{ccccccc} H^0(\mathbf{F}, H^1(\mathcal{O}^{\text{nr}}, \mathcal{F})) & \longrightarrow & H^2(\mathbf{F}, H^0(\mathcal{O}^{\text{nr}}, \mathcal{F})) & \longrightarrow & \text{Ker}(H^2(\mathcal{O}, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(\mathbf{F}, H^2(\mathcal{O}^{\text{nr}}, \mathcal{F}))) & \longrightarrow & H^1(\mathbf{F}, H^1(\mathcal{O}^{\text{nr}}, \mathcal{F})) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^0(\mathbf{F}, H^1(K^{\text{nr}}, \mathcal{F})) & \longrightarrow & H^2(\mathbf{F}, H^0(K^{\text{nr}}, \mathcal{F})) & \longrightarrow & \text{Ker}(H^2(K, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(\mathbf{F}, H^2(K^{\text{nr}}, \mathcal{F}))) & \longrightarrow & H^1(\mathbf{F}, H^1(K^{\text{nr}}, \mathcal{F})) \end{array}$$

Or on sait que $H^1(\mathcal{O}^{\text{nr}}, \mathcal{F}) = H^2(\mathcal{O}^{\text{nr}}, \mathcal{F}) = 0$ car \mathcal{O}^{nr} est acyclique pour la topologie étale. De plus, \mathcal{O}^{nr} est simplement connexe (pour la topologie étale), donc \mathcal{F} est un faisceau constant \mathbf{Z}^k sur \mathcal{O}^{nr} , et donc on a $H^1(K^{\text{nr}}, \mathcal{F}) = 0$ puisque l'on sait que $H^1(K^{\text{nr}}, \mathbf{Z}) = 0$. Finalement, le diagramme précédent devient :

$$\begin{array}{ccc} H^2(\mathbf{F}, H^0(\mathcal{O}^{\text{nr}}, \mathcal{F})) & \xrightarrow{\cong} & H^2(\mathcal{O}, \mathcal{F}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^2(\mathbf{F}, H^0(K^{\text{nr}}, \mathcal{F})) & \xrightarrow{\cong} & \text{Ker}(H^2(K, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(\mathbf{F}, H^2(K^{\text{nr}}, \mathcal{F}))) \end{array}$$

Or la flèche verticale de gauche est un isomorphisme, donc celle de droite également, ce qui assure le lemme. □

Théorème 3.3. *Dans la situation précédente, dans la dualité parfaite : $\mathbf{H}^0(K, C)^\wedge \times \mathbf{H}^1(K, \widehat{C}) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, les sous-groupes $\mathbf{H}_{\text{nr}}^0(K, C)$ et $\mathbf{H}_{\text{nr}}^1(K, \widehat{C})$ sont les orthogonaux respectifs l'un de l'autre. De même, dans la dualité $\mathbf{H}^1(K, C) \times \mathbf{H}^0(K, \widehat{C})^\wedge \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, les sous-groupes $\mathbf{H}_{\text{nr}}^1(K, C)$ et $\mathbf{H}_{\text{nr}}^0(K, \widehat{C})^\wedge$ sont les orthogonaux respectifs l'un de l'autre.*

Démonstration : On montre seulement le premier point, le second est similaire. Puisque $\text{Br } \mathcal{O} = 0$, les accouplements $\mathbf{H}^0(K, C)^\wedge \times \mathbf{H}^1(K, \widehat{C}) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ et $\mathbf{H}^1(K, C) \times \mathbf{H}^0(K, \widehat{C})^\wedge \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ induisent des morphismes $\mathbf{H}^1(K, \widehat{C})/\mathbf{H}^1(\mathcal{O}, \widehat{\mathcal{C}}) \rightarrow \mathbf{H}^0(\mathcal{O}, \mathcal{C})^D$ et $\mathbf{H}^0(K, C)^\wedge/\mathbf{H}^0(\mathcal{O}, \mathcal{C})^\wedge \rightarrow \mathbf{H}^1(\mathcal{O}, \widehat{\mathcal{C}})^D$. Il suffit

alors de montrer que ces morphismes sont injectifs. On considère d'abord le diagramme commutatif suivant, dont les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
H^1(\mathcal{O}, \widehat{\mathcal{T}}_1) & \longrightarrow & \mathbf{H}^1(\mathcal{O}, \widehat{\mathcal{E}}) & \longrightarrow & H^2(\mathcal{O}, \widehat{\mathcal{T}}_2) & \longrightarrow & H^2(\mathcal{O}, \widehat{\mathcal{T}}_1) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H^1(K, \widehat{T}_1) & \longrightarrow & \mathbf{H}^1(K, \widehat{C}) & \longrightarrow & H^2(K, \widehat{T}_2) & \longrightarrow & H^2(K, \widehat{T}_1) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H^1(\mathcal{O}, \mathcal{T}_1)^D = 0 & \longrightarrow & \mathbf{H}^0(\mathcal{O}, \mathcal{E})^D & \longrightarrow & H^0(\mathcal{O}, \mathcal{T}_2)^D & \longrightarrow & H^0(\mathcal{O}, \mathcal{T}_1)^D
\end{array}$$

En outre, la troisième colonne est exacte (voir par exemple [HS05], lemma 2.11). On se donne alors un élément $\alpha \in \mathbf{H}^1(K, \widehat{C})$ s'envoyant sur 0 dans $\mathbf{H}^0(\mathcal{O}, \mathcal{E})^D$. On note β son image dans $H^2(K, \widehat{T}_2)$. Puisque β s'envoie sur 0 dans $H^0(\mathcal{O}, \mathcal{T}_2)^D$, on sait que β provient d'un $\beta^0 \in H^2(\mathcal{O}, \widehat{\mathcal{T}}_2)$, d'image $\gamma^0 \in H^2(\mathcal{O}, \widehat{\mathcal{T}}_1)$. Par commutativité du diagramme, γ^0 s'envoie sur 0 dans $H^2(K, \widehat{T}_1)$. Or le morphisme $H^2(\mathcal{O}, \widehat{\mathcal{T}}_1) \rightarrow H^2(K, \widehat{T}_1)$ est injectif par le lemme 3.2, donc $\gamma^0 = 0$. Par conséquent, β^0 se relève en un $\delta^0 \in \mathbf{H}^1(\mathcal{O}, \widehat{\mathcal{E}})$, d'image $\delta \in \mathbf{H}^1(K, \widehat{C})$. Or α et δ ont tous les deux pour image $\beta \in H^2(K, \widehat{T}_2)$, donc $\beta = \delta + \epsilon$, avec $\epsilon \in H^1(K, \widehat{T}_1)$. Par surjectivité de $H^1(\mathcal{O}, \widehat{\mathcal{T}}_1) \rightarrow H^1(K, \widehat{T}_1)$ (voir par exemple [HS05], page 105, second diagramme; on peut aussi voir cela comme une conséquence de [Mil06], théorème I.2.6 et du fait que $H^1(\mathcal{O}, \mathcal{T}_1) = 0$), ϵ se relève en $\epsilon^0 \in H^1(\mathcal{O}, \widehat{\mathcal{T}}_1)$. Alors l'élément $\delta^0 + \epsilon^0 \in \mathbf{H}^1(\mathcal{O}, \widehat{\mathcal{E}})$ s'envoie sur $\alpha \in \mathbf{H}^1(K, \widehat{C})$. Cela assure donc que le morphisme $\mathbf{H}^1(K, \widehat{C})/\mathbf{H}^1(\mathcal{O}, \widehat{\mathcal{E}}) \rightarrow \mathbf{H}^0(\mathcal{O}, \mathcal{E})^D$ est injectif.

Montrons l'injectivité de $\mathbf{H}^0(K, C)^\wedge/\mathbf{H}^0(\mathcal{O}, \mathcal{E})^\wedge \rightarrow \mathbf{H}^1(\mathcal{O}, \widehat{\mathcal{E}})^D$. On considère cette fois le diagramme suivant (les groupes $H^0(\mathcal{O}, \mathcal{T}_i)$ étant compacts) :

$$\begin{array}{ccccccc}
H^0(\mathcal{O}, \mathcal{T}_1) & \longrightarrow & H^0(\mathcal{O}, \mathcal{T}_2) & \longrightarrow & \mathbf{H}^0(\mathcal{O}, \mathcal{E}) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{O}, \mathcal{T}_1) = 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H^0(K, T_1)^\wedge & \longrightarrow & H^0(K, T_2)^\wedge & \longrightarrow & \mathbf{H}^0(K, C)^\wedge & \longrightarrow & H^1(K, T_1) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H^2(\mathcal{O}, \widehat{\mathcal{T}}_1)^D & \longrightarrow & H^2(\mathcal{O}, \widehat{\mathcal{T}}_2)^D & \longrightarrow & \mathbf{H}^1(\mathcal{O}, \widehat{\mathcal{E}})^D & \longrightarrow & H^1(\mathcal{O}, \widehat{\mathcal{T}}_1)^D
\end{array}$$

Soit $\alpha \in \mathbf{H}^0(K, C)^\wedge$ s'envoyant sur 0 dans $\mathbf{H}^1(\mathcal{O}, \widehat{\mathcal{E}})^D$. On note β son image dans $H^1(K, T_1)$. Par injectivité de la flèche $H^1(K, T_1) \rightarrow H^1(\mathcal{O}, \widehat{\mathcal{T}}_1)^D$ (voir à nouveau [Mil06], théorème I.2.6 et le fait que $H^1(\mathcal{O}, \mathcal{T}_1) = 0$ par exemple), on sait que $\beta = 0$. Donc par exactitude de la seconde ligne en $\mathbf{H}^0(K, C)^\wedge$, α se relève en un $\gamma \in H^0(K, T_2)^\wedge$. On note γ' l'image de γ dans $H^2(\mathcal{O}, \widehat{\mathcal{T}}_2)^D$. Par exactitude de la ligne inférieure, ce γ' se relève en un élément $\delta' \in H^2(\mathcal{O}, \widehat{\mathcal{T}}_1)^D$. Par surjectivité de la flèche $H^0(K, T_1)^\wedge \rightarrow H^2(\mathcal{O}, \widehat{\mathcal{T}}_1)^D$ (voir lemme 3.2), on relève δ' en un $\delta \in H^0(K, T_1)^\wedge$. L'image δ' de δ dans $H^0(K, T_2)^\wedge$ a même image que γ dans $H^2(\mathcal{O}, \widehat{\mathcal{T}}_2)^D$, donc par exactitude de la deuxième colonne (dualité de Tate-Nakayama, voir lemme 2.11 de [HS05]), $\gamma - \delta'$ se relève en un $\epsilon \in H^0(\mathcal{O}, \mathcal{T}_2)$, dont on note ϵ' l'image dans $\mathbf{H}^0(\mathcal{O}, \mathcal{E})$. Alors, puisque la deuxième ligne du diagramme est un complexe, ϵ' s'envoie sur α dans $\mathbf{H}^0(K, C)^\wedge$. Cela assure l'injectivité de $\mathbf{H}^0(K, C)^\wedge/\mathbf{H}^0(\mathcal{O}, \mathcal{E})^\wedge \rightarrow \mathbf{H}^1(\mathcal{O}, \widehat{\mathcal{E}})^D$, et cela conclut la preuve du théorème. \square

Traitons également le cas du corps \mathbf{R} : pour cela, on introduit les groupes de cohomologie modifiés à la Tate $\widehat{\mathbf{H}}^i(\mathbf{R}, C)$.

Proposition 3.4. *Soit C un complexe de tores sur \mathbf{R} . Alors le cup-produit induit une dualité parfaite de groupes finis, fonctorielle en C :*

$$\widehat{\mathbf{H}}^0(\mathbf{R}, C) \times \widehat{\mathbf{H}}^1(\mathbf{R}, \widehat{C}) \rightarrow \mathbf{Z}/2$$

Démonstration : c'est un dévissage facile à partir du cas des tores. \square

Pour finir, il convient de rédiger un analogue du premier théorème pour le corps des fractions d'un anneau hensélien, puis de comparer les groupes de cohomologie pour un corps hensélien et pour son complété, afin de remplacer les complétés \widehat{k}_v par les hensélisés k_v quand k est un corps de nombres et v une place de k (voir la section suivante).

Théorème 3.5. *Soit A un anneau hensélien, de corps résiduel fini, F son corps des fractions. On suppose F de caractéristique 0. Soit C un complexe de tores sur F . Alors le cup-produit induit des dualités parfaites, fonctorielles en C , entre les groupes :*

- $\mathbf{H}^{-1}(F, C)^\wedge$ et $\mathbf{H}^2(F, \widehat{C})$.
- $\mathbf{H}^0(F, C)^\wedge$ et $\mathbf{H}^1(F, \widehat{C})$.
- $\mathbf{H}^1(F, C)$ et $\mathbf{H}^0(F, \widehat{C})^\wedge$.
- $\mathbf{H}^2(F, C)$ et $\mathbf{H}^{-1}(F, \widehat{C})^\wedge$.

Remarque 3.6. On munit $T_i(F)$ de la topologie induite par celle de $T_i(K)$, et $\mathbf{H}^0(F, C)$ de la topologie "naturelle". On va d'ailleurs montrer que pour le groupe abélien $\mathbf{H}^0(F, C)$, sa complétion profinie coïncide avec sa complétion pour la topologie des sous-groupes ouverts d'indice fini.

Démonstration :

Lemme 3.7. *Soit K la complétion de F . Alors les morphismes canoniques $\mathbf{H}^i(F, C) \rightarrow \mathbf{H}^i(K, C)$ sont des isomorphismes pour $i \geq 1$, et $\mathbf{H}^0(F, C) \rightarrow \mathbf{H}^0(K, C)$ induit un isomorphisme $\mathbf{H}^0(F, C)^\wedge \rightarrow \mathbf{H}^0(K, C)^\wedge$.*

Les morphismes $\mathbf{H}^i(F, \widehat{C}) \rightarrow \mathbf{H}^i(K, \widehat{C})$ sont des isomorphismes pour tout $i \geq 0$.

Démonstration : On sait que $H^1(F, T_i) \cong H^1(K, T_i)$ par [HS05], lemme 2.7, et ces groupes sont finis. Par définition de la topologie sur $T_i(F)$, on remarque que le sous-groupe $nT_i(F)$ de $T_i(F)$, qui est d'indice fini dans $T_i(F)$, est ouvert : en effet, son adhérence dans $T_i(K)$ est exactement $nT_i(K)$ (théorème de Greenberg, voir [Gre66]. Voir également [BLR90], section 3.6, corollaire 10 pour une formulation précise du résultat utilisé), qui est d'indice fini dans $T_i(K)$, donc ouvert (K est de caractéristique 0, voir [Mil06], page 32), et il se trouve que $nT_i(F) = nT_i(K) \cap T_i(F)$ (voir [HS05], preuve du lemme 2.7), d'où le fait que $nT_i(F)$ soit ouvert dans $T_i(F)$. Par conséquent, pour les groupes $T_i(F)$ (resp. $T_i(K)$), la complétion pour les sous-groupes $nT_i(F)$ (resp. $nT_i(K)$) coïncide avec la complétion pour les sous-groupes ouverts d'indice fini. Or $T_i(F)_\wedge \cong T_i(K)_\wedge$ (voir [HS05], preuve du lemme 2.7), donc $H^0(F, T_i)^\wedge \cong H^0(K, T_i)^\wedge$.

Or on peut compléter la suite exacte

$$H^0(F, T_1) \rightarrow H^0(F, T_2) \rightarrow \mathbf{H}^0(F, C) \rightarrow H^1(F, T_1) \rightarrow H^1(F, T_2)$$

puisque les deux derniers groupes sont finis et la seconde flèche est ouverte par définition de la topologie sur $\mathbf{H}^0(F, C)$. D'où le diagramme commutatif à lignes exactes suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} H^0(F, T_1)^\wedge & \longrightarrow & H^0(F, T_2)^\wedge & \longrightarrow & \mathbf{H}^0(F, C)^\wedge & \longrightarrow & H^1(F, T_1) & \longrightarrow & H^1(F, T_2) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ H^0(K, T_1)^\wedge & \longrightarrow & H^0(K, T_2)^\wedge & \longrightarrow & \mathbf{H}^0(K, C)^\wedge & \longrightarrow & H^1(K, T_1) & \longrightarrow & H^1(K, T_2) \end{array}$$

On a déjà montré que les deux premières flèches verticales, ainsi que les deux dernières, étaient des isomorphismes, donc par une chasse au diagramme, la flèche centrale est un isomorphisme. Pour les groupes $\mathbf{H}^i(F, C)$ avec $i \geq 1$, la preuve est exactement celle du lemme 2.7 de [HS05]. Pour le complexe dual \widehat{C} , la preuve en degré strictement positif est toujours la même ; pour le degré 0, on considère le diagramme exact suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} H^0(F, \widehat{T}_2) & \longrightarrow & H^0(F, \widehat{T}_1) & \longrightarrow & \mathbf{H}^0(F, \widehat{C}) & \longrightarrow & H^1(F, \widehat{T}_2) & \longrightarrow & H^1(F, \widehat{T}_1) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ H^0(K, \widehat{T}_2) & \longrightarrow & H^0(K, \widehat{T}_1) & \longrightarrow & \mathbf{H}^0(K, \widehat{C}) & \longrightarrow & H^1(K, \widehat{T}_2) & \longrightarrow & H^1(K, \widehat{T}_1) \end{array}$$

les isomorphismes provenant du fait que \widehat{T}_i est localement constant et que les corps F et K ont même groupe de Galois absolu. \square

Ce lemme 3.7, ainsi que la remarque sur les différentes complétions dans la preuve du lemme, assure le théorème 3.5 grâce au théorème 3.1. \square

4 Dualité globale : cohomologie étale

Soit k un corps de nombres, \mathcal{O}_k son anneau des entiers. Soit U un ouvert non vide de $\text{Spec } \mathcal{O}_k$, et Σ_f l'ensemble des places finies de k correspondant à des points fermés hors de U . Si v désigne une place de k , on note k_v l'hensélisé de k en v , et \widehat{k}_v le complété de k en v . Dans toute la suite, si v est une place infinie de k , les groupes d'hypercohomologie modifiés de Tate $\widehat{\mathbf{H}}^i(k_v, \cdot)$ seront notés $\mathbf{H}^i(k_v, \cdot)$. On note également $\Sigma := \Sigma_f \cup \Omega_\infty$, où Ω_∞ désigne l'ensemble des places infinies de k .

On renvoie au début de la section 3 de [HS05] pour la définition des groupes d'hypercohomologie à support compact à valeur dans un complexe de faisceaux abéliens cohomologiquement borné. On utilisera également la propriété de functorialité covariante de la cohomologie à support compact rappelée au début de la page 107 dans [HS05] : si $V \rightarrow U$ est une immersion ouverte, on a un morphisme canonique $\mathbf{H}_c^i(V, \mathcal{E}_V) \rightarrow \mathbf{H}_c^i(U, \mathcal{E})$.

Suivant [Mil06], on note $\mathbf{D}^i(U, \cdot)$ l'image de $\mathbf{H}_c^i(U, \cdot)$ dans $\mathbf{H}^i(U, \cdot)$.

