Corrigé de l'examen du 16/01/18.

Exercice 2 :

a) $$P_A = \begin{vmatrix} 3-X & -2 & 1 \\ 4 & -3-X & 1 \\ 7 & -8 & 3-X \end{vmatrix} \overset{C_3 \leftarrow C_3+C_2+C_1}{=} \begin{vmatrix} 3-X & -2 & 2-X \\ 4 & -3-X & 2-X \\ 7 & -8 & 2-X \end{vmatrix} = (2-X)\begin{vmatrix} 3-X & -2 & 1 \\ 4 & -3-X & 1 \\ 7 & -8 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3}}{=} (2-X) \cdot \begin{vmatrix} -4-X & 6 & 0 \\ -3 & 5-X & 0 \\ 7 & -8 & 1 \end{vmatrix} = (2-X)\left[(4+X)(X-5)+18\right]$$

$$= (2-X) \cdot \left(X^2-X-2\right) = (2-X)(X-2)(X+1)$$

$$= -(X+1)(X-2)^2$$

b) les valeurs propres sont : * -1, de multiplicité algébrique 1.

* 2, ——— 2.

c) $\det A =$ produit des valeurs propres $= (-1) \cdot 2^2 = -4$.

d) $\cdot$ $A + I_3 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 7 & -8 & 4 \end{pmatrix}$ est clairement de rang 2,

donc $\dim \operatorname{Ker}(A+I_3) = 1$.

Or $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(A+I_3)$, donc ce vecteur forme une base de cet espace.

$\cdot$ $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -5 & 1 \\ 7 & -8 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 2,

donc $\dim \operatorname{Ker}(A-2I_3) = 1$.

e) • $\dim E_2(A) = 1 < 2 =$ multiplicité ~~deg~~ de la valeur propre 2,

donc A n'est pas diagonalisable.

• P_A est scindé, donc A est trigonalisable.

• le cours assure que la forme normale de Jordan de A est :

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

f) il est clair que $e_3 \notin \operatorname{Ker}(A-2I_3)$ (voir d)).

et $(A-2I_3)^2 \cdot e_3 = (A-2I_3)\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $e_3 \in \operatorname{Ker}\left((A-2I_3)^2\right)$

g). On note $e_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, vecteur propre pour -1.

• On note $e_2 := Ae_3 - 2e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} := (e_1, e_2, e_3)$ base de $\mathbb{R}^3$.

Alors $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(a) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = J.$

h) i) $P_{{}^tA} = \det({}^tA - XI_3) = \det\left({}^t(A - XI_3)\right) = \det(A - XI_3) = P_A.$

ii) A et ${}^tA$ sont semblables, donc la forme normale de ${}^tA$ est J.
(mêmes valeurs propres, ${}^tA$ trigonalisable pas diagonalisable).

iii) Reprendre les questions f) et g) en remplaçant A par ${}^tA$:

${}^tA - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ -2 & -5 & -8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, donc $({}^tA - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -9 & -18 \\ 0 & 9 & 18 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

donc $f_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}\left(({}^tA - 2I)^2\right) \setminus \operatorname{Ker}({}^tA - 2I)$

on pose $f_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vecteur propre de ${}^tA$ pour la valeur propre -1,

$$f_2 := {}^tA . f_3 - 2f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{C} := (f_1, f_2, f_3)$.

Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(a) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = J$.

Exercice 1 :

a) Une base de E est donnée par les matrices élémentaires :

$E_{i,j}$:= matrice $n \times n$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui en degré (i,j), qui vaut 1.

$1 \leq i,j \leq n$.

Donc $\dim E = n^2$.

b) on observe que, pour tout $A \in E$, $\varphi(\varphi(A)) = {}^t({}^tA) = A$.

donc $\varphi \circ \varphi = id_E$, donc φ est bijective et $\varphi^{-1} = \varphi$.

c) on a vu que $\varphi^2 = id$, donc φ est annulé par $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ scindé à racines simples 1 et -1, dans $\mathbb{R}$.

