Examen du 18 janvier 2019

Durée : 2 heures

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique est interdite.

Exercice 1 : On considère la matrice suivante

$$A := \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 6 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R})\,.$$

et on note $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorphisme défini par $\varphi(v) := Av$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. En déduire que A admet une unique valeur propre λ que l'on déterminera.
3. En déduire le déterminant de A.
4. Déterminer la dimension de l'espace propre associé à λ.
5. Déterminer le polynôme minimal de A.
6. La matrice A est-elle diagonalisable (sur $\mathbb{R}$) ? Est-elle trigonalisable (sur $\mathbb{R}$) ?
7. Quelle est sa forme normale de Jordan ?
8. Déterminer explicitement une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ telle que la matrice de φ dans $\mathcal{B}$ soit la matrice J de Jordan obtenue à la question 7.
9. Déterminer une matrice $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ telle que $A = PJP^{-1}$.
10. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice J^n.
11. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice A^n.

Exercice 2 : On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$. On définit les parties $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H} \subset E$ de la façon suivante :

— $\mathcal{F}$ est le sous-espace affine de E engendré par les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

— $\mathcal{G}$ est l'ensemble des solutions $X \in E$ du système linéaire $AX = B$, avec $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ et $B := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

— $\mathcal{H}$ est l'ensemble des vecteurs de E dont la somme des coordonnées dans la base canonique de E vaut 4.

1. Montrer que $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont des sous-espaces affines de E.
2. Déterminer les directions respectives F, G et H des sous-espaces affines précédents.
3. Quelles sont les dimensions de $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$.
4. Montrer que $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}$.
5. Déterminer un système minimal d'équations affines de $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{G}$, resp. $\mathcal{H}$).
6. Déterminer un repère affine de $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{G}$, resp. $\mathcal{H}$).

Tourner la page SVP

7. Déterminer $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$.
8. Déterminer $\mathcal{G} \cap \mathcal{H}$.

Exercice 3 : Soit $A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ une matrice carrée à coefficients réels de taille 2. On suppose que A est annulée par le polynôme X^2+1. On désigne par $i \in \mathbb{C}$ une racine carrée de -1.

1. La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Trigonalisable ?
2. Déterminer les valeurs propres complexes de A et leur multiplicité. La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$?
3. Montrer que A est inversible et $A^{-1} = -A$.

Pour un nombre complexe $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ on pose $\bar{z} = x - iy$. On rappelle qu'un nombre complexe z est réel si et seulement si $z = \bar{z}$. Pour un vecteur $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$, on pose $\bar{z} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix}$.

4. Soit $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ un vecteur propre pour i. Montrer que $\bar{z}$ est un vecteur propre pour $-i$.
5. En déduire que z et $\bar{z}$ sont linéairement indépendants.
6. Déterminer la matrice de l'application $\mathbb{C}$-linéaire $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, définie par $v \mapsto Av$, dans la base $z, \bar{z}$.
7. Montrer que les vecteurs $w_1 = z + \bar{z}$, $w_2 = i(z - \bar{z})$ sont à coefficients réels (on rappelle qu'on a $\overline{\lambda\mu} = \bar{\lambda}\bar{\mu}$).
8. Montrer que w_1 et w_2 sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^2$.
9. Déterminer la matrice de l'application $\mathbb{R}$-linéaire $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, définie par $v \mapsto Av$, dans la base w_1, w_2.