Lemme 4.1. *Soit \mathcal{E} un complexe de tores sur U .*

1. *Les groupes $\mathbf{H}^i(U, \mathcal{E})$ et $\mathbf{H}^i(U, \widehat{\mathcal{E}})$ sont de torsion pour $i \geq 1$, ainsi que les groupes $\mathbf{H}_c^j(U, \widehat{\mathcal{E}})$ et $\mathbf{H}_c^j(U, \mathcal{E})$ pour $j \geq 2$.*
2. *Pour tout l inversible sur U , les groupes $\mathbf{H}^i(U, \mathcal{E})\{l\}$ et $\mathbf{H}^i(U, \widehat{\mathcal{E}})\{l\}$ (resp. $\mathbf{H}_c^j(U, \widehat{\mathcal{E}})\{l\}$ et $\mathbf{H}_c^j(U, \mathcal{E})\{l\}$) sont de cotype fini pour $i \geq 1$ (resp. $j \geq 2$).*
3. *Les groupes $\mathbf{H}^{-1}(U, \mathcal{E})$, $\mathbf{H}^0(U, \mathcal{E})$, $\mathbf{H}_c^{-1}(U, \mathcal{E})$, $\mathbf{H}^{-1}(U, \widehat{\mathcal{E}})$, $\mathbf{H}^0(U, \widehat{\mathcal{E}})$, $\mathbf{H}_c^{-1}(U, \widehat{\mathcal{E}})$ et $\mathbf{H}_c^0(U, \widehat{\mathcal{E}})$ sont de type fini.*
4. *Le groupe $\mathbf{H}_c^0(U, \mathcal{E})$ est extension d'un groupe de type fini par un groupe profini, le groupe $\mathbf{H}_c^1(U, \mathcal{E})$ est extension d'un groupe de torsion (dont les sous-groupes de torsion l -primaire sont de cotype fini) par un groupe profini, et le groupe $\mathbf{H}_c^1(U, \widehat{\mathcal{E}})$ est extension d'un groupe de torsion (dont les sous-groupes de torsion l -primaire sont de cotype fini) par un groupe de type fini.*

Démonstration :

1. Notons $\mathcal{C} := [\mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}_2]$. On considère la suite exacte suivante :

$$H^i(U, \mathcal{T}_1) \rightarrow H^i(U, \mathcal{T}_2) \rightarrow \mathbf{H}^i(U, \mathcal{C}) \rightarrow H^{i+1}(U, \mathcal{T}_1) \rightarrow H^{i+1}(U, \mathcal{T}_2)$$

Or on sait que les $H^i(U, \mathcal{T}_r)$ sont de torsion pour $i \geq 1$ (cf [HS05], lemme 3.2.(1)), donc il en est de même pour $\mathbf{H}^i(U, \mathcal{C})$. On en déduit le résultat pour les groupes de cohomologie à support compact à l'aide de la suite exacte

$$\mathbf{H}^i(U, \mathcal{C}) \rightarrow \bigoplus_{v \in \Sigma_f} \mathbf{H}^i(k_v, \mathcal{C}) \oplus \bigoplus_{v \text{ infinie}} \widehat{\mathbf{H}}^i(k_v, \mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{H}_c^{i+1}(U, \mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{H}^{i+1}(U, \mathcal{C}) \rightarrow \bigoplus_{v \in \Sigma_f} \mathbf{H}^{i+1}(k_v, \mathcal{C}) \oplus \bigoplus_{v \text{ infinie}} \widehat{\mathbf{H}}^{i+1}(k_v, \mathcal{C})$$

Le raisonnement est exactement le même pour les groupes $\mathbf{H}^i(U, \widehat{\mathcal{C}})$, utilisant le fait que $H^i(U, \widehat{\mathcal{T}}_r)$ est de torsion pour $i \geq 1$.

2. Par définition, ces groupes sont de torsion. On utilise à nouveau la suite exacte :

$$H^i(U, \mathcal{T}_1)\{l\} \rightarrow H^i(U, \mathcal{T}_2)\{l\} \rightarrow \mathbf{H}^i(U, \mathcal{C})\{l\} \rightarrow H^{i+1}(U, \mathcal{T}_1)\{l\}$$

Pour $i \geq 1$, les trois groupes autres que $\mathbf{H}^i(U, \mathcal{C})\{l\}$ sont de cotype fini (voir [HS05], lemme 3.2.(2)), donc $\mathbf{H}^i(U, \mathcal{C})\{l\}$ l'est aussi (puisque'un sous-groupe et un quotient d'un groupe de cotype fini sont de cotype fini). En ce qui concerne les groupes $\mathbf{H}^i(U, \widehat{\mathcal{C}})\{l\}$, $\mathbf{H}_c^i(U, \mathcal{C})\{l\}$ et $\mathbf{H}_c^i(U, \widehat{\mathcal{C}})\{l\}$, le raisonnement est le même.

3. Pour $\mathbf{H}^{-1}(U, \mathcal{C})$ et $\mathbf{H}^0(U, \mathcal{C})$, on utilise à nouveau la suite exacte précédente, sachant que $H^0(U, \mathcal{T}_i)$ est de type fini (voir [HS05], lemme 3.2.(3)) et que $H^1(U, \mathcal{T}_1)$ est fini (voir [Mil06], théorème II.4.6). En ce qui concerne le groupe $\mathbf{H}_c^{-1}(U, \mathcal{C})$, on utilise la suite exacte reliant cohomologie étale et cohomologie à support compact. Pour les autres groupes, le raisonnement est similaire, en utilisant en outre le fait que $\mathbf{H}^{-1}(k_v, \widehat{\mathcal{C}})$ est de type fini pour $v \in \Sigma$.

4. C'est un dévissage à l'aide des résultats des points précédents. □

On va désormais utiliser les réalisations n -adiques du complexe \mathcal{C} et de son dual.

On rappelle que l'accouplement canonique $\mathcal{C} \otimes^{\mathbf{L}} \widehat{\mathcal{C}} \rightarrow \mathbf{G}_m[1]$ induit $(\mathcal{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \otimes^{\mathbf{L}} (\widehat{\mathcal{C}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \rightarrow \mathbf{G}_m[2]$. On en déduit des accouplements en cohomologie :

$$\mathbf{H}^i(U, \mathcal{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \times \mathbf{H}_c^{1-i}(U, \widehat{\mathcal{C}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \rightarrow H_c^3(U, \mathbf{G}_m) = \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \quad (1)$$

On a alors le résultat de dualité suivant :

Proposition 4.2. *Pour tout $i \in \mathbf{Z}$, si l'entier n est inversible sur U , l'accouplement (1)*

$$\mathbf{H}^i(U, \mathcal{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \times \mathbf{H}_c^{1-i}(U, \widehat{\mathcal{C}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \rightarrow H_c^3(U, \mathbf{G}_m) = \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

est une dualité parfaite de groupes finis, fonctorielle en C . De même en inversant les rôles de \mathcal{C} et $\widehat{\mathcal{C}}$.

Démonstration : Grâce au lemme 2.3, on dispose du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} H^i(U, T_{\mathbf{Z}/n}(\mathcal{C})) & \longrightarrow & H^{i+2}(U, {}_n(\text{Ker } \rho)) & \longrightarrow & \mathbf{H}^i(U, \mathcal{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) & \longrightarrow & H^{i+1}(U, T_{\mathbf{Z}/n}(\widehat{\mathcal{C}})) & \longrightarrow & H^{i+3}(U, {}_n(\text{Ker } \rho)) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_c^{3-i}(U, T_{\mathbf{Z}/n}(\widehat{\mathcal{C}}))^D & \longrightarrow & H_c^{1-i}(U, {}_n(\widehat{\text{Ker } \rho}))^D & \longrightarrow & \mathbf{H}_c^{1-i}(U, \widehat{\mathcal{C}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)^D & \longrightarrow & H_c^{2-i}(U, T_{\mathbf{Z}/n}(\mathcal{C}))^D & \longrightarrow & H_c^{-i}(U, {}_n(\text{Ker } \rho))^D \end{array}$$

Hormis les groupes d'hypercohomologie au centre du diagramme, tous les groupes de cohomologie intervenant ici sont finis (voir par exemple [Mil06], théorème II.3.1), ce qui assure la finitude des groupes intervenant dans l'énoncé de la proposition.

Par définition de l'accouplement (1) et des flèches dans le lemme 2.3, les autres morphismes autres que le morphisme central sont (au signe près) les accouplements usuels qui interviennent dans la dualité d'Artin-Verdier. On va désormais appliquer le théorème de dualité de Artin-Verdier pour les faisceaux finis.

Les faisceaux $T_{\mathbf{Z}/n}(C)$ et ${}_n\text{Ker}(\rho)$ étant constructibles localement constants (voir lemme 2.3), et n étant inversible sur U , les flèches verticales autres que celle du milieu sont des isomorphismes (voir par exemple [Mil06], corollaire II.3.3). Donc celle du milieu est aussi un isomorphisme, par lemme des cinq. En remplaçant C par \widehat{C} , on obtient finalement une dualité parfaite de groupes finis $\mathbf{H}^i(U, \mathcal{C} \otimes \mathbf{Z}/n) \times \mathbf{H}_c^{1-i}(U, \widehat{\mathcal{C}} \otimes \mathbf{Z}/n) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, pour tout n inversible sur U et tout i , ce qui conclut la preuve. \square

Déduisons de ce résultat le théorème principal de ce paragraphe :

Théorème 4.3. *Pour tout entier i , pour tout nombre premier l inversible sur U , le cup-produit induit une dualité parfaite fonctorielle en C :*

$$\overline{\mathbf{H}^i(U, \mathcal{C})\{l\}} \times \overline{\mathbf{H}_c^{2-i}(U, \widehat{\mathcal{C}})\{l\}} \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

et de même en échangeant les rôles de \mathcal{C} et $\widehat{\mathcal{C}}$.

Remarque 4.4. Les groupes $\mathbf{H}^i(U, \mathcal{C})\{l\}$ et $\mathbf{H}_c^{2-i}(U, \widehat{\mathcal{C}})\{l\}$ étant tous de cotype fini, leur sous-groupe divisible maximal coïncide avec leur sous-groupe formé des éléments divisibles.

Démonstration : Fixons l un nombre premier inversible sur U . On déduit de la proposition 4.2 une dualité parfaite entre le groupe discret $\varinjlim_n \mathbf{H}^{i-1}(U, \mathcal{C} \otimes \mathbf{Z}/l^n)$ et le groupe profini $\varprojlim_n \mathbf{H}_c^{2-i}(U, \widehat{\mathcal{C}} \otimes \mathbf{Z}/l^n)$. Celle-ci induit une dualité parfaite entre le quotient $\varinjlim_n \overline{\mathbf{H}^{i-1}(U, \mathcal{C} \otimes \mathbf{Z}/l^n)}$ et le sous-groupe de torsion $\left(\varprojlim_n \mathbf{H}_c^{2-i}(U, \widehat{\mathcal{C}} \otimes \mathbf{Z}/l^n)\right)_{\text{tors}}$.

Or en tensorisant (produit tensoriel dérivé $\otimes^{\mathbf{L}}$) la suite exacte $0 \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}/n \rightarrow 0$ par \mathcal{C} , on obtient une suite exacte de groupes finis :

$$0 \rightarrow \mathbf{H}^{i-1}(U, \mathcal{C}) \otimes \mathbf{Z}/n \rightarrow \mathbf{H}^{i-1}(U, \mathcal{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \rightarrow_n \mathbf{H}^i(U, \mathcal{C}) \rightarrow 0$$

qui permet d'identifier (après passage à la limite inductive) le groupe $\varinjlim_n \overline{\mathbf{H}^{i-1}(U, \mathcal{C} \otimes \mathbf{Z}/l^n)}$ au groupe $\overline{\mathbf{H}^i(U, \mathcal{C})\{l\}}$. De même, en remplaçant \mathcal{C} par $\widehat{\mathcal{C}}$, et en passant à la limite projective (les groupes en question ici étant finis), on obtient un isomorphisme

$$\left(\varprojlim_n \mathbf{H}_c^{2-i}(U, \widehat{\mathcal{C}} \otimes \mathbf{Z}/l^n)\right)_{\text{tors}} \cong \left(\mathbf{H}_c^{2-i}(U, \widehat{\mathcal{C}})^{(l)}\right)_{\text{tors}} = \mathbf{H}_c^{2-i}(U, \widehat{\mathcal{C}})^{(l)}\{l\}$$

Enfin, la structure des groupes $\mathbf{H}_c^{2-i}(U, \widehat{\mathcal{C}})$ (voir lemme 4.1) fournit un isomorphisme $\mathbf{H}_c^{2-i}(U, \widehat{\mathcal{C}})^{(l)}\{l\} \cong \overline{\mathbf{H}_c^{2-i}(U, \widehat{\mathcal{C}})\{l\}}$ ($\mathbf{H}_c^{2-i}(U, \widehat{\mathcal{C}})^{(l)}$ est toujours de cotype fini).

D'où finalement le résultat, en remarquant que tout ce raisonnement fonctionne en intervertissant \mathcal{C} et $\widehat{\mathcal{C}}$. \square

On souhaite déduire de ce résultat un résultat de dualité sur les groupes $D^i(U, \mathcal{C})$ et $D^j(U, \widehat{\mathcal{C}})$. Pour cela on va utiliser le lemme suivant (voir [HS05], corrigenda) :

Lemme 4.5. Soit $a \in \mathbf{D}^1(U, \mathcal{C})$, l^r -divisible dans $\mathbf{H}^1(U, \mathcal{C})$, et orthogonal au sous-groupe $l^r \mathbf{D}^1(U, \widehat{\mathcal{C}})$ de $\mathbf{H}^1(U, \widehat{\mathcal{C}})$. Alors a est l^r -divisible dans $\mathbf{D}^1(U, \mathcal{C})$.

Démonstration : Notons $n = l^r$. On considère le diagramme commutatif exact suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & \mathbf{H}_c^1(U, \mathcal{C}) & \longrightarrow & \mathbf{H}^1(U, \mathcal{C}) \\
& & & & \downarrow n & & \downarrow n \\
& & \oplus_{v \in \Sigma} \mathbf{H}^0(k_v, \mathcal{C}) & \longrightarrow & \mathbf{H}_c^1(U, \mathcal{C}) & \longrightarrow & \mathbf{H}^1(U, \mathcal{C}) \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathbf{H}^0(U, \mathcal{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) & \longrightarrow & \oplus_{v \in \Sigma} \mathbf{H}^0(k_v, \mathcal{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) & \longrightarrow & \mathbf{H}_c^1(U, \mathcal{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) & \longrightarrow & \mathbf{H}^1(U, \mathcal{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)
\end{array}$$

Soit $a \in \mathbf{D}^1(U, \mathcal{C})$ comme dans l'énoncé, image d'un élément $\tilde{a} \in \mathbf{H}_c^1(U, \mathcal{C})$. On écrit $a = na_1$, avec $a_1 \in \mathbf{H}^1(U, \mathcal{C})$. On note a_2 l'image de \tilde{a} dans $\mathbf{H}_c^1(U, \mathcal{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$. Par commutativité et exactitude, a_2 provient d'un élément $(c_v) \in \oplus_{v \in \Sigma} \mathbf{H}^0(k_v, \mathcal{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$. On dispose alors des accouplements naturels : $\mathbf{D}^1(U, \mathcal{C}) \times \mathbf{D}^1(U, \widehat{\mathcal{C}}) \xrightarrow{P-T} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ et $\mathbf{H}_c^1(U, \mathcal{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \times \mathbf{H}^0(U, \widehat{\mathcal{C}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \xrightarrow{A-V} \mathbf{Z}/n$, qui sont compatibles via le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{H}^0(U, \widehat{\mathcal{C}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) & \times & \mathbf{H}_c^1(U, \mathcal{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) & \xrightarrow{A-V} & \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \\
\downarrow & & \uparrow & & \downarrow = \\
{}_n \mathbf{H}^1(U, \widehat{\mathcal{C}}) & \times & \mathbf{H}_c^1(U, \mathcal{C})/n & \longrightarrow & \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \\
\uparrow & & \downarrow & & \downarrow = \\
{}_n \mathbf{D}^1(U, \widehat{\mathcal{C}}) & \times & \mathbf{D}^1(U, \mathcal{C})/n & \xrightarrow{P-T} & \mathbf{Q}/\mathbf{Z}
\end{array}$$

On en déduit que $\langle a, a' \rangle_{P-T} = \langle a_2, b' \rangle_{A-V}$, si $a' \in {}_n \mathbf{D}^1(U, \widehat{\mathcal{C}})$ est l'image de $b' \in \mathbf{H}^0(U, \widehat{\mathcal{C}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$. Or par hypothèse $\langle a_2, b' \rangle_{A-V} = \sum_{v \in \Sigma} \langle c_v, b'_v \rangle_v$ (où b'_v est l'image de b' dans $\oplus_{v \in \Sigma} \mathbf{H}^0(k_v, \widehat{\mathcal{C}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$), et on a supposé que $\langle a, a' \rangle_{P-T} = 0$ pour tout $a' \in {}_n \mathbf{D}^1(U, \widehat{\mathcal{C}})$, donc a_2 est orthogonal à l'image de $S_n(U, \widehat{\mathcal{C}}) := \text{Ker}(\mathbf{H}^0(U, \widehat{\mathcal{C}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \rightarrow \oplus_{v \in \Sigma} \mathbf{H}^1(k_v, \widehat{\mathcal{C}}))$ dans $\oplus_{v \in \Sigma} \mathbf{H}^0(k_v, \widehat{\mathcal{C}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$.

On va maintenant montrer que l'élément a_2 vérifiant cette propriété est nécessairement nul, ce qui va permettre de conclure puisque si $a_2 = 0$, alors \tilde{a} s'écrit $\tilde{a} = n\tilde{a}_1$, avec $\tilde{a}_1 \in \mathbf{H}_c^1(U, \mathcal{C})$, ce qui conclut la preuve du lemme 4.5.