Donc φ est diagonalisable.

d) on a
$$\begin{cases} \varphi(I_n) = I_n, \text{ donc } 1 \text{ est valeur propre de } \varphi. \\ \varphi\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & (0) \\ -1 & 0 & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{(0)} & (0) \end{array}\right) = -\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & (0) \\ -1 & 0 & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{(0)} & (0) \end{array}\right), \text{ donc } -1 \text{ est valeur propre de } \varphi. \end{cases}$$
$$\underbrace{\quad}_{2} \; \underbrace{\quad}_{n-2}$$

• Espaces propres :

. $E_1(\varphi) := \{A \in E : {}^tA = A\} = \{\text{matrices symétriques}\}$

Une matrice symétrique est déterminée par ses coefficients sur et au-dessus de la diagonale,

donc $\dim E_1(\varphi) = \frac{n(n+1)}{2}$.

. $E_{-1}(\varphi) := \{A \in E : {}^tA = -A\} = \{\text{matrices anti-symétriques}\}$

Une matrice anti-symétrique est déterminée par ses coefficients strictement au-dessus de la diagonale,

donc $\dim E_{-1}(\varphi) = \frac{n(n-1)}{2}$.

e) φ est diagonalisable, ses valeurs propres sont 1 et -1,

donc $E = E_1(\varphi) \oplus E_{-1}(\varphi)$.

f) il suffit de trouver des bases de $E_1(\varphi)$ et $E_{-1}(\varphi)$:

Une base de $E_1(\varphi)$ est donnée par les matrices :

$$\begin{cases} E_{i,j} + E_{j,i} & , 1 \leq i < j \leq n \\ E_{i,i} & , 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Une base de $E_{-1}(\varphi)$ est donnée par :

$$E_{i,j} - E_{j,i} \quad , 1 \leq i < j \leq n.$$

Il suffit alors de concaténer ces deux bases pour obtenir ~~une~~ base B recherchée.

g) $\mathrm{Mat}_B(\varphi) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & -I_s \end{array}\right)$ où $r = \frac{n(n+1)}{2}$ et $s = \frac{n(n-1)}{2}$.

donc $\det \varphi = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

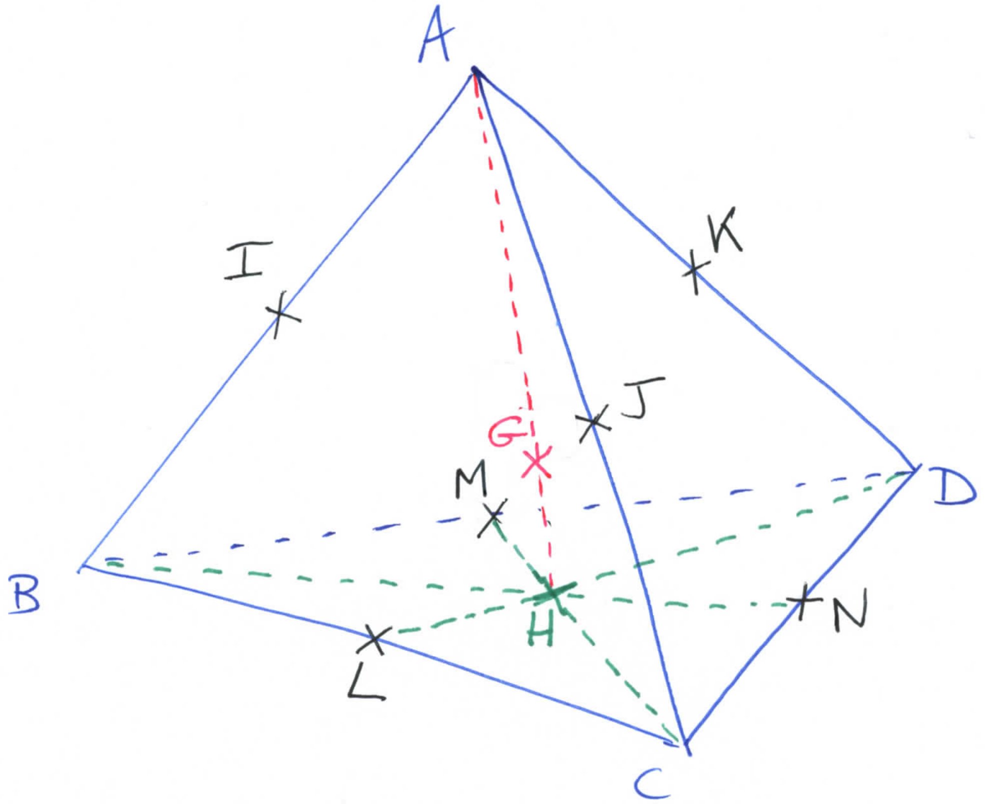
de même, $\mathrm{tr}(\varphi) = r - s = n$

et le polynôme caractéristique vaut : $P_\varphi(X) = (1-X)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot (-1-X)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

i.e. $P_\varphi(X) = (-1)^n \cdot (X-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot (X+1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Exercice 3 :

a)



b) par définition, $H = \text{Bar}((B,1),(C,1),(D,1))$

et $G = \text{Bar}((A,1),(B,1),(C,1),(D,1))$,

donc par associativité du barycentre,

$$G = \text{Bar}((A,1),(H,3)). \quad (*)$$

donc $G \in (AH)$.

en outre, $(*)$ assure que $4\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{HA} + 3\overrightarrow{HH}$,

donc $4\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{HA}$, i.e. $\overrightarrow{HG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{HA}$.

c) comme $I = \text{Bar}((A,1),(B,1))$ et $N = \text{Bar}((C,1),(D,1))$, par associativité du barycentre on a : $G = \text{Bar}((I,2),(N,2))$,

donc G est le milieu de $[IN]$.

Symétriquement, G est le milieu de $[JM]$ et de $[KL]$.

d) Ces 6 plans affines ont le point G en commun. Plus précisément, G est l'intersection de ces 6 plans :

en effet $(AH) \subseteq (ABN), (ACM), (ADL)$ car H est l'intersection des médianes de (BCD).

Mieux, $(AH) = (ABN) \cap (ACM) \cap (ADL)$ car ces trois plans ne sont pas confondus (A, B, C, D non coplanaires).

De même, $G = \mathrm{Bar}((K,2),(B,1),(C,1))$, donc $G \in (BCK)$,

$G = \mathrm{Bar}((J,2),(B,1),(D,1))$, donc $G \in (BCD)$

et $G = \mathrm{Bar}((I,2),(C,1),(D,1))$, donc $G \in (CDI)$.

donc G est sur ces 6 plans.

enfin, $A \notin (BCK)$, car sinon $(A, B, C, D$ seraient coplanaires

donc l'intersection est exactement G.

e) i) $A\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $D\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$,

$G\begin{pmatrix}1/4\\1/4\\1/4\end{pmatrix}$, $H\begin{pmatrix}1/3\\1/3\\1/3\end{pmatrix}$, $I\begin{pmatrix}1/2\\0\\0\end{pmatrix}$, $J\begin{pmatrix}0\\1/2\\0\end{pmatrix}$,

$K\begin{pmatrix}0\\0\\1/2\end{pmatrix}$, $L\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\0\end{pmatrix}$, $M\begin{pmatrix}1/2\\0\\1/2\end{pmatrix}$, $N\begin{pmatrix}0\\1/2\\1/2\end{pmatrix}$.

ii) il suffit de trouver une équation affine non triviale vérifiée par I, J et K.

Par exemple, $x+y+z=\frac{1}{2}$ est une équation du plan (IJK) dans ce repère.

iii) Les coordonnées $\begin{pmatrix}1/4\\1/4\\1/4\end{pmatrix}$ ne vérifient pas l'équation $x+y+z=\frac{1}{2}$, donc $G \notin (IJK)$.

iv) Par associativité :

$$\mathrm{Bar}\big((I,1),(J,1),(M,1),(N,1)\big) = \mathrm{Bar}\Big((A,\tfrac{1}{2}),(B,\tfrac{1}{2}),(A,\tfrac{1}{2}),(C,\tfrac{1}{2}),(B,\tfrac{1}{2}),(D,\tfrac{1}{2}),(C,\tfrac{1}{2}),(D,\tfrac{1}{2})\Big)$$

$$= \mathrm{Bar}\big((A,1),(B,1),(C,1),(D,1)\big) = G.$$

On peut aussi le vérifier en coordonnées.

Il est clair que I, J, M, N et G vérifient l'équation :

$$x+y=\frac{1}{2}.$$

donc les points I, J, M, N, G sont coplanaires, sur le plan d'équation $x+y=\frac{1}{2}$.