Pour montrer la trivialité de a_2 , on utilise l'analogue du lemme des corrigenda de [HS05] : plus précisément, montrons que (c_v) est somme d'un élément de $\oplus_{v \in \Sigma} \mathbf{H}^0(k_v, C)$ et d'un élément de $\mathbf{H}^0(U, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$. Pour cela, regardons le diagramme suivant ($\oplus_{v \in \Sigma} \mathbf{H}^0(k_v, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$ est fini) :

$$\begin{array}{ccccc}
\oplus_{v \in \Sigma} \mathbf{H}^0(k_v, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) & & & & \\
\uparrow & \searrow \gamma_1 & & & \\
\oplus_{v \in \Sigma} \mathbf{H}^0(k_v, C)^\wedge & \longrightarrow & \mathbf{H}^0(U, \widehat{\mathcal{C}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)^D & \longrightarrow & S_n(U, \widehat{\mathcal{C}})^D \longrightarrow 0
\end{array}$$

On sait donc que $\gamma_1((c_v))$ est nul quand on le pousse dans $S_n(U, \widehat{\mathcal{C}})^D$, donc par exactitude de la dernière ligne (elle est exacte par définition de $S_n(U, \widehat{\mathcal{C}})$), on en déduit que $\gamma_1((c_v))$ se relève dans $\oplus_{v \in \Sigma} \mathbf{H}^0(k_v, C)^\wedge$, en un élément noté (t_v) . On envoie alors (t_v) dans $\oplus_{v \in \Sigma} \mathbf{H}^0(k_v, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$, et

on remarque que $(c_v) - (t_v) \in \text{Ker}(\gamma_1)$. Considérons alors le diagramme commutatif suivant, dont la première ligne est exacte :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{H}^0(U, \mathcal{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) & \longrightarrow & \bigoplus_{v \in \Sigma} \mathbf{H}^0(k_v, \mathcal{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) & \longrightarrow & \mathbf{H}_c^1(U, \widehat{\mathcal{C}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)^D \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ & & \bigoplus_{v \in \Sigma} \mathbf{H}^0(k_v, \widehat{\mathcal{C}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)^D & \xrightarrow{\gamma_1} & \mathbf{H}^0(U, \widehat{\mathcal{C}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)^D \end{array}$$

où les isomorphismes verticaux proviennent du théorème 3.5 de dualité locale et la proposition 4.2. On déduit donc de ce diagramme la suite exacte suivante : $\mathbf{H}^0(U, \mathcal{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \rightarrow \bigoplus_{v \in \Sigma} \mathbf{H}^0(k_v, \mathcal{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \xrightarrow{\gamma_1} \mathbf{H}^0(U, \widehat{\mathcal{C}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)^D$, donc $(c_v) - (t_v)$ se relève en $\mu \in \mathbf{H}^0(U, \mathcal{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$. Et finalement on a $(c_v) = (t_v) + \mu$. On conclut alors en remarquant que par finitude de $\bigoplus_{v \in \Sigma} \mathbf{H}^0(k_v, \mathcal{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$, l'image de $\bigoplus_{v \in \Sigma} \mathbf{H}^0(k_v, C)^\wedge$ dans $\bigoplus_{v \in \Sigma} \mathbf{H}^0(k_v, \mathcal{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$ coïncide avec l'image de $\bigoplus_{v \in \Sigma} \mathbf{H}^0(k_v, C)$ dans $\bigoplus_{v \in \Sigma} \mathbf{H}^0(k_v, \mathcal{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$, donc on peut bien écrire $(c_v) = (t'_v) + \mu$ avec $(t'_v) \in \bigoplus_{v \in \Sigma} \mathbf{H}^0(k_v, C)$ et $\mu \in \mathbf{H}^0(U, \mathcal{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$. Cela assure que $a_2 = 0$, ce qui termine la preuve du lemme 4.5. \square

Définissons aussi

$$\mathbf{D}_\lambda^0(U, \mathcal{C}) := \text{Ker} \left(\mathbf{H}^0(U, \mathcal{C}) \rightarrow \bigoplus_{v \in \Sigma} \mathbf{H}^0(k_v, \mathcal{C})^\wedge \right)$$

Corollaire 4.6. *On a des accouplements fonctoriels $\mathbf{D}_\lambda^0(U, \mathcal{C})\{l\} \times \mathbf{D}^2(U, \widehat{\mathcal{C}})\{l\} \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ et $\mathbf{D}^1(U, \mathcal{C})\{l\} \times \mathbf{D}^1(U, \widehat{\mathcal{C}})\{l\} \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ (ainsi que $\mathbf{D}^2(U, \mathcal{C})\{l\} \times \mathbf{D}^0(U, \widehat{\mathcal{C}})\{l\} \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$), dont les noyaux à droite et à gauche sont les sous-groupes divisibles maximaux des deux groupes.*

Démonstration : Pour le premier accouplement, il suffit d'écrire le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbf{D}_\lambda^0(U, \mathcal{C})\{l\} & \longrightarrow & \mathbf{H}^0(U, \mathcal{C})\{l\} & \longrightarrow & \bigoplus_{v \in \Sigma} \mathbf{H}^0(k_v, \mathcal{C})^{(l)} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \overline{\mathbf{D}^2(U, \widehat{\mathcal{C}})\{l\}}^D & \longrightarrow & \overline{\mathbf{H}_c^2(U, \widehat{\mathcal{C}})\{l\}}^D & \longrightarrow & \bigoplus_{v \in \Sigma} \mathbf{H}^1(k_v, \widehat{\mathcal{C}})\{l\}^D \end{array}$$

et de remarquer que la flèche verticale centrale est un isomorphisme puisque $\mathbf{H}^0(U, \mathcal{C})\{l\}$ est fini ($\mathbf{H}^0(U, \mathcal{C})$ est de type fini par le lemme 4.1). Considérons la troisième flèche verticale : par le théorème de dualité locale (théorème 3.5), le groupe $\mathbf{H}^0(k_v, C)^\wedge$ s'identifie à $\mathbf{H}^1(k_v, \widehat{C})^D$, donc la troisième flèche verticale du diagramme est injective, ce qui assure le résultat. Pour le troisième accouplement, la preuve est similaire : on s'intéresse au diagramme exact suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbf{D}^0(U, \widehat{\mathcal{C}})\{l\} & \longrightarrow & \mathbf{H}^0(U, \widehat{\mathcal{C}})\{l\} & \longrightarrow & \bigoplus_{v \in \Sigma} \mathbf{H}^0(k_v, \widehat{\mathcal{C}})\{l\} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \overline{\mathbf{D}^2(U, \mathcal{C})\{l\}}^D & \longrightarrow & \overline{\mathbf{H}_c^2(U, \mathcal{C})\{l\}}^D & \longrightarrow & \bigoplus_{v \in \Sigma} \mathbf{H}^1(k_v, \mathcal{C})\{l\}^D \end{array}$$

Alors à nouveau la seconde flèche verticale est un isomorphisme grâce au lemme 4.1 ($\mathbf{H}^0(U, \widehat{\mathcal{C}})$ est de type fini), et la troisième flèche verticale est injective (puisque $\mathbf{H}^0(k_v, \widehat{\mathcal{C}})$ s'injecte dans son complété $\mathbf{H}^0(k_v, \widehat{\mathcal{C}})^\wedge$, et ce dernier est isomorphe au dual du groupe de torsion $\mathbf{H}^1(k_v, \mathcal{C})$).

Pour le second accouplement, le diagramme est le suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathbf{D}^1(U, \mathcal{C})\{l\} & \longrightarrow & \mathbf{H}^1(U, \mathcal{C})\{l\} & \longrightarrow & \bigoplus_{v \in \Sigma} \mathbf{H}^1(k_v, \mathcal{C}) \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \mathbf{D}^1(U, \widehat{\mathcal{C}})^D & \longrightarrow & \mathbf{H}_c^1(U, \widehat{\mathcal{C}})^D & \longrightarrow & \bigoplus_{v \in \Sigma} \mathbf{H}^0(k_v, \widehat{\mathcal{C}})^D
\end{array}$$

On sait que la troisième flèche verticale est injective, et que le noyau de la seconde est un sous-groupe divisible. Alors le lemme 4.5 assure que le morphisme $\overline{\mathbf{D}^1(U, \mathcal{C})\{l\}} \rightarrow \overline{\mathbf{D}^1(U, \widehat{\mathcal{C}})^D}$ est injectif. Cela assure la seconde partie du corollaire 4.6, puisque l'argument "dual" est exactement le même : on dispose en effet des résultats de finitude analogues pour \widehat{C} , qui permettent d'adapter la preuve du lemme 4.5 avec les rôles de \mathcal{C} et $\widehat{\mathcal{C}}$ échangés, pour obtenir que le morphisme $\overline{\mathbf{D}^1(U, \widehat{\mathcal{C}})\{l\}} \rightarrow \overline{\mathbf{D}^1(U, \mathcal{C})^D}$ est lui aussi injectif, ce qui conclut la preuve de la dualité parfaite entre $\overline{\mathbf{D}^1(U, \mathcal{C})\{l\}}$ et $\overline{\mathbf{D}^1(U, \widehat{\mathcal{C}})\{l\}}$. \square

Corollaire 4.7. *Avec les notations précédentes, l'accouplement $\mathbf{D}^1(U, \mathcal{C})\{l\} \times \mathbf{D}^1(U, \widehat{\mathcal{C}})\{l\} \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ est une dualité parfaite de groupes finis, fonctorielle en C .*

Démonstration : Il suffit de montrer que les groupes $\mathbf{D}^1(U, \mathcal{C})\{l\}$ et $\mathbf{D}^1(U, \widehat{\mathcal{C}})\{l\}$ sont finis. Pour $\mathbf{D}^1(U, \mathcal{C})\{l\}$, par dévissage, il suffit de montrer que $D^1(U, \mathcal{T}_2)\{l\}$, $H^1(k_v, T_1)$ et $D^2(U, \mathcal{T}_1)$ sont finis. Ces trois points sont connus (voir [Mil06], théorème II.4.6, corollaire I.2.3 et proposition II.4.14). En effet, considérons le diagramme commutatif exact suivant :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
H^1(U, \mathcal{T}_1)\{l\} & \longrightarrow & H^1(U, \mathcal{T}_2)\{l\} & \longrightarrow & \mathbf{H}^1(U, \mathcal{C})\{l\} & \longrightarrow & H^2(U, \mathcal{T}_1)\{l\} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\bigoplus_{v \in \Sigma} H^1(k_v, \mathcal{T}_1)\{l\} & \longrightarrow & \bigoplus_{v \in \Sigma} H^1(k_v, \mathcal{T}_2)\{l\} & \longrightarrow & \bigoplus_{v \in \Sigma} \mathbf{H}^1(k_v, \mathcal{C})\{l\} & \longrightarrow & \bigoplus_{v \in \Sigma} H^2(k_v, \mathcal{T}_1)\{l\}
\end{array}$$

Par finitude de Σ et de $H^1(k_v, T_1)$, le conoyau de la première flèche verticale est fini. Par finitude de $\mathbf{D}^1(U, \mathcal{T}_2)$, le noyau de la seconde est fini également. Enfin, la finitude de $D^2(U, \mathcal{T}_1)\{l\}$ assure la finitude du noyau de la quatrième flèche verticale $H^2(U, \mathcal{T}_1)\{l\} \rightarrow \bigoplus_{v \in \Sigma} H^2(k_v, T_1)\{l\}$. Par conséquent, une application immédiate du lemme du serpent assure que le noyau de la troisième flèche

$$\mathbf{H}^1(U, \mathcal{C})\{l\} \rightarrow \bigoplus_{v \in \Sigma} \mathbf{H}^1(k_v, \mathcal{C})\{l\}$$

est fini, c'est-à-dire que $\mathbf{D}^1(U, \mathcal{C})\{l\}$ est fini.

En ce qui concerne la finitude de $\mathbf{D}^1(U, \widehat{\mathcal{C}})\{l\}$, le raisonnement est exactement le même, en utilisant les finitudes de Σ , $H^1(k_v, \widehat{\mathcal{T}}_2)$, $D^2(U, \widehat{\mathcal{T}}_2)\{l\}$ et $D^1(U, \widehat{\mathcal{T}}_1)\{l\}$. \square

5 Dualité globale : cohomologie galoisienne

L'objectif principal de cette section est de montrer les trois théorèmes de dualité globale en cohomologie galoisienne, à savoir les théorèmes 5.7, 5.14 et 5.12, que l'on utilisera dans la section 6 pour obtenir la suite de Poitou-Tate.

5.1 Généralités

Dans cette section, Σ désigne un ensemble fini de places de k contenant les places archimédiennes. On définit également k_Σ comme étant l'extension maximale de k non ramifiée hors de Σ , et on note $\Gamma_\Sigma := \text{Gal}(k_\Sigma|k)$.

Définition 5.1. Soit C un complexe de tores sur k . On définit pour tout $i \geq 0$,

$$\mathbf{P}^i(k, C) := \prod_{v \in \Omega_k}^{\prime} \mathbf{H}^i(\widehat{k}_v, C)$$

où le produit restreint est pris par rapport aux sous-groupes $\mathbf{H}_{\text{nr}}^i(\widehat{k}_v, C)$, et

$$\mathbb{H}^i(C) = \mathbb{H}^i(k, C) := \text{Ker}(\mathbf{H}^i(k, C) \rightarrow \mathbf{P}^i(k, C))$$

On définit de même $\mathbb{H}^i(\widehat{C})$. Si C est la fibre générique d'un complexe de tores \mathcal{C} sur $U := \text{Spec}(\mathcal{O}_{k, \Sigma})$, alors on note

$$\mathbb{H}_\Sigma^i(C) = \mathbb{H}_\Sigma^i(k, C) := \text{Ker}\left(\mathbf{H}^i(\Gamma_\Sigma, C) \rightarrow \prod_{v \in \Sigma} \mathbf{H}^i(\widehat{k}_v, C)\right)$$

Enfin, on note

$$\mathbb{H}_\wedge^i(C) := \text{Ker}(\mathbf{H}^i(k, C)_\wedge \rightarrow \mathbf{P}^i(k, C)_\wedge)$$

Remarque 5.2. On remarque que le groupe $\mathbf{P}^1(k, C)$ est en fait la somme directe $\mathbf{P}^1(k, C) = \bigoplus_v \mathbf{H}^1(\widehat{k}_v, C)$, puisque pour presque toute place v $H^1(\widehat{\mathcal{O}}_v, \mathcal{T}_2) = H^2(\widehat{\mathcal{O}}_v, \mathcal{T}_1) = 0$.

Proposition 5.3. Soit \mathcal{C} un complexe de tores défini sur U , C sa fibre générique, l inversible sur U .

1. Si U est suffisamment petit, le morphisme canonique $\mathbf{H}^i(U, \mathcal{C})\{l\} \rightarrow \mathbf{H}^i(\Gamma_\Sigma, C)\{l\}$ (resp. $\mathbf{H}^i(U, \widehat{\mathcal{C}})\{l\} \rightarrow \mathbf{H}^i(\Gamma_\Sigma, \widehat{C})\{l\}$) est un isomorphisme, pour tout $i \geq 1$.
2. Si U est suffisamment petit, le morphisme canonique $\mathbf{H}^1(U, \mathcal{C})\{l\} \rightarrow \mathbf{H}^1(k, C)\{l\}$ (resp. $\mathbf{H}^1(U, \widehat{\mathcal{C}})\{l\} \rightarrow \mathbf{H}^1(k, \widehat{C})\{l\}$) est injectif.

Démonstration :

1. Grâce aux corrigenda de [HS05], on connaît le résultat pour les tores sur U assez petit. On utilise alors la suite exacte :

$$H^i(U, \mathcal{T}_1) \rightarrow H^i(U, \mathcal{T}_2) \rightarrow \mathbf{H}^i(U, \mathcal{C}) \rightarrow H^{i+1}(U, \mathcal{T}_1) \rightarrow H^{i+1}(U, \mathcal{T}_2)$$

On sait que $H^j(U, \mathcal{T}_r)\{l\} \cong H^j(\Gamma_\Sigma, T_r)\{l\}$, pour $j \geq 1$ (voir [HS05], proposition 4.1 et corrigenda), d'où le résultat par lemme des cinq.

En ce qui concerne $\widehat{\mathcal{C}}$, le raisonnement est similaire : en effet, $\widehat{\mathcal{T}}_i$ étant localement constant, on a un isomorphisme $H^1(U, \widehat{\mathcal{T}}_i) \cong H^1(\Gamma_\Sigma, \widehat{T}_i)$. De même, par la proposition II.2.9 de [Mil06], on a un isomorphisme $H^2(U, \widehat{\mathcal{T}}_i) \cong H^2(\Gamma_\Sigma, \widehat{T}_i)$, d'où le point 1. par dévissage.

2. Il suffit de montrer que le morphisme naturel $\mathbf{H}^1(\Gamma_\Sigma, C) \rightarrow \mathbf{H}^1(k, C)$ (resp. $\mathbf{H}^1(\Gamma_\Sigma, \widehat{C}) \rightarrow \mathbf{H}^1(k, \widehat{C})$) est injectif. Pour le cas de C , on regarde le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} H^1(\Gamma_\Sigma, T_1) & \longrightarrow & H^1(\Gamma_\Sigma, T_2) & \longrightarrow & \mathbf{H}^1(\Gamma_\Sigma, C) & \longrightarrow & H^2(\Gamma_\Sigma, T_1) & \longrightarrow & H^2(\Gamma_\Sigma, T_2) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^1(k, T_1) & \longrightarrow & H^1(k, T_2) & \longrightarrow & \mathbf{H}^1(k, C) & \longrightarrow & H^2(k, T_1) & \longrightarrow & H^2(k, T_2) \end{array}$$

Écrivons la suite exacte de restriction-inflation relative au quotient Γ_Σ de Γ_k :

$$0 \rightarrow H^1(\Gamma_\Sigma, T_i) \rightarrow H^1(k, T_i) \rightarrow H^1(k_\Sigma, T_i)^{\Gamma_\Sigma} \rightarrow H^2(\Gamma_\Sigma, T_i) \rightarrow H^2(k, T_i)$$

Quitte à augmenter Σ (i.e. quitte à réduire U), on peut supposer que T_i est déployé par k_Σ/k , et donc par Hilbert 90, $H^1(k_\Sigma, T_i) = 0$. On en déduit donc que les deux premières flèches verticales du diagramme sont des isomorphismes, et que les deux dernières sont injectives. Une chasse au diagramme assure alors que la flèche verticale centrale est injective.

En ce qui concerne \widehat{C} , si k_Σ déploie T_1 et T_2 , on a des isomorphisme $H^1(\Gamma_\Sigma, \widehat{T}_i) \xrightarrow{\cong} H^1(k, \widehat{T}_i)$ et des morphismes injectifs $H^2(\Gamma_\Sigma, \widehat{T}_i) \rightarrow H^2(k, \widehat{T}_i)$ grâce à la suite exacte de restriction inflation pour les \widehat{T}_i . Par dévissage, cela implique bien l'injectivité de $\mathbf{H}^1(\Gamma_\Sigma, \widehat{C}) \rightarrow \mathbf{H}^1(k, \widehat{C})$ pour Σ suffisamment gros. Cela conclut la preuve du point 2. \square

Corollaire 5.4. *Soit \mathcal{C} un complexe de tores défini sur U , C sa fibre générique, l inversible sur U . On a une dualité parfaite fonctorielle de groupes finis $\mathbf{III}_\Sigma^1(C)\{l\} \times \mathbf{III}_\Sigma^1(\widehat{C})\{l\} \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$.*

Démonstration : C'est une application directe du corollaire 4.7, en utilisant le point 1 de la proposition 5.3. \square

5.2 Dualité entre $\mathbf{III}^1(C)$ et $\mathbf{III}^1(\widehat{C})$

On va montrer dans cette section qu'il existe une dualité parfaite de groupes finis entre $\mathbf{III}^1(C)$ et $\mathbf{III}^1(\widehat{C})$. On conserve les notations de la section précédente : on fixe un nombre premier l , et on choisit un ouvert $U = \text{Spec}(\mathcal{O}_{k,\Sigma})$ suffisamment petit pour que l soit inversible sur U et C s'étende en un complexe de tores sur U .

Lemme 5.5. *Avec les notations précédentes, le groupe $\mathbf{D}^1(U, \mathcal{C})\{l\}$, vu comme sous-groupe de $\mathbf{H}^1(k, C)$, est contenu dans $\mathbf{III}^1(C)\{l\}$.*

Démonstration : La trivialité des groupes $H^1(\mathcal{O}_v, T_i)$ et $H^2(\mathcal{O}_v, T_i)$ pour $v \notin S$ assure le résultat ($i = 1$ ou 2). La première est une conséquence du théorème de Lang, et la seconde provient de l'isomorphisme $H^2(\mathcal{O}_v, T_i) \cong H^2(\mathbf{F}_v, T_i \times_{\mathcal{O}_v} \mathbf{F}_v)$, le second groupe étant trivial car \mathbf{F}_v est de dimension cohomologique 1 et $T_i(\overline{\mathbf{F}_v})$ est de torsion. \square

Lemme 5.6. *Pour un ouvert U suffisamment petit, le groupe $\mathbf{D}^1(U, \widehat{\mathcal{C}})\{l\}$, vu comme sous-groupe de $\mathbf{H}^1(k, \widehat{C})$, est contenu dans $\mathbf{III}^1(\widehat{C})\{l\}$.*

Démonstration : C'est la même idée que la preuve du lemme 4.7 de [HS05]. En effet, on a l'inclusion suivante :

$$\bigcap_{V \subset U} \mathbf{D}^1(V, \widehat{\mathcal{C}})\{l\} \subseteq \mathbf{III}^1(\widehat{C})\{l\}$$

Or les groupes $\mathbf{D}^1(V, \widehat{\mathcal{C}})\{l\}$ sont finis, donc on peut se limiter à une intersection finie, i.e. à un nombre fini d'ouverts $V_i \subset U$. On considère alors un ouvert U' contenu dans l'intersection des V_i , et la functorialité covariante de la cohomologie à support compact assure alors que l'on a une inclusion $\mathbf{D}^1(U', \widehat{\mathcal{C}})\{l\} \subset \mathbf{III}^1(\widehat{C})\{l\}$, ce qui prouve le lemme. \square

Théorème 5.7. *Soit C un complexe de tores sur k . Il existe une dualité parfaite de groupes finis, fonctorielle en C :*

$$\mathbb{H}^1(C) \times \mathbb{H}^1(\widehat{C}) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

Remarque 5.8. Ce théorème est équivalent à la proposition 4.2 de [Bor99], dont la preuve est due à Kottwitz. Par ailleurs, Borovoi a donné une autre preuve de ce résultat récemment (voir [Bor09]), par dévissage au cas des groupes de type multiplicatif, à partir du théorème I.4.12.(a) de [Mil06].

Démonstration : Soit l un nombre premier. Il existe un ouvert U de $\text{Spec } \mathcal{O}_k$ tel que C s'étend en un complexe de tores sur U et l est inversible sur U . On peut réduire U de sorte à être dans les conditions précédentes. Alors l'inclusion $\mathbf{D}^1(U, \mathcal{E})\{l\} \subset \mathbb{H}^1(C)\{l\}$ est en fait une égalité, puisque un élément $\alpha \in \mathbb{H}^1(C)\{l\}$ s'étend en un élément de $\mathbf{D}^1(V, \mathcal{E})\{l\}$, avec $V \subset U$, et donc $\mathbf{D}^1(V, \mathcal{E})\{l\} \subset \mathbf{D}^1(U, \mathcal{E})\{l\}$. De la même façon, grâce aux résultats précédents, on a également une égalité $\mathbf{D}^1(U, \widehat{\mathcal{E}})\{l\} = \mathbb{H}^1(\widehat{C})\{l\}$. Ces deux égalités permettent bien de définir l'accouplement, et son exactitude découle du corollaire 4.7. Pour la finitude des groupes $\mathbb{H}^1(C)$ et $\mathbb{H}^1(\widehat{C})$, c'est également une conséquence du corollaire 4.7, en remarquant que la preuve de ce corollaire montre en fait que les éléments de $\mathbf{D}^1(U, \mathcal{E})$ dont la torsion est inversible sur U sont en nombre fini. \square

5.3 Dualité entre $\mathbb{H}^2(C)$ et $\mathbb{H}^0(\widehat{C})$

Dans cette section, on montre que les groupes $\mathbb{H}^2(C)$ et $\mathbb{H}^0(\widehat{C})$ sont finis et duaux l'un de l'autre.

Lemme 5.9. *Soit C un complexe de tores sur k . Alors $\mathbb{H}^0(\widehat{C})$ est fini.*

Démonstration :

- On suppose d'abord que T_2 est déployé sur k : alors Γ_k agit trivialement sur \widehat{T}_2 , et on considère le diagramme commutatif suivant, pour une place v quelconque :

$$\begin{array}{ccccccc} H^0(k, \widehat{T}_2) & \longrightarrow & H^0(k, \widehat{T}_1) & \longrightarrow & \mathbf{H}^0(k, \widehat{C}) & \longrightarrow & H^1(k, \widehat{T}_2) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^0(\widehat{k}_v, \widehat{T}_2) & \longrightarrow & H^0(\widehat{k}_v, \widehat{T}_1) & \longrightarrow & \mathbf{H}^0(\widehat{k}_v, \widehat{C}) & \longrightarrow & H^1(\widehat{k}_v, \widehat{T}_2) \end{array}$$

La deuxième flèche verticale est injective, le groupe $H^1(k, \widehat{T}_2)$ est fini, et enfin la flèche verticale de gauche est un isomorphisme, ce qui assure le résultat dans ce cas.

- Cas général : on ne suppose plus T_2 déployé sur k . Il existe une extension galoisienne finie L/k qui déploie T_2 . Par le cas précédent, on sait que $\mathbb{H}^0(L, \widehat{C})$ est fini. Par un argument de restriction-corestriction, le groupe $\mathbb{H}^0(k, \widehat{C})$ est donc de torsion. Or ce groupe est de type fini, puisque $\mathbf{H}^0(k, \widehat{C})$ l'est, donc $\mathbb{H}^0(k, \widehat{C})$ est fini, ce qui conclut la preuve. \square

Notons désormais $\mathbb{H}_\wedge^0(\widehat{C})$ le noyau du morphisme $\mathbf{H}^0(k, \widehat{C})_\wedge \rightarrow \mathbf{P}^0(k, \widehat{C})_\wedge$.

Proposition 5.10. *Il existe une dualité parfaite et fonctorielle*

$$\mathbb{H}^2(C) \times \mathbb{H}_\wedge^0(\widehat{C}) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

Démonstration : On montre ce résultat en étapes : on se donne n inversible sur U .

- Par dévissage, on montre facilement que le morphisme $\mathbf{H}^0(U, \widehat{\mathcal{C}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \rightarrow \mathbf{H}^0(k, \widehat{\mathcal{C}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$ est injectif. En effet, on a un diagramme commutatif exact de la forme

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & H^1(U, T_{\mathbf{Z}/n}(\widehat{\mathcal{C}})) & \longrightarrow & \mathbf{H}^0(U, \widehat{\mathcal{C}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) & \longrightarrow & H^0(U, \widehat{n\text{Ker } \rho}) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H^1(k, T_{\mathbf{Z}/n}(\widehat{C})) & \longrightarrow & \mathbf{H}^0(k, \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) & \longrightarrow & H^0(k, \widehat{n\text{Ker } \rho}) \end{array}$$

Or par finitude de $T_{\mathbf{Z}/n}(\widehat{\mathcal{C}})$ et $n\text{Ker } \rho$, les première et dernière flèches verticales sont injectives, donc la flèche centrale également.

- On montre ensuite que pour tout place v de U , $\mathbf{H}^1(\mathcal{O}_v, \mathcal{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) = 0$. En effet, ce groupe s'intègre dans la suite exacte suivante :

$$H^3(\mathcal{O}_v, n\text{Ker } \rho) \rightarrow \mathbf{H}^1(\mathcal{O}_v, \mathcal{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \rightarrow H^2(\mathcal{O}_v, T_{\mathbf{Z}/n}(\mathcal{C}))$$

Or les deux groupes extrêmes dans cette suite sont nuls par dimension cohomologique, donc le groupe central est nul.

- La proposition 4.2 et un dévissage à partir de la dualité locale pour les modules finis assurent que l'on a une dualité parfaite entre les groupes $\mathbf{D}^1(U, \mathcal{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$ et $\mathbf{D}^0(U, \widehat{\mathcal{C}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$.
- On fixe alors un nombre premier l et on prend un ouvert U suffisamment petit pour que l soit inversible sur U et pour que le complexe de tores s'étende sur U . Par le premier point, on sait que le groupe $\mathbb{H}^0(\widehat{C} \otimes \mathbf{Z}/l^m)$ contient l'intersection des groupes $\mathbf{D}^0(V, \widehat{\mathcal{C}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^m)$ (V décrivant les ouverts non vides de U) dans $\mathbf{H}^0(k, \widehat{\mathcal{C}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^m)$. Or chacun des groupes $\mathbf{D}^0(V, \widehat{\mathcal{C}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^m)$ étant finis, on peut se limiter à une intersection sur un nombre fini d'ouverts V , et en prenant leur intersections, on déduit par functorialité covariant de la cohomologie à support compact l'égalité $\mathbf{D}^0(V, \widehat{\mathcal{C}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^m) \cong \mathbb{H}^0(\widehat{C} \otimes \mathbf{Z}/l^m)$ pour tout ouvert V de U contenu dans un certain ouvert U_0 (voir par exemple [HS05], preuves du lemme 4.7 et de la proposition 4.12).

Le second point assure que pour une immersion ouverte $V \rightarrow U$, le morphisme naturel $\mathbf{H}^1(U, \mathcal{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^m) \rightarrow \mathbf{H}^1(V, \mathcal{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^m)$ envoie le sous-groupe $\mathbf{D}^1(U, \mathcal{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^m)$ dans $\mathbf{D}^1(V, \mathcal{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^m)$. On en déduit donc un morphisme naturel $\varinjlim_V \mathbf{D}^1(V, \mathcal{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^m) \rightarrow \mathbb{H}^1(C \otimes \mathbf{Z}/l^m)$, qui est surjectif par functorialité covariante de la cohomologie à support compact (voir [HS05], preuve de la proposition 4.12). Et ce morphisme est injectif car le morphisme $\varinjlim_V \mathbf{H}^1(V, \mathcal{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^m) \rightarrow \mathbf{H}^1(C \otimes \mathbf{Z}/l^m)$ l'est.

Finalement, on a donc des isomorphismes naturels

$$\mathbb{H}^1(C \otimes \mathbf{Z}/l^m) \cong \varinjlim_V \mathbf{D}^1(V, \mathcal{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^m)$$

et

$$\mathbb{H}^0(\widehat{C} \otimes \mathbf{Z}/l^m) \cong \varprojlim_V \mathbf{D}^0(V, \widehat{\mathcal{C}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^m)$$

- On combine alors les points 3 et 4 pour en déduire que l'on a une dualité parfaite entre les groupes $\mathbb{H}^1(C \otimes \mathbf{Z}/l^m)$ et $\mathbb{H}^0(\widehat{C} \otimes \mathbf{Z}/l^m)$. Ceci étant valable pour tout nombre premier l , on en déduit une dualité parfaite entre les groupes $\varinjlim_n \mathbb{H}^1(C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$ et $\varprojlim_n \mathbb{H}^0(\widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$. On identifie alors les groupes $\mathbb{H}^0_{\wedge}(\widehat{C}) \cong \varprojlim_n \mathbb{H}^0(\widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$ en passant à la limite projective

dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbf{H}^0(k, \widehat{C})/n & \longrightarrow & \mathbf{H}^0(k, \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) & \longrightarrow & {}_n\mathbf{H}^1(k, \widehat{C}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathbf{P}^0(k, \widehat{C})/n & \longrightarrow & \mathbf{P}^0(k, \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) & \longrightarrow & {}_n\mathbf{P}^1(k, \widehat{C}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

et en utilisant la finitude du groupe $\mathbb{H}^1(\widehat{C})$. De même, on identifie les groupes $\mathbb{H}^2(C) \cong \varinjlim_n \mathbb{H}^1(C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$, en passant à la limite inductive dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbf{H}^1(k, C)/n & \longrightarrow & \mathbf{H}^1(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) & \longrightarrow & {}_n\mathbf{H}^2(k, C) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathbf{P}^1(k, C)/n & \longrightarrow & \mathbf{P}^1(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) & \longrightarrow & {}_n\mathbf{P}^2(k, C) \longrightarrow 0 \end{array}$$

qui permet d'identifier $\varinjlim_n \mathbf{H}^1(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \cong \mathbf{H}^2(k, C)$ et $\varinjlim_n \mathbf{P}^1(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \cong \mathbf{P}^2(k, C)$ puisque les groupes $\mathbf{H}^1(k, C)$, $\mathbf{P}^1(k, C)$, $\mathbf{H}^2(k, C)$ et $\mathbf{P}^2(k, C)$ sont de torsion, et on conclut grâce à l'exactitude du foncteur \varinjlim qui permet d'identifier $\varinjlim_n \mathbb{H}^1(C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$ au noyau de $\varinjlim_n \mathbf{H}^1(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \rightarrow \varinjlim_n \mathbf{P}^1(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$. \square

Proposition 5.11.

$$\mathbb{H}_\wedge^0(\widehat{C}) \cong \text{Ker}(\mathbf{H}^0(k, \widehat{C})^\wedge \xrightarrow{\beta^0} \mathbf{P}^0(k, \widehat{C})^\wedge)$$

Démonstration : $\mathbf{H}^0(k, \widehat{C})$ est discret de type fini, donc le morphisme $\mathbf{H}^0(k, \widehat{C})_\wedge \rightarrow \mathbf{H}^0(k, \widehat{C})^\wedge$ est un isomorphisme. De plus, pour tout n , et pour toute place v ne divisant pas n , le morphisme $\mathbf{H}^0(\mathcal{O}_v, \widehat{\mathcal{C}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \rightarrow \mathbf{H}^0(k_v, \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$ est injectif (car les morphismes $H^0(\mathcal{O}_v, \widehat{\text{Ker}} \rho) \rightarrow H^0(k_v, \widehat{\text{Ker}} \rho)$ et $H^1(\mathcal{O}_v, T_{\mathbf{Z}/n}(\widehat{\mathcal{C}})) \rightarrow H^1(k_v, T_{\mathbf{Z}/n}(\widehat{C}))$ le sont). Donc pour tout n le morphisme $\mathbf{P}^0(k, \widehat{C})/n \rightarrow \prod_v (\mathbf{H}^0(k_v, \widehat{C})/n)$ est injectif, ce qui implique que le morphisme $\mathbf{P}^0(k, \widehat{C})_\wedge \rightarrow \mathbf{P}^0(k, \widehat{C})^\wedge$ est injectif (voir preuve de la proposition 5.4 dans [HS05]). On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{H}^0(k, \widehat{C})_\wedge & \xrightarrow{=} & \mathbf{H}^0(k, \widehat{C})^\wedge \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{P}^0(k, \widehat{C})_\wedge & \longrightarrow & \mathbf{P}^0(k, \widehat{C})^\wedge \end{array}$$

où la flèche horizontale inférieure est injective, ce qui permet bien de montrer que les noyaux des deux flèches verticales sont les mêmes. \square

Théorème 5.12. *On suppose $\text{Ker } \rho$ fini. Alors il existe une dualité parfaite de groupes finis, fonctorielle en C :*

$$\mathbb{H}^2(C) \times \mathbb{H}^0(\widehat{C}) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

Démonstration : On sait que $\mathbf{H}^0(k, \widehat{C})$ est un groupe discret de type fini, donc $\mathbf{H}^0(k, \widehat{C}) \rightarrow \mathbf{H}^0(k, \widehat{C})^\wedge$ est injective. Donc on a une suite exacte (puisque $\text{III}^0(\widehat{C})$ est un sous-groupe fermé de $\mathbf{H}^0(k, \widehat{C})$) :

$$0 \rightarrow \text{III}^0(\widehat{C})^\wedge \rightarrow \mathbf{H}^0(k, \widehat{C})^\wedge \rightarrow \text{Im}(\theta)^\wedge \quad (2)$$

où θ est le morphisme $\mathbf{H}^0(k, \widehat{C}) \rightarrow \mathbf{P}^0(k, \widehat{C})$, et $\text{Im}(\theta)$ est muni de la topologie quotient de $\mathbf{H}^0(k, \widehat{C})$, c'est-à-dire de la topologie discrète. On considère alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P}^0(k, \widehat{C}) & \longrightarrow & \mathbf{P}^0(k, \widehat{C})_\wedge \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod_v \mathbf{H}^0(k_v, \widehat{C}) & \longrightarrow & \prod_v \mathbf{H}^0(k_v, \widehat{C})_\wedge \end{array}$$

La première flèche verticale est injective, ainsi que la flèche horizontale inférieure ($\mathbf{H}^0(k_v, \widehat{C})$ est de type fini), donc la flèche horizontale supérieure est injective. Donc le morphisme $\mathbf{P}^0(k, \widehat{C}) \rightarrow \mathbf{P}^0(k, \widehat{C})^\wedge$ est injectif. En particulier $\text{Im}(\theta)$ s'injecte dans $\mathbf{P}^0(k, \widehat{C})^\wedge$. On montre alors le lemme suivant :

Lemme 5.13. *On suppose $\text{Ker } \rho$ fini. Alors on a une suite exacte naturelle*

$$\mathbf{H}^0(k, \widehat{C}) \xrightarrow{\theta} \mathbf{P}^0(k, \widehat{C}) \rightarrow \mathbf{H}^1(k, C)^D$$

Démonstration : Tout d'abord, sous l'hypothèse de finitude de $\text{Ker } \rho$, il est clair par dévissage (groupe fini et tore) que $\text{III}^2(C)$ est fini. On considère le complexe

$$\varinjlim_n \mathbf{H}^{-1}(k, \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \rightarrow \varinjlim_n \mathbf{P}^{-1}(k, \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \rightarrow \varinjlim_n \mathbf{H}^1(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)^D$$

Celui-ci est exact en utilisant le triangle exact suivant

$$T_{\mathbf{Z}/n}(\widehat{C})[1] \rightarrow \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n \rightarrow {}_n\widehat{\text{Ker } \rho} \rightarrow T_{\mathbf{Z}/n}(\widehat{C})[2]$$

et la suite exacte de Poitou-Tate pour le module fini $T_{\mathbf{Z}/n}(\widehat{C})$, puis en passant à la limite inductive. On considère alors le diagramme commutatif à lignes exactes suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \varinjlim_n \mathbf{H}^{-1}(k, \widehat{C})/n & \longrightarrow & \varinjlim_n \mathbf{H}^{-1}(k, \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) & \longrightarrow & \mathbf{H}^0(k, \widehat{C})_{\text{tors}} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \varinjlim_n \mathbf{P}^{-1}(k, \widehat{C})/n & \longrightarrow & \varinjlim_n \mathbf{P}^{-1}(k, \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) & \longrightarrow & \mathbf{P}^0(k, \widehat{C})_{\text{tors}} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \varinjlim_n (\mathbf{H}^0(k, C)^D)/n & \longrightarrow & \varinjlim_n \mathbf{H}^1(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)^D & \longrightarrow & (\mathbf{H}^1(k, C)^D)_{\text{tors}} \longrightarrow 0 \end{array}$$

dont on a montré que la colonne centrale était exacte. On conclut alors que la troisième colonne est exacte par surjectivité du morphisme

$$\varinjlim_n \mathbf{P}^{-1}(k, \widehat{C})/n \rightarrow \varinjlim_n (\mathbf{H}^0(k, C)^D)/n$$

dont le conoyau est $\text{III}^2(C) \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z} = 0$ puisque $\text{III}^2(C)$ est fini. \square

Ce lemme assure donc que $\text{Im}(\theta)$ est un sous-groupe fermé de $\mathbf{P}^0(k, \widehat{C})$, donc les arguments précédents impliquent que le morphisme $\text{Im}(\theta)^\wedge \rightarrow \mathbf{P}^0(k, \widehat{C})^\wedge$ est injectif. En revenant alors à la suite exacte (2), $\mathbb{H}^0(\widehat{C})^\wedge$ s'identifie au noyau $\text{Ker}(\mathbf{H}^0(k, \widehat{C})^\wedge \xrightarrow{\beta^0} \mathbf{P}^0(k, \widehat{C})^\wedge)$, et donc aussi à $\mathbb{H}_\wedge^0(\widehat{C})$ par la proposition 5.11. On utilise alors la finitude de $\mathbb{H}^0(\widehat{C})$ (lemme 5.9) et le résultat de dualité globale (proposition 5.10) pour conclure. \square

5.4 Dualité entre $\mathbb{H}_\wedge^0(C)$ et $\mathbb{H}^2(\widehat{C})$

Dans cette partie, les résultats de dualité ne seront pas valables en général, mais seulement pour certains complexes de tores particuliers. On est amené à imposer deux types de conditions sur $C = [T_1 \xrightarrow{\rho} T_2]$:

1. $\text{Ker } \rho$ est fini. Cette hypothèse sera vérifiée dans le cadre de la cohomologie abélianisée des groupes réductifs. On voit facilement que la condition de finitude de $\text{Ker } \rho$ est équivalente à la condition $\varprojlim_n (\text{Ker } \rho) = 0$.
2. ρ est surjective. Cette hypothèse implique que C est quasi-isomorphe à un objet $M[1]$, où $M := \text{Ker } \rho$ est un k -groupe de type multiplicatif. Réciproquement, tout k -groupe de type multiplicatif peut s'écrire comme le noyau d'un morphisme de tores surjectif. Par ailleurs, on constate facilement que la condition de surjectivité de ρ équivaut à la condition $\varinjlim_n T_{\mathbf{Z}/n}(C) = 0$.

5.4.1 Cas où $\text{Ker}(\rho)$ est fini

Dans cette section, sous l'hypothèse de finitude de $\text{Ker}(\rho)$, on montre l'existence d'une dualité parfaite entre les groupes $\mathbb{H}_\wedge^0(C)$ et $\mathbb{H}^2(\widehat{C})$, puis on identifie $\mathbb{H}_\wedge^0(C)$ avec le noyau de $\mathbf{H}^0(k, C)^\wedge \rightarrow \mathbf{P}^0(k, C)^\wedge$.

Théorème 5.14. *Supposons que $\text{Ker}(\rho)$ est fini. Alors il existe une dualité parfaite de groupes finis, fonctorielle en C :*

$$\mathbb{H}_\wedge^0(C) \times \mathbb{H}^2(\widehat{C}) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

Démonstration : On commence par montrer la finitude du groupe $\mathbb{H}^2(\widehat{C})$. Pour cela, on remarque que l'on a un triangle exact

$$M[1] \rightarrow C \rightarrow T \rightarrow M[2]$$

où $M := \text{Ker } \rho$ est un k -groupe de type multiplicatif et $T := \text{Coker } \rho$ un k -tore. On obtient alors un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} H^3(k, \widehat{T}) & \longrightarrow & \mathbf{H}^2(k, \widehat{C}) & \longrightarrow & H^2(k, \widehat{M}) & \longrightarrow & H^4(k, \widehat{T}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ P^3(k, \widehat{T}) & \longrightarrow & \mathbf{P}^2(k, \widehat{C}) & \longrightarrow & P^2(k, \widehat{M}) & \longrightarrow & P^4(k, \widehat{T}) \end{array}$$

On sait que les première et dernière flèches verticales sont des isomorphismes de groupes finis. La finitude de $\mathbb{H}^2(\widehat{C})$ résulte alors de la finitude de $\mathbb{H}^2(\widehat{M})$ (voir théorème 8.6.7 de [NSW08] ou théorème 5.23) et du lemme du serpent appliqué au diagramme précédent.

Poursuivons alors la preuve du théorème 5.14 avec le lemme suivant :

Lemme 5.15. *Pour tout $n > 0$, le morphisme $\mathbf{P}^0(C)/n \rightarrow \prod_v \mathbf{H}^0(\widehat{k}_v, C)/n$ est injectif, d'image le produit restreint des $\mathbf{H}^0(\widehat{k}_v, C)/n$ par rapport aux $\mathbf{H}_{\text{nr}}^0(\widehat{k}_v, C)/n$.*

Démonstration : Il suffit de montrer que, pour presque toute place v , dans le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{H}^0(\widehat{\mathcal{O}}_v, C) & \xrightarrow{n} & \mathbf{H}^0(\widehat{\mathcal{O}}_v, C) & \longrightarrow & \mathbf{H}^0(\widehat{\mathcal{O}}_v, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{H}^0(\widehat{k}_v, C) & \xrightarrow{n} & \mathbf{H}^0(\widehat{k}_v, C) & \longrightarrow & \mathbf{H}^0(\widehat{k}_v, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \end{array}$$

la troisième flèche verticale est injective. Pour ce faire, on utilise la décomposition de $C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n$ déjà utilisée plus haut : on a un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccc} H^2(\widehat{\mathcal{O}}_{v,n}(\text{Ker}\rho)) & \longrightarrow & \mathbf{H}^0(\widehat{\mathcal{O}}_v, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) & \longrightarrow & H^1(\widehat{\mathcal{O}}_v, T_{\mathbf{Z}/n}(C)) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^2(\widehat{k}_{v,n}(\text{Ker}\rho)) & \longrightarrow & \mathbf{H}^0(\widehat{k}_v, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) & \longrightarrow & H^1(\widehat{k}_v, T_{\mathbf{Z}/n}(C)) \end{array}$$

On suppose que v ne divise pas n . Alors $H^2(\widehat{\mathcal{O}}_{v,n}(\text{Ker}\rho)) = 0$ (puisque $H^2(\widehat{\mathcal{O}}_{v,n}(\text{Ker}\rho)) \cong H^2(\mathbf{F}_{v,n}(\text{Ker}\rho))$ car v ne divise pas n , et \mathbf{F}_v est de dimension cohomologique 1), et la troisième flèche verticale est injective, puisque le groupe $H_v^1(\widehat{\mathcal{O}}_v, T_{\mathbf{Z}/n}(C))$ est le dual de $H^2(\widehat{\mathcal{O}}_v, \widehat{T_{\mathbf{Z}/n}(C)})$ qui est nul par dimension cohomologique. Cela assure bien l'injectivité de la seconde flèche verticale pour presque toute place v , et donc le lemme. \square

Poursuivons la preuve du théorème 5.14. Pour toute place v , la suite suivante

$$0 \rightarrow \mathbf{H}^0(\widehat{k}_v, C)/n \rightarrow \mathbf{H}^0(\widehat{k}_v, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \rightarrow {}_n\mathbf{H}^1(\widehat{k}_v, C) \rightarrow 0$$

est exacte. De même, pour toute place $v \notin \Sigma$, la suite

$$0 \rightarrow \mathbf{H}^0(\widehat{\mathcal{O}}_v, \mathcal{C})/n \rightarrow \mathbf{H}^0(\widehat{\mathcal{O}}_v, \mathcal{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \rightarrow {}_n\mathbf{H}^1(\widehat{\mathcal{O}}_v, \mathcal{C}) \rightarrow 0$$

est exacte. Considérons alors le complexe suivant :

$$\mathbf{P}^0(k, C)/n \rightarrow \mathbf{P}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \rightarrow {}_n\mathbf{P}^1(k, C)$$

L'exactitude des deux suites précédentes assure la surjectivité de la seconde flèche. La première partie du lemme 5.15 assure que la première flèche est injective, et enfin la seconde partie du lemme 5.15 assure l'exactitude du complexe précédent en $\mathbf{P}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$. Par conséquent, on dispose d'un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbf{H}^0(k, C)/n & \longrightarrow & \mathbf{H}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) & \longrightarrow & {}_n\mathbf{H}^1(k, C) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathbf{P}^0(k, C)/n & \longrightarrow & \mathbf{P}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) & \longrightarrow & {}_n\mathbf{P}^1(k, C) \longrightarrow 0 \end{array} \quad (3)$$

On passe alors à la limite projective sur n : on obtient

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbf{H}^0(k, C)_{\wedge} & \longrightarrow & \varprojlim_n \mathbf{H}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) & \longrightarrow & Q_1 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \theta_0 & & \downarrow \theta & & \downarrow \beta \\ 0 & \longrightarrow & \mathbf{P}^0(k, C)_{\wedge} & \longrightarrow & \varprojlim_n \mathbf{P}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) & \longrightarrow & Q_2 \longrightarrow 0 \end{array} \quad (4)$$

Or Q_1 est un sous-groupe du module de Tate $T(\mathbf{H}^1(k, C))$, et donc $\text{Ker } \beta$ est contenu dans $T(\mathbb{H}^1(C))$. Or $\mathbb{H}^1(C)$ est fini (voir théorème 5.7), donc β est injective. Donc $\mathbb{H}_\lambda^0(C) = \text{Ker } \theta_0$ est isomorphe à $\text{Ker } \theta$.

Proposition 5.16. *Supposons que $\text{Ker}(\rho)$ est fini. Alors il existe une dualité parfaite*

$$\text{Ker } \theta \times \mathbb{H}^1 \left(\varprojlim_n \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n \right) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

Démonstration : On fait l'hypothèse que $\text{Ker}(\rho)$ est fini. On fixe un nombre premier l , et U un ouvert sur lequel C s'étend, et de sorte que l soit inversible sur U .

Lemme 5.17. *On a une dualité parfaite fonctorielle en C : $\varprojlim_n \mathbf{D}^0(U, \mathcal{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n) \times \mathbf{D}^1(U, \varinjlim_n \widehat{\mathcal{C}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$.*

Démonstration : En effet, on dispose du diagramme suivant à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccc} 0 \longrightarrow & \varprojlim_n \mathbf{D}^0(U, \mathcal{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n) & \longrightarrow & \varprojlim_n \mathbf{H}^0(U, \mathcal{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n) & \longrightarrow & \varprojlim_n (\bigoplus_{v \in \Sigma} \mathbf{H}^0(k_v, \mathcal{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n)) \\ & \downarrow & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ 0 \longrightarrow & \mathbf{D}^1(U, \varinjlim_n \widehat{\mathcal{C}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n)^D & \longrightarrow & (\varinjlim_n \mathbf{H}_c^1(U, \widehat{\mathcal{C}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n))^D & \longrightarrow & (\varinjlim_n \bigoplus_{v \in \Sigma} \mathbf{H}^0(k_v, \widehat{\mathcal{C}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n))^D \end{array}$$

l'isomorphisme de la colonne centrale provient de la dualité globale en cohomologie étale (proposition 4.2). Concernant la troisième flèche verticale, on va montrer que c'est un isomorphisme. Pour cela, on considère une place v de Σ , et on s'intéresse au diagramme suivant, à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} H^0(k_v, T_{\mathbf{Z}/n}(C)) & \longrightarrow & H^2(k_v, {}_n\text{Ker } \rho) & \longrightarrow & \mathbf{H}^0(k_v, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) & \longrightarrow & H^1(k_v, T_{\mathbf{Z}/n}(C)) & \longrightarrow & H^3(k_v, {}_n\text{Ker } \rho) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^2(k_v, T_{\mathbf{Z}/n}(\widehat{C}))^D & \longrightarrow & H^0(k_v, {}_n\widehat{\text{Ker } \rho})^D & \longrightarrow & \mathbf{H}^0(k_v, \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)^D & \longrightarrow & H^1(k_v, T_{\mathbf{Z}/n}(\widehat{C}))^D & \longrightarrow & H^{-1}(k_v, {}_n\widehat{\text{Ker } \rho}) \end{array}$$

Alors par le théorème de dualité locale pour un module fini sur un corps hensélien (théorème I.2.14.(c) et théorème I.2.13.(a) de [Mil06]), les deux premières flèches verticales et les deux dernières sont des isomorphismes, donc la flèche centrale également. Par conséquent, en revenant au premier diagramme, on a bien la dualité annoncée. \square

Lemme 5.18. *Le morphisme canonique $\varprojlim_n \mathbf{H}^0(U, \mathcal{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n) \rightarrow \varprojlim_n \mathbf{H}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n)$ est injectif.*

Démonstration : La finitude de $\text{Ker}(\rho)$ assure que $\varprojlim_n H^2(U, {}_n\text{Ker}(\rho)) = 0$. Par conséquent, un dévissage assure que les lignes du diagramme suivant sont exactes (les groupes étant finis, on peut passer à la limite projective) :

$$\begin{array}{ccc} 0 \longrightarrow & \varprojlim_n \mathbf{H}^0(U, \mathcal{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n) & \longrightarrow & \varprojlim_n H^1(U, T_{\mathbf{Z}/l^n}(\mathcal{C})) \\ & \downarrow & & \downarrow \\ & \varprojlim_n \mathbf{H}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n) & \longrightarrow & \varprojlim_n H^1(k, T_{\mathbf{Z}/l^n}(C)) \end{array}$$

Or la dernière flèche verticale est injective (voir [Mil06], II.2.9), donc ce diagramme assure le résultat. \square

Lemme 5.19. *Pour toute place v de k hors de Σ , $\varprojlim_n \mathbf{H}^1(\mathcal{O}_v, \widehat{\mathcal{E}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n) = 0$.*

Démonstration : On écrit la suite exacte de cohomologie sur \mathcal{O}_v :

$$H^2(\mathcal{O}_v, T_{\mathbf{Z}/l^n}(\widehat{C})) \rightarrow \mathbf{H}^1(\mathcal{O}_v, \widehat{C} \otimes \mathbf{Z}/l^n) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_v, {}_l^n \widehat{\text{Ker}}(\rho)) \rightarrow H^3(\mathcal{O}_v, T_{\mathbf{Z}/l^n}(\widehat{C}))$$

Or par dimension cohomologique, les groupes $H^i(\mathcal{O}_v, T_{\mathbf{Z}/l^n}(\widehat{C}))$ sont nuls pour $i \geq 2$, d'où un isomorphisme

$$\mathbf{H}^1(\mathcal{O}_v, \widehat{C} \otimes \mathbf{Z}/l^n) \cong H^1(\mathcal{O}_v, {}_l^n \widehat{\text{Ker}}(\rho))$$

On prend la limite inductive, et on remarque que la finitude de $\text{Ker}(\rho)$ implique la nullité de $\varinjlim_n {}_l^n \widehat{\text{Ker}}(\rho)$, d'où $\varinjlim_n \mathbf{H}^1(\mathcal{O}_v, \widehat{C} \otimes \mathbf{Z}/l^n) = 0$. \square

L'objectif est désormais de passer à la limite sur V dans le lemme 5.17 pour en déduire la proposition 5.16. Avant de passer à la limite, définissons les morphismes de transition : si $V \rightarrow U$ est une immersion ouverte, la functorialité covariante de la cohomologie à support compact induit un morphisme canonique $\varprojlim_n \mathbf{D}^0(V, \mathcal{E} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n) \rightarrow \varprojlim_n \mathbf{D}^0(U, \mathcal{E} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n)$. En ce qui concerne $\widehat{\mathcal{E}}$, on considère le morphisme naturel $\varinjlim_n \mathbf{H}^1(U, \widehat{\mathcal{E}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n) \rightarrow \varinjlim_n \mathbf{H}^1(V, \widehat{\mathcal{E}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n)$, et grâce au lemme 5.19, le sous-groupe $\mathbf{D}^1(U, \varinjlim_n \widehat{\mathcal{E}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n)$ de $\varinjlim_n \mathbf{H}^1(U, \widehat{\mathcal{E}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n)$ s'envoie dans $\mathbf{D}^1(V, \varinjlim_n \widehat{\mathcal{E}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n)$, d'où un morphisme canonique $\mathbf{D}^1(U, \varinjlim_n \widehat{\mathcal{E}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n) \rightarrow \mathbf{D}^1(V, \varinjlim_n \widehat{\mathcal{E}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n)$.

Lemme 5.20. *On a des isomorphismes canoniques*

1. $\varprojlim_V \varprojlim_n \mathbf{D}^0(V, \mathcal{E} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n) \cong \varprojlim_n \mathbb{H}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n)$, où les flèches de transition proviennent de la functorialité covariante de la cohomologie à support compact.
2. $\varprojlim_V \mathbf{D}^1(V, \varinjlim_n \widehat{\mathcal{E}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n) \cong \mathbb{H}^1(k, \varinjlim_n \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n)$, où les flèches de transitions sont données par le lemme 5.19.

(V décrit les ouverts non vides de U).

Démonstration :

1. Le lemme 5.18 assure que l'on a $\bigcap_V \varprojlim_n \mathbf{D}^0(V, \mathcal{E} \otimes \mathbf{Z}/l^n) = \varprojlim_n \mathbb{H}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n)$. On utilise alors la functorialité covariante de la cohomologie à support compact pour voir l'intersection comme une limite projective : si $V' \subset V$, on a une inclusion canonique (dans $\varprojlim_n \mathbf{H}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n)$) $\varprojlim_n \mathbf{D}^0(V', \mathcal{E} \otimes \mathbf{Z}/l^n) \subset \varprojlim_n \mathbf{D}^0(V, \mathcal{E} \otimes \mathbf{Z}/l^n)$.
2. Le lemme 5.19 implique que, si $V' \subset V$, le morphisme naturel $\varinjlim_n \mathbf{H}^1(V, \widehat{\mathcal{E}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n) \rightarrow \varinjlim_n \mathbf{H}^1(V', \widehat{\mathcal{E}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n)$ envoie $\mathbf{D}^1(V, \varinjlim_n \widehat{\mathcal{E}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n)$ dans $\mathbf{D}^1(V', \varinjlim_n \widehat{\mathcal{E}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n)$. En considérant les images

$$\mathcal{D}^1(V, \varinjlim_n \widehat{\mathcal{E}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n) := \text{Im} \left(\mathbf{D}^1(V, \varinjlim_n \widehat{\mathcal{E}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n) \rightarrow \varinjlim_n \mathbf{H}^1(k, \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n) \right)$$

dont la réunion sur tous les ouverts V donne exactement $\mathbb{H}^1(k, \varinjlim_n \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n)$, on déduit de cette propriété un morphisme surjectif

$$\varprojlim_V \mathbf{D}^1(V, \varinjlim_n \widehat{\mathcal{E}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n) \rightarrow \mathbb{H}^1(k, \varinjlim_n \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n)$$

Ce dernier morphisme est injectif par les principes généraux de cohomologie étale : en effet, le morphisme $\varprojlim_V \mathbf{H}^1(V, \varinjlim_n \widehat{\mathcal{E}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n) \rightarrow \mathbf{H}^1(k, \varinjlim_n \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n)$ est un isomorphisme par dévissage à partir du théorème VII.6.7 de [AGV73].

□

On conclut la preuve de la proposition 5.16 de la façon suivante : le lemme 5.17 fournit une dualité parfaite entre le groupe profini $\varprojlim_n \mathbf{D}^0(V, \mathcal{C} \otimes \mathbf{Z}/l^n)$ et le groupe discret $\mathbf{D}^1(V, \varinjlim_n \widehat{\mathcal{C}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n)$. Enfin, en passant à la limite sur les ouverts V , et en utilisant le lemme 5.20, on en déduit une dualité parfaite entre le groupe profini $\varprojlim_n \mathbb{H}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n)$ et le groupe discret $\mathbb{H}^1(k, \varinjlim_n \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/l^n)$. Ceci étant valable pour tout nombre premier l , on en déduit la proposition 5.16, à savoir une dualité parfaite entre le groupe compact $\text{Ker}(\theta)$ et le groupe discret $\mathbb{H}^1(k, \varinjlim_n \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$. □

Pour finir la démonstration du théorème 5.14, on va identifier le groupe $\mathbb{H}^1(\varinjlim_n \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$ avec le groupe $\mathbb{H}^2(\widehat{C})$. Pour ce faire, on considère les suites exactes :

$$0 \rightarrow \mathbf{H}^1(k, \widehat{C}) \otimes \mathbf{Z}/n \rightarrow \mathbf{H}^1(k, \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \rightarrow_n \mathbf{H}^2(k, \widehat{C}) \rightarrow 0$$

et pour chaque place v :

$$0 \rightarrow \mathbf{H}^1(\widehat{k}_v, \widehat{C}) \otimes \mathbf{Z}/n \rightarrow \mathbf{H}^1(\widehat{k}_v, \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \rightarrow_n \mathbf{H}^2(\widehat{k}_v, \widehat{C}) \rightarrow 0$$

On passe à la limite inductive sur n , et on obtient, puisque les groupes $\mathbf{H}^1(k, \widehat{C})$, $\mathbf{H}^2(k, \widehat{C})$, $\mathbf{H}^1(\widehat{k}_v, \widehat{C})$ et $\mathbf{H}^2(\widehat{k}_v, \widehat{C})$ sont de torsion, des isomorphismes :

$$\mathbf{H}^1(k, \varinjlim_n \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \cong \mathbf{H}^2(k, \widehat{C})$$

et en prenant le produit sur toutes les places v :

$$\prod_v \mathbf{H}^1(\widehat{k}_v, \varinjlim_n \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \cong \prod_v \mathbf{H}^2(\widehat{k}_v, \widehat{C})$$

On déduit immédiatement de ces deux isomorphismes l'identification annoncée, à savoir

$$\mathbb{H}^1(\varinjlim_n \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \cong \mathbb{H}^2(\widehat{C})$$

ce qui conclut la preuve du théorème 5.14. □

On conclut cette section par un lemme, qui nous sera utile dans la section 6.

Lemme 5.21. *Le groupe $\mathbb{H}_\wedge^0(C)$ est canoniquement isomorphe au groupe $\text{Ker}(\mathbf{H}^0(k, C)^\wedge \rightarrow \mathbf{P}^0(C)^\wedge)$.*

Démonstration : Voir proposition 5.4 de [HS05]. On sait en effet que $n\mathbf{H}^0(k_v, C) \subset \mathbf{H}^0(k_v, C)$ est un sous-groupe ouvert d'indice fini (cas des tores et finitude de $H^1(k_v, T_1)$). Cela assure que le morphisme canonique $\mathbf{P}^0(C)_\wedge \rightarrow \mathbf{P}^0(C)^\wedge$ est injectif. On montre ensuite la surjectivité du morphisme $\text{Ker } \theta_0 \rightarrow \text{Ker } \beta_0$ dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{H}^0(k, C)_\wedge & \xrightarrow{\theta_0} & \mathbf{P}^0(C)_\wedge \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{H}^0(k, C)^\wedge & \xrightarrow{\beta_0} & \mathbf{P}^0(C)^\wedge \end{array}$$

Pour cela, on raisonne comme dans la proposition 5.4 de [HS05], en tenant compte des corrigenda à propos de la page 120 de [HS05] : on va montrer que le morphisme $\theta_0 : \mathbf{H}^0(k, C)_\wedge \rightarrow \mathbf{P}^0(k, C)_\wedge$ est strict. Soit $n \geq 1$, considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
H^2(k, {}_n(\text{Ker } \rho)) & \longrightarrow & \mathbf{H}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) & \longrightarrow & H^1(k, T_{\mathbf{Z}/n}(C)) \\
\downarrow & & \downarrow f & & \downarrow h \\
P^2(k, {}_n(\text{Ker } \rho)) & \xrightarrow{g} & \mathbf{P}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) & \longrightarrow & P^1(k, T_{\mathbf{Z}/n}(C)) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H^0(k, {}_n(\widehat{\text{Ker } \rho})^D) & \longrightarrow & \mathbf{H}^0(k, \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)^D & \longrightarrow & H^1(k, T_{\mathbf{Z}/n}(\widehat{C}))^D
\end{array}$$

dont les lignes, ainsi que les deux colonnes extrêmes, sont exactes (pour les colonnes, c'est la suite de Poitou-Tate pour les modules finis). Montrons que $\text{Im } f$ est un sous-groupe discret de $\mathbf{P}^0(k, C)$: on a une suite exacte de groupes topologiques

$$0 \rightarrow \text{Im } f \cap \text{Im } g \rightarrow \text{Im } f \rightarrow \text{Im } h \quad (5)$$

où tous les groupes sont munis de la topologie induite par les topologies adéliques sur $\mathbf{P}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$ et $P^1(k, T_{\mathbf{Z}/n}(C))$. Le groupe $H^1(k, T_{\mathbf{Z}/n}(C))$ est discret, et h est d'image fermée par Poitou-Tate, donc h est d'image localement compacte, et donc h est stricte par [HR79], 5.29. Donc le groupe $\text{Im } h$ est discret. De même, le groupe $P^2(k, {}_n(\text{Ker } \rho))$ est discret, g est d'image fermée donc localement compacte par Poitou-Tate, et on en déduit que $\text{Im } g$ est également discret, toujours grâce à [HR79], 5.29. Par conséquent, dans la suite exacte (5), le groupe $\text{Im } f$ admet le groupe discret $\text{Im } f \cap \text{Im } g$ comme sous-groupe ouvert (c'est l'image réciproque de l'ouvert $\{0\}$ du groupe discret $\text{Im } h$ par le morphisme $\text{Im } f \rightarrow \text{Im } h$), donc le groupe $\text{Im } f$ est lui-même discret. On considère alors le diagramme (3) : on vient de montrer que l'image du morphisme $f : \mathbf{H}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \rightarrow \mathbf{P}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$ est discrète. Le diagramme (3), ainsi que [HR79], 5.29, assurent que les morphismes $\mathbf{H}^0(k, C)/n \rightarrow \mathbf{H}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$ et $\mathbf{P}^0(k, C)/n \rightarrow \mathbf{P}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$ sont stricts. Donc l'image de $p_n : \mathbf{H}^0(k, C)/n \rightarrow \mathbf{P}^0(k, C)/n$ s'identifie (topologiquement) à un sous-groupe de l'image de $\mathbf{H}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \rightarrow \mathbf{P}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$, laquelle est discrète. Donc l'image de p_n est discrète, donc fermée, donc localement compacte, donc le morphisme p_n est strict (par [HR79], 5.29). Enfin, $\text{Ker } p_n$ est fini et $\mathbf{H}^0(k, C)/n$ est discret, donc la limite projective des morphismes stricts p_n est un morphisme strict $\theta_0 : \mathbf{H}^0(k, C)_\wedge \rightarrow \mathbf{P}^0(k, C)_\wedge$ (voir [HS05], corrigenda). Ce fait, joint à l'injectivité de $\mathbf{P}^0(k, C)_\wedge \rightarrow \mathbf{P}^0(k, C)^\wedge$, assure que $\text{Ker } \theta_0 \rightarrow \text{Ker } \beta_0$ est un isomorphisme. \square

5.4.2 Cas où ρ est surjective

Dans cette section, on montre une dualité parfaite entre les groupes finis $\text{III}^0(C)$ et $\text{III}^2(\widehat{C})$ sous l'hypothèse que le morphisme ρ est surjectif.

Remarque 5.22. Si l'on suppose que ρ est surjectif, cela implique que le complexe C est quasi isomorphe à $(\text{Ker } \rho)[1]$, et donc on va ici retrouver un résultat de dualité globale pour un groupe de type multiplicatif (voir par exemple [NSW08], théorème 8.6.7).

Théorème 5.23. *Supposons que ρ est surjective. Alors il existe une dualité parfaite de groupes finis, fonctorielle en M :*

$$\text{III}^0(C) \times \text{III}^2(\widehat{C}) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

Démonstration : Fixons un nombre premier l et un ouvert $U := \text{Spec}(\mathcal{O}_{k,S})$ de $\text{Spec}(\mathcal{O}_k)$ sur lequel C s'étend en un complexe surjectif de U -tores \mathcal{C} , de sorte que l soit inversible sur U . On remarque alors les faits suivants :

- Le morphisme $\mathbf{H}^0(U, \mathcal{C})\{l\} \rightarrow \mathbf{H}^0(k, C)\{l\}$ est injectif si U est suffisamment petit. En effet, on considère un triangle exact de la forme

$$\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{C}[-1] \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{T}[1]$$

où \mathcal{T} est un U -tore (la composante connexe de $\text{Ker } \rho$) et \mathcal{F} un U -schéma en groupes de type multiplicatif fini. On conclut en remarquant que $H^0(U, \mathcal{F})\{l\} \rightarrow H^0(k, F)\{l\}$ est un isomorphisme (puisque F est localement constant) et $H^1(U, \mathcal{F})\{l\} \rightarrow H^1(k, F)\{l\}$ et $H^1(U, \mathcal{T})\{l\} \rightarrow H^1(k, T)\{l\}$ sont injectifs (voir la proposition 2.9 de [Mil06] pour le premier, et la proposition 4.1 et les corrigenda de [HS05], ainsi que la preuve de la proposition 5.3 pour le second).

- De même, $\mathbf{H}^2(U, \widehat{\mathcal{C}})\{l\} \rightarrow \mathbf{H}^2(k, \widehat{C})\{l\}$ est injectif.
- Pour tout ouvert V de U , les groupes $\mathbf{D}^0(V, \mathcal{C})\{l\}$ et $\mathbf{D}^2(V, \widehat{\mathcal{C}})\{l\}$ sont finis. En effet, en utilisant à nouveau le dévissage précédent, on sait que $H^1(V, \mathcal{F})\{l\}$ est fini, que $D^1(V, \mathcal{T})\{l\}$ est fini, et que $H^0(k_v, F)$ est fini pour toute place v , donc le lemme du serpent assure la finitude de $\mathbf{D}^0(V, \mathcal{C})\{l\}$. Pour le groupe $\mathbf{D}^2(V, \widehat{\mathcal{C}})\{l\}$, on utilise le même dévissage.
- Comme dans la preuve du lemme 4.7 de [HS05], on déduit des points précédents qu'il existe un ouvert U_0 dans U tel que $\mathbf{D}^0(V, \mathcal{C})\{l\} = \text{III}^0(k, C)\{l\}$ et $\mathbf{D}^2(V, \widehat{\mathcal{C}})\{l\} = \text{III}^2(k, \widehat{C})\{l\}$ pour tout V dans U_0 .
- On conclut la preuve du théorème 5.23 grâce au corollaire 4.6, en remarquant que $\mathbf{H}^0(k_v, C) \rightarrow \mathbf{H}^0(k_v, C)^\wedge$ est un isomorphisme car $\mathbf{H}^0(k_v, C)$ est fini sous l'hypothèse de surjectivité de ρ . \square

6 Deux suites de Poitou-Tate

6.1 Cas où $\text{Ker } \rho$ est fini

6.1.1 La suite exacte de Poitou-Tate

Théorème 6.1. *Soit $C = [T_1 \xrightarrow{\rho} T_2]$ un complexe de tores défini sur k , avec $\text{Ker}(\rho)$ fini. On a alors une suite exacte fonctorielle en C :*

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathbf{H}^{-1}(k, C) & \longrightarrow & \mathbf{P}^{-1}(k, C) & \longrightarrow & \mathbf{H}^2(k, \widehat{C})^D \\
& & & & & & \downarrow \\
& & \mathbf{H}^1(k, \widehat{C})^D & \longleftarrow & \mathbf{P}^0(k, C)^\wedge & \longleftarrow & \mathbf{H}^0(k, C)^\wedge \\
& & \downarrow & & & & \\
& & \mathbf{H}^1(k, C) & \longrightarrow & \mathbf{P}^1(k, C) & \longrightarrow & \mathbf{H}^0(k, \widehat{C})^D \\
& & & & & & \downarrow \\
0 & \longleftarrow & \mathbf{H}^{-1}(k, \widehat{C})^D & \longleftarrow & \mathbf{P}^2(k, C) & \longleftarrow & \mathbf{H}^2(k, C)
\end{array}$$

On dispose également, sous les mêmes hypothèses, de la suite exacte duale :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathbf{H}^{-1}(k, \widehat{C})^\wedge & \longrightarrow & \mathbf{P}^{-1}(k, \widehat{C})^\wedge & \longrightarrow & \mathbf{H}^2(k, C)^D \\
& & & & & & \downarrow \\
& & \mathbf{H}^1(k, C)^D & \longleftarrow & \mathbf{P}^0(k, \widehat{C}) & \longleftarrow & \mathbf{H}^0(k, \widehat{C}) \\
& & \downarrow & & & & \\
& & \mathbf{H}^1(k, \widehat{C}) & \longrightarrow & \mathbf{P}^1(k, \widehat{C})_{\text{tors}} & \longrightarrow & (\mathbf{H}^0(k, C)^D)_{\text{tors}} \\
& & & & & & \downarrow \\
0 & \longleftarrow & \mathbf{H}^{-1}(k, C)^D & \longleftarrow & \mathbf{P}^2(k, \widehat{C}) & \longleftarrow & \mathbf{H}^2(k, \widehat{C})
\end{array}$$

Démonstration :

– Montrons l'exactitude de la deuxième ligne.

Pour cela, on commence par le lemme suivant :

Lemme 6.2. *On suppose $\text{Ker } \rho$ fini. Alors la suite*

$$\varprojlim_n \mathbf{H}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \rightarrow \varprojlim_n \mathbf{P}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \rightarrow \mathbf{H}^0(k, \varprojlim_n \widehat{C} \otimes \mathbf{Z}/n)^D$$

est exacte.

Démonstration : Considérons le diagramme à lignes exactes suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
H^0(k, T_{\mathbf{Z}/n}(C)) & \longrightarrow & H^2(k, {}_n(\text{Ker } \rho)) & \longrightarrow & \mathbf{H}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) & \longrightarrow & H^1(k, T_{\mathbf{Z}/n}(C)) & \longrightarrow & H^3(k, {}_n(\text{Ker } \rho)) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \simeq \\
P^0(k, T_{\mathbf{Z}/n}(C)) & \longrightarrow & P^2(k, {}_n(\text{Ker } \rho)) & \longrightarrow & \mathbf{P}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) & \longrightarrow & P^1(k, T_{\mathbf{Z}/n}(C)) & \longrightarrow & P^3(k, {}_n(\text{Ker } \rho)) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H^2(k, T_{\mathbf{Z}/n}(\widehat{C})^D) & \longrightarrow & H^0(k, {}_n(\widehat{\text{Ker } \rho})^D) & \longrightarrow & \mathbf{H}^0(k, \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)^D & \longrightarrow & H^1(k, T_{\mathbf{Z}/n}(\widehat{C})^D) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Les groupes de la colonne de gauche étant finis ou compacts, et l'image du morphisme $P^0(k, T_{\mathbf{Z}/n}(C)) \rightarrow P^2(k, {}_n(\text{Ker } \rho))$ étant finie (car compacte et discrète), le théorème 7.3 de [Jen72] assure que l'on a un diagramme à lignes exactes (où $\varprojlim^{(1)}$ désigne le foncteur dérivé du foncteur \varprojlim) :

$$\begin{array}{ccccccc}
\varprojlim_n H^2(k, {}_n(\text{Ker } \rho)) & \longrightarrow & \varprojlim_n \mathbf{H}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) & \longrightarrow & \varprojlim_n Q_1^n & \longrightarrow & \varprojlim_n^{(1)} P_1^n \quad (6) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\varprojlim_n P^2(k, {}_n(\text{Ker } \rho)) & \longrightarrow & \varprojlim_n \mathbf{P}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) & \longrightarrow & \varprojlim_n Q_2^n & \longrightarrow & \varprojlim_n^{(1)} P_2^n \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\varprojlim_n H^0(k, {}_n(\widehat{\text{Ker } \rho})^D) & \longrightarrow & \varprojlim_n \mathbf{H}^0(k, \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)^D & \longrightarrow & \varprojlim_n H^1(k, T_{\mathbf{Z}/n}(\widehat{C})^D) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

où les groupes P_1^n , P_2^n , Q_1^n et Q_2^n sont définis par les suites exactes de groupes topologiques suivantes :

$$H^0(k, T_{\mathbf{Z}/n}(C)) \rightarrow H^2(k, {}_n(\text{Ker } \rho)) \rightarrow P_1^n \rightarrow 0 \quad (7)$$

$$0 \rightarrow P_1^n \rightarrow \mathbf{H}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \rightarrow H^1(k, T_{\mathbf{Z}/n}(C))$$

$$P^0(k, T_{\mathbf{Z}/n}(C)) \rightarrow P^2(k, {}_n(\text{Ker } \rho)) \rightarrow P_2^n \rightarrow 0 \quad (8)$$

$$0 \rightarrow P_2^n \rightarrow \mathbf{P}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \rightarrow P^1(k, T_{\mathbf{Z}/n}(C))$$

$$H^2(k, {}_n(\text{Ker } \rho)) \rightarrow \mathbf{H}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \rightarrow Q_1^n \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow Q_1^n \rightarrow H^1(k, T_{\mathbf{Z}/n}(C)) \rightarrow H^3(k, {}_n(\text{Ker } \rho))$$

$$P^2(k, {}_n(\text{Ker } \rho)) \rightarrow \mathbf{P}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \rightarrow Q_2^n \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow Q_2^n \rightarrow P^1(k, T_{\mathbf{Z}/n}(C)) \rightarrow P^3(k, {}_n(\text{Ker } \rho))$$

Or ces groupes s'intègrent dans le diagramme à lignes exactes suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \varprojlim_n Q_1^n & \longrightarrow & \varprojlim_n H^1(k, T_{\mathbf{Z}/n}(C)) & \longrightarrow & \varprojlim_n R_1^n \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \varprojlim_n Q_2^n & \longrightarrow & \varprojlim_n P^1(k, T_{\mathbf{Z}/n}(C)) & \longrightarrow & \varprojlim_n R_2^n \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & \varprojlim_n H^1(k, T_{\mathbf{Z}/n}(\widehat{C}))^D & & \end{array} \quad (9)$$

où R_1^n et R_2^n sont les noyaux respectifs des morphismes $H^3(k, {}_n(\text{Ker } \rho)) \rightarrow \mathbf{H}^1(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$ et $P^3(k, {}_n(\text{Ker } \rho)) \rightarrow \mathbf{P}^1(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$. Les groupes $H^3(k, {}_n(\text{Ker } \rho))$ et $P^3(k, {}_n(\text{Ker } \rho))$ étant isomorphes par Poitou-Tate, l'exactitude à gauche du foncteur \varprojlim_n assure que la flèche $\varprojlim_n R_1^n \rightarrow \varprojlim_n R_2^n$ est injective.

Montrons alors le lemme : soit $\alpha \in \varprojlim_n \mathbf{P}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$ d'image nulle dans $\varprojlim_n \mathbf{H}^0(k, \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)^D$. On veut montrer qu'un tel élément se relève dans $\varprojlim_n \mathbf{H}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$. Pour cela, on pousse α dans $\varprojlim_n P^1(k, T_{\mathbf{Z}/n}(C))$. Par functorialité, l'élément $\beta \in \varprojlim_n P^1(k, T_{\mathbf{Z}/n}(C))$ ainsi obtenu s'envoie sur 0 dans $\varprojlim_n H^1(k, T_{\mathbf{Z}/n}(\widehat{C}))^D$.

Par Poitou-Tate, la deuxième colonne du diagramme (9) est exacte (on utilise ici la finitude de $\mathbf{H}^1(k, T_{\mathbf{Z}/n}(C))$ pour passer à la limite projective dans la suite exacte de Poitou-Tate), et donc β se relève en un élément $\gamma \in \varprojlim_n H^1(k, T_{\mathbf{Z}/n}(C))$. Or β provient de $\varprojlim_n Q_2^n$ (c'est l'image de α), donc l'image de β dans $\varprojlim_n R_2^n$ est nulle, et par injectivité de la flèche $\varprojlim_n R_1^n \rightarrow \varprojlim_n R_2^n$, l'image de γ dans $\varprojlim_n R_1^n$ est nulle. Donc par exactitude de la première ligne du diagramme (9), γ provient de $\varprojlim_n Q_1^n$.

Revenons alors au diagramme initial (6) : on est dans la configuration suivante : $\alpha \in \varprojlim_n \mathbf{P}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$, son image $\gamma \in \varprojlim_n Q_2^n$ provient d'un élément $\gamma' \in \varprojlim_n Q_1^n$. Montrons désormais que γ' se relève dans $\varprojlim_n \mathbf{H}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$: il suffit pour cela de montrer que le morphisme $\varprojlim_n^{(1)} P_1^n \rightarrow \varprojlim_n^{(1)} P_2^n$ est injectif.

Or $T_{\mathbf{Z}/n}(C)$ est fini, donc $\varprojlim_n^{(1)} H^0(k, T_{\mathbf{Z}/n}(C)) = 0$, et donc par la suite exacte (7), on sait que

$$\varprojlim_n^{(1)} H^2(k, {}_n(\text{Ker } \rho)) \cong \varprojlim_n^{(1)} P_1^n \quad (10)$$

De même, le groupe $P^0(k, T_{\mathbf{Z}/n}(C))$ est compact, donc $\varprojlim_n^{(1)} P^0(k, T_{\mathbf{Z}/n}(C)) = 0$ et donc

$$\varprojlim_n^{(1)} P^2(k, {}_n(\text{Ker } \rho)) \cong \varprojlim_n^{(1)} P_2^n \quad (11)$$

grâce à la suite exacte (8). Si I_n désigne l'image de $H^2(k, {}_n(\text{Ker } \rho))$ dans $P^2(k, {}_n(\text{Ker } \rho))$, puisque $\text{III}^2(k, {}_n(\text{Ker } \rho))$ est fini, on a un isomorphisme

$$\varprojlim_n^{(1)} H^2(k, {}_n(\text{Ker } \rho)) \cong \varprojlim_n^{(1)} I_n \quad (12)$$

Or par Poitou-Tate, le conoyau de $H^2(k, {}_n(\text{Ker } \rho)) \rightarrow P^2(k, {}_n(\text{Ker } \rho))$ est exactement le groupe fini $H^0(k, \widehat{{}_n(\text{Ker } \rho)})^D$, donc on a une suite exacte

$$0 \rightarrow I_n \rightarrow P^2(k, {}_n(\text{Ker } \rho)) \rightarrow H^0(k, \widehat{{}_n(\text{Ker } \rho)})^D \rightarrow 0$$

qui après passage à la limite projective donne la suite exacte : $\varprojlim_n H^0(k, \widehat{{}_n(\text{Ker } \rho)})^D \rightarrow \varprojlim_n^{(1)} I_n \rightarrow \varprojlim_n^{(1)} P^2(k, {}_n(\text{Ker } \rho)) \rightarrow 0$

Or par hypothèse $\text{Ker}(\rho)$ est fini, donc $\varprojlim_n H^0(k, \widehat{{}_n(\text{Ker } \rho)})^D = 0$, donc cela prouve que le morphisme

$$\varprojlim_n^{(1)} I_n \rightarrow \varprojlim_n^{(1)} P^2(k, {}_n(\text{Ker } \rho)) \quad (13)$$

est un isomorphisme.

Ainsi, en combinant les isomorphismes (10), (11), (12) et (13), on a bien montré que le morphisme $\varprojlim_n^{(1)} P_1^n \rightarrow \varprojlim_n^{(1)} P_2^n$ était un isomorphisme.

On a donc désormais un élément $\tau \in \varprojlim_n \mathbf{H}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$ relevant $\gamma' \in \varprojlim_n Q_1^n$. Notons τ' l'image de τ dans $\varprojlim_n \mathbf{P}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$. Par commutativité et exactitude du diagramme (6), α et τ' dans $\varprojlim_n \mathbf{P}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$ ont même image dans $\varprojlim_n Q_2^n$. Donc la différence se relève dans $\varprojlim_n P^2(k, {}_n(\text{Ker } \rho))$. Mais l'hypothèse de finitude sur $\text{Ker } \rho$ assure que le groupe $\varprojlim_n P^2(k, {}_n(\text{Ker } \rho))$ est trivial, donc $\tau' = \alpha$, ce qui conclut la preuve du lemme 6.2. \square

On considère alors à nouveau le diagramme (4), commutatif, dont les deux premières lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbf{H}^0(k, C)_{\wedge} & \longrightarrow & \varprojlim_n \mathbf{H}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) & \longrightarrow & Q_1 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \theta_0 & & \downarrow \theta & & \downarrow \beta \\ 0 & \longrightarrow & \mathbf{P}^0(k, C)_{\wedge} & \longrightarrow & \varprojlim_n \mathbf{P}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) & \longrightarrow & Q_2 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \gamma'_0 & & \downarrow & & \\ & & \mathbf{H}^1(k, \widehat{C})^D & \longrightarrow & \mathbf{H}^0(k, \varinjlim_n \widehat{C} \otimes \mathbf{Z}/n)^D & & \end{array}$$

On sait que la colonne centrale est exacte par le lemme 6.2. Or la colonne de gauche est un complexe par la loi de réciprocité globale du corps de classes. De plus, le morphisme β est injectif, donc une chasse au diagramme assure que la colonne de gauche est exacte, à savoir la suite

$$\mathbf{H}^0(k, C)_\wedge \rightarrow \mathbf{P}^0(k, C)_\wedge \rightarrow \mathbf{H}^1(k, \widehat{C})^D$$

est exacte. On prend la complétion profinie de cette suite, on obtient le complexe

$$\mathbf{H}^0(k, C)^\wedge \rightarrow \mathbf{P}^0(k, C)^\wedge \rightarrow \mathbf{H}^1(k, \widehat{C})^D$$

Celui-ci est exact par les considérations topologiques suivantes (voir par exemple [HS05], preuve du théorème 5.6) : en reprenant la preuve du lemme 6.2, et en utilisant le fait que

$$\text{Coker} \left(\varprojlim_n H^1(k, T_{\mathbf{Z}/n}(C)) \rightarrow \varprojlim_n P^1(k, T_{\mathbf{Z}/n}(C)) \right)$$

est profini (suite de Poitou-Tate pour les modules finis), on montre facilement que

$$\text{Coker} (\mathbf{H}^0(k, C)_\wedge \rightarrow \mathbf{P}^0(k, C)_\wedge)$$

est profini, donc $I := \text{Im} \left(\mathbf{P}^0(k, C)_\wedge \xrightarrow{\gamma'_0} \mathbf{H}^1(k, \widehat{C})^D \right)$ est un sous-groupe fermé profini de $\mathbf{H}^1(k, \widehat{C})^D$. Or en complétant la suite exacte

$$\mathbf{H}^0(k, C)_\wedge \rightarrow \mathbf{P}^0(k, C)_\wedge \xrightarrow{\gamma'_0} I \rightarrow 0$$

on obtient une suite exacte

$$\mathbf{H}^0(k, C)^\wedge \rightarrow \mathbf{P}^0(k, C)^\wedge \xrightarrow{\gamma'_0} I^\wedge \rightarrow 0$$

et I étant profini, on a $I^\wedge = I$ et donc $I^\wedge \rightarrow \mathbf{H}^1(k, \widehat{C})^D$ est injective, ce qui assure l'exactitude de la deuxième ligne du diagramme du théorème 6.1, à savoir

$$\mathbf{H}^0(k, C)^\wedge \rightarrow \mathbf{P}^0(k, C)^\wedge \rightarrow \mathbf{H}^1(k, \widehat{C})^D$$

– Pour la troisième ligne, le raisonnement est plus direct : on considère cette fois le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} H^3(k, {}_n(\text{Ker } \rho)) & \longrightarrow & \mathbf{H}^1(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) & \longrightarrow & H^2(k, T_{\mathbf{Z}/n}(C)) & \longrightarrow & H^4(k, {}_n(\text{Ker } \rho)) \quad (14) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \simeq \\ P^3(k, {}_n(\text{Ker } \rho)) & \longrightarrow & \mathbf{P}^1(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) & \longrightarrow & P^2(k, T_{\mathbf{Z}/n}(C)) & \longrightarrow & P^4(k, {}_n(\text{Ker } \rho)) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \mathbf{H}^{-1}(k, \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)^D & \xrightarrow{\simeq} & H^0(k, T_{\mathbf{Z}/n}(\widehat{C}))^D & & \end{array}$$

On sait que la troisième colonne est exacte, et que les deux flèches verticales extrêmes sont des isomorphismes. Une chasse au diagramme assure que la deuxième colonne est exacte. En outre, les finitudes de $H^3(k, {}_n(\text{Ker } \rho))$ et $\text{III}^2(k, T_{\mathbf{Z}/n}(C))$ assurent celle de $\text{III}^1(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$,

donc on peut prendre la limite projective de la deuxième colonne pour obtenir la suite exacte suivante (puisque $\varprojlim_n^{(1)} \mathbb{H}^1(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) = 0$) :

$$\varprojlim_n \mathbf{H}^1(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \rightarrow \varprojlim_n \mathbf{P}^1(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \rightarrow \varprojlim_n \mathbf{H}^{-1}(k, \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)^D$$

Or on dispose pour tout n de la suite exacte naturelle,

$$0 \rightarrow \mathbf{H}^1(k, C)/n \rightarrow \mathbf{H}^1(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \rightarrow {}_n\mathbf{H}^2(k, C) \rightarrow 0$$

D'où un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbf{H}^1(k, C)_{\wedge} & \longrightarrow & \varprojlim_n \mathbf{H}^1(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) & \longrightarrow & Q_1 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \beta' \\ 0 & \longrightarrow & \mathbf{P}^1(k, C)_{\wedge} & \longrightarrow & \varprojlim_n \mathbf{P}^1(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) & \longrightarrow & Q_2 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & (\mathbf{H}^0(k, \widehat{C})^D)_{\wedge} & \longrightarrow & \varprojlim_n \mathbf{H}^{-1}(k, \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)^D & \longrightarrow & Q_3 \longrightarrow 0 \end{array}$$

Or on a vu que la deuxième colonne était exacte, et $\text{Ker}(\beta')$ est contenu dans $\varprojlim_n \mathbb{H}^2(C)$, or $\mathbb{H}^2(C)$ est un groupe fini (voir théorème 5.12), donc son module de Tate est nul, donc β' est injective, donc une chasse au diagramme assure que la première colonne est exacte. Reste à montrer que l'on peut "enlever" les complétions dans cette suite. Pour cela, on utilise la finitude de $\text{Ker}(\rho)$ pour montrer que les groupes $\mathbf{H}^1(k, C)$ et $\mathbf{P}^1(k, C)$ sont de N -torsion pour un N suffisamment grand. En effet, on peut dévisser C dans une suite exacte de complexes de la forme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ker}(\rho) & \longrightarrow & T_1 & \longrightarrow & T'_1 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \rho & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & T_2 & \xrightarrow{=} & T_2 \longrightarrow 0 \end{array}$$

où T'_1 est le k -sous-tore de T_2 image de T_1 par ρ . Notons alors $S := T_2/T'_1$ le tore quotient. Le diagramme précédent induit alors une suite exacte en hypercohomologie :

$$H^2(k, \text{Ker}(\rho)) \rightarrow \mathbf{H}^1(k, C) \rightarrow H^1(k, S)$$

Or, par Hilbert 90 et par restriction-corestriction, le groupe $H^1(k, S)$ est de r -torsion, où $r := [L : k]$ est le degré d'une extension L/k déployant le tore S , et le groupe $H^2(k, \text{Ker}(\rho))$ est de r' -torsion, où r' est le cardinal du groupe fini $\text{Ker}(\rho)(\bar{k})$. Donc $\mathbf{H}^1(k, C)$ est de $N = rr'$ -torsion. Cela assure que $\mathbf{H}^1(k, C) \cong \mathbf{H}^1(k, C)_{\wedge}$. De même, $\mathbf{P}^1(k, C) \cong \mathbf{P}^1(k, C)_{\wedge}$. Avec ces identifications, l'exactitude de la suite $\mathbf{H}^1(k, C)_{\wedge} \rightarrow \mathbf{P}^1(k, C)_{\wedge} \rightarrow (\mathbf{H}^0(k, \widehat{C})^D)_{\wedge}$ implique immédiatement celle de la suite

$$\mathbf{H}^1(k, C) \rightarrow \mathbf{P}^1(k, C) \rightarrow \mathbf{H}^0(k, \widehat{C})^D$$

c'est-à-dire l'exactitude de la ligne 3 dans le théorème 6.1.

– Montrons l'exactitude de la dernière ligne : on s'intéresse au diagramme commutatif suivant dont les colonnes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & & 0 & & 0 & (15) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 \mathbf{H}^1(k, C)/n & \longrightarrow & \mathbf{P}^1(k, C)/n & \longrightarrow & \left({}_n\mathbf{H}^0(k, \widehat{C}) \right)^D & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 \mathbf{H}^1(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) & \longrightarrow & \mathbf{P}^1(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) & \longrightarrow & \mathbf{H}^{-1}(k, \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)^D & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 {}_n\mathbf{H}^2(k, C) & \longrightarrow & {}_n\mathbf{P}^2(k, C) & \longrightarrow & \left(\mathbf{H}^{-1}(k, \widehat{C})/n \right)^D & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & & 0 & & 0 &
 \end{array}$$

Or on a montré dans la preuve du point précédent l'exactitude de la deuxième ligne :

$$\mathbf{H}^1(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \rightarrow \mathbf{P}^1(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \rightarrow \mathbf{H}^{-1}(k, \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)^D$$

On passe à la limite inductive sur n dans le diagramme (15). Puisque $\mathbf{H}^0(k, \widehat{C})_{\text{tors}}$ est fini, le module de Tate $T(\mathbf{H}^0(k, \widehat{C}))$ est nul, et donc on obtient le diagramme suivant dont la première ligne est exacte ($\mathbf{H}^2(k, C)$ et $\mathbf{P}^2(k, C)$ sont de torsion, car $\mathbf{H}^2(\widehat{\mathcal{O}}_v, \mathcal{E}) = 0$ pour presque toute place v de k) :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbf{H}^1(k, \varinjlim_n C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) & \longrightarrow & \mathbf{P}^1(k, \varinjlim_n C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) & \longrightarrow & \left(\varinjlim_n \mathbf{H}^{-1}(k, \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \right)^D & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \simeq & & \\
 \mathbf{H}^2(k, C) & \longrightarrow & \mathbf{P}^2(k, C) & \longrightarrow & \left(\mathbf{H}^{-1}(k, \widehat{C})_{\wedge} \right)^D & &
 \end{array}$$

(la surjectivité de la dernière flèche de la première ligne provient de la finitude du conoyau de $\mathbf{P}^1(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \rightarrow \mathbf{H}^{-1}(k, \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)^D$, laquelle est une conséquence du diagramme (14)).

Or les deux premières flèches verticales sont des isomorphismes également, puisque $\varinjlim_n \mathbf{H}^1(k, C)/n = 0$ et $\varinjlim_n \mathbf{P}^1(k, C)/n = 0$ car $\mathbf{H}^1(k, C)$ et $\mathbf{P}^1(k, C)$ sont de torsion (on rappelle que $\mathbf{H}^1(\widehat{\mathcal{O}}_v, \mathcal{E}) = 0$ pour presque toute place v). Donc la suite

$$\mathbf{H}^2(k, C) \rightarrow \mathbf{P}^2(k, C) \rightarrow \left(\mathbf{H}^{-1}(k, \widehat{C})_{\wedge} \right)^D \rightarrow 0$$

est exacte. En outre, le groupe discret de type fini $\mathbf{H}^{-1}(k, \widehat{C})$ a même dual que son complété $\mathbf{H}^{-1}(k, \widehat{C})_{\wedge}$. D'où l'exactitude de la dernière ligne du diagramme du théorème.

– Pour la première ligne, l'exactitude de la suite

$$0 \rightarrow \mathbf{H}^{-1}(k, C) \rightarrow \mathbf{P}^{-1}(k, C) \rightarrow \mathbf{H}^2(k, \widehat{C})^D$$

se déduit immédiatement du début de la suite de Poitou-Tate associée au module fini $\text{Ker}(\rho)$.

- Montrons enfin l'exactitude dans les "coins" du diagramme : c'est exactement la traduction des dualités globales montrées précédemment, à savoir $\mathbb{H}_\wedge^0(C) \cong \mathbb{H}^2(\widehat{C})^D$ pour le coin en haut à droite (théorème 5.14), $\mathbb{H}^1(C) \cong \mathbb{H}^1(\widehat{C})^D$ pour le coin au milieu à gauche (théorème 5.7), et enfin $\mathbb{H}^2(C) \cong \mathbb{H}^0(\widehat{C})^D$ pour le coin en bas à droite (théorème 5.12).
- Considérons maintenant la suite exacte duale : les raisonnements sont similaires à ceux des points précédents. Pour la première ligne, il suffit de dualiser la dernière ligne de la première suite de Poitou-Tate, ou alors de montrer par dévissage l'exactitude de la suite $\varprojlim_n \mathbf{H}^{-1}(k, \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \rightarrow \varprojlim_n \mathbf{P}^{-1}(k, \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \rightarrow \varprojlim_n \mathbf{H}^1(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)^D$ et d'utiliser la finitude de $\mathbb{H}^0(\widehat{C})$ (voir lemme 5.9). Pour la deuxième ligne, on montre par dévissage l'exactitude de $\varprojlim_n \mathbf{H}^{-1}(k, \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \rightarrow \varprojlim_n \mathbf{P}^{-1}(k, \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \rightarrow \varprojlim_n \mathbf{H}^1(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)^D$, puis on utilise la finitude de $\mathbb{H}^2(C)$ et le fait que $\mathbf{H}^0(k, \widehat{C})$ et $\mathbf{P}^0(k, \widehat{C})$ soient de torsion (puisque $\text{Ker } \rho$ est fini) pour en déduire l'exactitude de la deuxième ligne. En ce qui concerne la troisième ligne, on montre par dévissage l'exactitude de la suite $\varprojlim_n \mathbf{H}^0(k, \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \rightarrow \varprojlim_n \mathbf{P}^0(k, \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \rightarrow \varprojlim_n \mathbf{H}^2(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)^D$, et la finitude de $\mathbb{H}^1(C)$ assure l'exactitude de la troisième ligne du diagramme. Pour la quatrième ligne, on montre l'exactitude de $\varprojlim_n \mathbf{H}^2(k, \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \rightarrow \varprojlim_n \mathbf{P}^2(k, \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \rightarrow \varprojlim_n \mathbf{H}^{-2}(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)^D$ et on conclut par finitude de $\mathbf{H}^3(k, \widehat{C})$ et par le fait que $\mathbf{H}^2(k, \widehat{C})$ et $\mathbf{P}^2(k, \widehat{C})$ soient de N -torsion pour un certain entier N . Enfin, pour les coins de ce diagramme, on utilise à nouveau les théorèmes 5.7, 5.12 et 5.14

□

6.1.2 Lien avec une suite de Borovoi et description explicite des accouplements

Dans toute cette partie, l'hypothèse de finitude de $\text{Ker}(\rho)$ est essentielle. On définit le complexe $\check{C} := [X_*(T_1) \xrightarrow{\rho_*} X_*(T_2)]$, où $X_*(T_i)$ désigne le modules des cocaractères du tore T_i . Suivant Borovoi (voir [Bor98], chapitre 4), on considère la suite exacte courte de complexes :

$$0 \rightarrow \check{C} \otimes \bar{k}^* \rightarrow \check{C} \otimes \bar{\mathbf{A}}^* \rightarrow \check{C} \otimes \bar{\mathbf{C}}^* \rightarrow 0 \quad (16)$$

où $\bar{\mathbf{A}}$ désigne $\mathbf{A}_k \otimes_k \bar{k}$ et $\bar{\mathbf{C}}^* := \bar{\mathbf{A}}^*/\bar{k}^*$. Écrivons la suite exacte d'hypercohomologie associée :

$$\dots \rightarrow \mathbf{H}^i(k, \check{C} \otimes \bar{k}^*) \rightarrow \mathbf{H}^i(k, \check{C} \otimes \bar{\mathbf{A}}^*) \rightarrow \mathbf{H}^i(k, \check{C} \otimes \bar{\mathbf{C}}^*) \rightarrow \mathbf{H}^{i+1}(k, \check{C} \otimes \bar{k}^*) \rightarrow \dots \quad (17)$$

L'objectif de cette section est de comparer cette suite exacte avec la suite de Poitou-Tate du théorème 6.1, et d'obtenir au passage une description explicite (en terme de cup-produit) des accouplements des théorèmes 5.7, 5.12 et 5.14.

Borovoi identifie certains des groupes qui apparaissent dans la suite (17) (voir [Bor98], chapitre 4), de façon fonctorielle en C : $\mathbf{H}^i(k, \check{C} \otimes \bar{k}^*) \cong \mathbf{H}^i(k, C)$ pour tout i , $\mathbf{H}^i(k, \check{C} \otimes \bar{\mathbf{A}}^*) \cong \bigoplus_v \mathbf{H}^i(\widehat{k}_v, C)$ pour $i \geq 1$. On identifie également le groupe $\mathbf{H}^0(k, \check{C} \otimes \bar{\mathbf{A}}^*) \cong \mathbf{P}^0(k, C)$, et on remarque que le morphisme $\mathbf{H}^3(k, C) \rightarrow \mathbf{P}^3(k, C)$ est un isomorphisme. Enfin, on dispose des accouplements de dualité globale suivants, induits par le cup-produit :

$$\mathbf{H}^i(k, \check{C} \otimes \bar{\mathbf{C}}^*) \times \mathbf{H}^{1-i}(k, \widehat{C}) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \quad (18)$$

pour tout i , induisant des isomorphismes $\mathbf{H}^1(k, \check{C} \otimes \bar{\mathbf{C}}^*) \cong \mathbf{H}^0(k, \widehat{C})^D$ et $\mathbf{H}^2(k, \check{C} \otimes \bar{\mathbf{C}}^*) \cong \mathbf{H}^{-1}(k, \widehat{C})^D$ (voir par exemple [Mil06], exemple I.1.11 et corollaire I.4.7). On utilise également les isomorphismes de dualité suivants, qui s'obtiennent par dévissage à partir du cas des tores (voir [Mil06], corollaire I.4.7) :

$$\mathbf{H}^0(k, \check{C} \otimes \bar{\mathbf{C}}^*)^\wedge \cong \mathbf{H}^1(k, \widehat{C})^D$$

$$\mathbf{H}^{-1}(k, \check{C} \otimes \overline{C}^*)^\wedge \cong \mathbf{H}^2(k, \widehat{C})^D$$

Enfin, on a besoin d'identifier les flèches de dualité globale, c'est-à-dire qu'il faut comparer les morphismes $\mathbf{H}^i(k, \widehat{C})^D \rightarrow \mathbf{H}^{2-i}(k, C)$ induits respectivement par les théorèmes 5.7, 5.12 et 5.14, et par les identifications précédentes dans la suite exacte (17). Pour cela, on va utiliser la section 6 de [HS05] : on considère les trois suites exactes suivantes de complexes de Γ_k -modules :

$$0 \rightarrow C(\overline{k}) \rightarrow C(\overline{\mathbf{A}}) \rightarrow C(\overline{\mathbf{C}}) \rightarrow 0 \quad (19)$$

$$0 \rightarrow \widehat{C}(\overline{k}) \rightarrow \widehat{C}(\overline{\mathbf{A}}) \rightarrow \widehat{C}(\overline{\mathbf{C}}) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \overline{k}^*[1] \rightarrow \overline{\mathbf{A}}^*[1] \rightarrow \overline{\mathbf{C}}^*[1] \rightarrow 0$$

où par définition $C(\overline{\mathbf{C}})$ est le complexe $[T_1(\overline{\mathbf{A}})/T_1(\overline{k}) \rightarrow T_2(\overline{\mathbf{A}})/T_2(\overline{k})]$ (et de même pour $\widehat{C}(\overline{\mathbf{C}})$). On remarque d'abord que l'on a un isomorphisme naturel de suites exactes courtes entre la suite (16) et la suite (19). On dispose d'un accouplement naturel

$$C(\overline{\mathbf{A}}) \otimes^{\mathbf{L}} \widehat{C}(\overline{\mathbf{A}}) \rightarrow \overline{\mathbf{A}}^*[1]$$

induisant l'accouplement usuel

$$C(\overline{k}) \otimes^{\mathbf{L}} \widehat{C}(\overline{k}) \rightarrow \overline{k}^*[1]$$

On en déduit alors comme dans la section 6 de [HS05] un accouplement

$$\mathrm{Ker}(\mathbf{H}^i(k, C(\overline{k})) \rightarrow \mathbf{H}^i(k, C(\overline{\mathbf{A}}))) \times \mathrm{Ker}(\mathbf{H}^{2-i}(k, \widehat{C}(\overline{k})) \rightarrow \mathbf{H}^{2-i}(k, \widehat{C}(\overline{\mathbf{A}}))) \rightarrow H^2(k, \overline{\mathbf{C}}^*) \cong \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \quad (20)$$

défini explicitement par le cup-produit

$$\mathbf{H}^{i-1}(k, C(\overline{\mathbf{C}})) \times \mathbf{H}^{2-i}(k, \widehat{C}(\overline{k})) \rightarrow H^2(k, \overline{\mathbf{C}}^*) \cong \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

Or on peut identifier les deux groupes apparaissant dans l'accouplement (20) :

$$\mathrm{Ker}(\mathbf{H}^i(k, C(\overline{k})) \rightarrow \mathbf{H}^i(k, C(\overline{\mathbf{A}}))) \cong \mathbb{H}^i(k, C) \text{ et } \mathrm{Ker}(\mathbf{H}^{2-i}(k, \widehat{C}(\overline{k})) \rightarrow \mathbf{H}^{2-i}(k, \widehat{C}(\overline{\mathbf{A}}))) \cong \mathbb{H}^{2-i}(k, \widehat{C}).$$

Et la preuve de la proposition 6.1 de [HS05] (adaptée au contexte des complexes de tores) assure que les accouplements (20) coïncident avec les accouplements des théorèmes 5.7, 5.12 et 5.14. Cette identification donne en particulier une description explicite des accouplements apparaissant dans ces théorèmes, en termes de cup-produits en cohomologie galoisienne. Pour finir la comparaison avec la suite exacte (17), il suffit de constater que le diagramme suivant est commutatif (pour $i = 0, 1, 2$) :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{H}^{i-1}(k, \check{C} \otimes \overline{C}^*) & \xrightarrow{\phi} & \mathbf{H}^{2-i}(k, \widehat{C})^D \\ \downarrow \partial_{\mathbf{B}} & & \downarrow \partial_{\mathbf{PT}} \\ \mathbf{H}^i(k, \check{C} \otimes \overline{k}^*) & \xrightarrow{\psi} & \mathbf{H}^i(k, C) \end{array}$$

(en remplaçant $\mathbf{H}^i(k, C)$ par son complété pour $i = 0$), où le morphisme $\partial_{\mathbf{B}}$ est le cobord provenant de la suite exacte (16), $\partial_{\mathbf{PT}}$ provient des théorèmes de dualité globale 5.7, 5.12 et 5.14, ϕ est induit par le cup-produit (18) et ψ est l'identification naturelle $\mathbf{H}^i(k, \check{C} \otimes \overline{k}^*) \cong \mathbf{H}^i(k, C)$ (composée avec la complétion si $i = 0$). Et cette commutativité résulte facilement de la comparaison établie précédemment entre les accouplements des théorèmes 5.7, 5.12 et 5.14 et les accouplements (20).

On peut ainsi résumer les résultats de cette section sous la forme suivante : on a un diagramme commutatif de suites exactes, fonctoriel en C , entre la suite exacte longue (17) et la suite exacte de Poitou-Tate du théorème 6.1 :

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{H}^{-1}(k, \check{C} \otimes \bar{k}^*) & \hookrightarrow & \mathbf{H}^{-1}(k, \check{C} \otimes \bar{A}^*) & \longrightarrow & \mathbf{H}^{-1}(k, \check{C} \otimes \bar{C}^*) & & \\
\searrow \cong & & \searrow \cong & & \downarrow & \searrow & \\
\mathbf{H}^{-1}(k, C) & \hookrightarrow & \mathbf{P}^{-1}(k, C) & \longrightarrow & \mathbf{H}^2(k, \widehat{C})^D & & \\
\downarrow & & & & \downarrow & & \\
\mathbf{H}^0(k, \check{C} \otimes \bar{C}^*) & \longleftarrow & \mathbf{H}^0(k, \check{C} \otimes \bar{A}^*) & \longleftarrow & \mathbf{H}^0(k, \check{C} \otimes \bar{k}^*) & & \\
\downarrow & \searrow & \searrow & \longleftarrow & \searrow & & \\
\mathbf{H}^1(k, \widehat{C})^D & \longleftarrow & \mathbf{P}^0(k, C)^\wedge & \longleftarrow & \mathbf{H}^0(k, C)^\wedge & & \\
\downarrow & & & & \downarrow & & \\
\mathbf{H}^1(k, \check{C} \otimes \bar{k}^*) & \longrightarrow & \mathbf{H}^1(k, \check{C} \otimes \bar{A}^*) & \longrightarrow & \mathbf{H}^1(k, \check{C} \otimes \bar{C}^*) & & \\
\searrow \cong & & \searrow \cong & & \downarrow & \searrow \cong & \\
\mathbf{H}^1(k, C) & \longrightarrow & \mathbf{P}^1(k, C) & \longrightarrow & \mathbf{H}^0(k, \widehat{C})^D & & \\
\downarrow & & & & \downarrow & & \\
\mathbf{H}^2(k, \check{C} \otimes \bar{C}^*) & \longleftarrow & \mathbf{H}^2(k, \check{C} \otimes \bar{A}^*) & \longleftarrow & \mathbf{H}^2(k, \check{C} \otimes \bar{k}^*) & & \\
\searrow \cong & & \searrow \cong & & \searrow \cong & & \\
\mathbf{H}^{-1}(k, \widehat{C})^D & \longleftarrow & \mathbf{P}^2(k, C) & \longleftarrow & \mathbf{H}^2(k, C) & &
\end{array}$$

où les flèches obliques qui ne sont pas des isomorphismes sont des flèches de complétion profinie. On peut donc dire en quelque sorte que la suite de Poitou-Tate du théorème 6.1 est la complétion profinie de la suite d'hypercohomologie (4.3.1) de [Bor98]. Le fait de considérer la suite "complétée" fait apparaître des groupes plus facilement identifiables : par exemple, si C est un complexe de tores associé à un k -groupe réductif (voir [Bor98] par exemple), le groupe $\mathbf{H}^0(k, \check{C} \otimes \bar{C})$ peut sembler mystérieux dans ce contexte, alors que sa complétion profinie s'identifie naturellement au dual du groupe de Brauer algébrique de G , ce qui sera très utile dans les applications (voir [Dem09]).

6.2 Cas où ρ est surjective

Dans cette partie, on établit une suite exacte de Poitou-Tate pour un groupe de type multiplicatif.

Théorème 6.3. *Soit M un k -groupe de type multiplicatif. On a alors une suite exacte fonctorielle*

en M :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & H^0(k, M)^\wedge & \longrightarrow & P^0(k, M)^\wedge & \longrightarrow & H^2(k, \widehat{M})^D \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & H^1(k, \widehat{M})^D & \longleftarrow & P^1(k, M) & \longleftarrow & H^1(k, M) \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & H^2(k, M) & \longrightarrow & P^2(k, M) & \longrightarrow & H^0(k, \widehat{M})^D \longrightarrow 0
 \end{array}$$

On dispose également de la suite exacte duale :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & H^0(k, \widehat{M})^\wedge & \longrightarrow & P^0(k, \widehat{M})^\wedge & \longrightarrow & H^2(k, M)^D \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & H^1(k, M)^D & \longleftarrow & P^1(k, \widehat{M}) & \longleftarrow & H^1(k, \widehat{M}) \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & H^2(k, \widehat{M}) & \longrightarrow & P^2(k, \widehat{M})_{\text{tors}} & \longrightarrow & (H^0(k, M)^D)_{\text{tors}} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Démonstration : On voit M comme le noyau d'un morphisme surjectif de k -tores, $M := \text{Ker}(\rho : T_1 \rightarrow T_2)$, et on note $C := [T_1 \xrightarrow{\rho} T_2]$ le complexe de tores associé. On a bien un quasi-isomorphisme $C \cong M[1]$. La preuve est très similaire à celle du théorème 6.1, à la différence que l'on utilise ici $\varinjlim_n T_{\mathbf{Z}/n}(C) = 0$ alors que dans la preuve du théorème 6.1 on avait utilisé $\varprojlim_n \text{Ker } \rho = 0$.

– Pour la première ligne, on montre par dévissage à l'aide du triangle exact

$${}_n T_1 \rightarrow {}_n T_2 \rightarrow (C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)[-1] \rightarrow {}_n T_1[1]$$

l'exactitude de la suite suivante

$$\varprojlim_n \mathbf{H}^{-1}(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \rightarrow \varprojlim_n \mathbf{P}^{-1}(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \rightarrow \varprojlim_n \mathbf{H}^1(k, \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$$

Pour cela, on utilise notamment le fait que $\varinjlim_n \text{III}^1(k, {}_n T_i) = \text{Ker}(T_i(k)_\wedge \rightarrow P^0(k, T_i)_\wedge) = 0$, ainsi que la finitude du groupe $\text{III}^0(C)$.

– Pour la deuxième ligne, on déduit l'exactitude de la suite $\varinjlim_n \mathbf{H}^{-1}(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \rightarrow \varinjlim_n \mathbf{P}^{-1}(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \rightarrow \varinjlim_n \mathbf{H}^1(k, \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$ du fait que $\varinjlim_n T_{\mathbf{Z}/n}(C) = 0$, et on conclut par finitude de $\text{III}^2(\widehat{C})$.

– Pour la troisième ligne, la suite $\varinjlim_n \mathbf{H}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \rightarrow \varinjlim_n \mathbf{P}^0(k, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \rightarrow \varinjlim_n \mathbf{H}^0(k, \widehat{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$ est exacte, et on conclut par finitude de $\text{III}^1(\widehat{C})$ et par le fait que $\mathbf{H}^1(k, C)$ et $\mathbf{P}^1(k, C)$ sont de torsion.

– Pour la suite duale, on utilise des arguments similaires.

□

Références

- [AGV73] Michael Artin, Alexander Grothendieck, and Jean-Louis Verdier, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas.*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 269-270-305, Springer-Verlag, Berlin, 1973, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA

- 4), Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck, et J. L. Verdier. Avec la collaboration de N. Bourbaki, P. Deligne et B. Saint-Donat.
- [BLR90] Siegfried Bosch, Werner Lütkebohmert, and Michel Raynaud, *Néron models*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], vol. 21, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [Bor98] Mikhail Borovoi, *Abelian Galois cohomology of reductive groups*, Mem. Amer. Math. Soc. **132** (1998), no. 626, viii+50.
- [Bor99] ———, *A cohomological obstruction to the Hasse principle for homogeneous spaces*, Math. Ann. **314** (1999), no. 3, 491–504.
- [Bor09] ———, *Lettre à l'auteur*, 16 janvier 2009.
- [Del74] Pierre Deligne, *Théorie de Hodge. III*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1974), no. 44, 5–77.
- [Dem09] Cyril Demarche, *Le défaut d'approximation forte dans les groupes linéaires connexes*, disponible sur <http://www.math.u-psud.fr/~demarche/AFgroupes.pdf>, 2009.
- [DG70] Michel Demazure and Alexander Grothendieck, *Schémas en groupes.*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1962/64 (SGA 3). Dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 151-152-153, Springer-Verlag, Berlin, 1970.
- [GA08] Cristian D González-Avilés, *Arithmetic duality theorems for 1-motives over function fields*, disponible sur <http://arxiv.org/abs/0709.4255>, 2008.
- [Gre66] Marvin J. Greenberg, *Rational points in Henselian discrete valuation rings*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1966), no. 31, 59–64.
- [HR79] Edwin Hewitt and Kenneth A. Ross, *Abstract harmonic analysis. Vol. I*, second ed., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 115, Springer-Verlag, Berlin, 1979, Structure of topological groups, integration theory, group representations.
- [HS05] David Harari and Tamás Szamuely, *Arithmetic duality theorems for 1-motives*, J. reine angew. Math. **578** (2005), 93–128, et *Corrigenda for "Arithmetic duality theorems for 1-motives"*, disponible sur <http://www.math.u-psud.fr/~harari/errata/corrigrelle.pdf>.
- [Jen72] C. U. Jensen, *Les foncteurs dérivés de \lim et leurs applications en théorie des modules*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 254, Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [Jos09] Peter Jossen, *The arithmetic of 1-motives*, Thèse, 2009.
- [KS99] Robert E. Kottwitz and Diana Shelstad, *Foundations of twisted endoscopy*, Astérisque (1999), no. 255, vi+190.
- [Mil80] James S. Milne, *Étale cohomology*, Princeton Mathematical Series, vol. 33, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1980.
- [Mil06] J. S. Milne, *Arithmetic duality theorems*, second ed., BookSurge, LLC, Charleston, SC, 2006.
- [NSW08] Jürgen Neukirch, Alexander Schmidt, and Kay Wingberg, *Cohomology of number fields*, second ed., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 323, Springer-Verlag, Berlin, 2008.
- [Ser94] Jean-Pierre Serre, *Cohomologie galoisienne*, fifth ed., Lecture Notes in Mathematics, vol. 5, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [Wei94] Charles A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 38, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

Cyril Demarche
Laboratoire de Mathématiques, Bâtiment 425, Université de Paris-Sud, F-91405 Orsay, France
e-mail : cyril.demarche@math.u-psud.fr