CORRIGÉ DE L'EXAMEN DU 18/01/2019

Exercice 1 :

1. $P_A(X) = \begin{vmatrix} 6-X & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4-X & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 6-X & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 8-X \end{vmatrix} = (6-X) \cdot \begin{vmatrix} 4-X & 1 & 2 \\ 0 & 6-X & 0 \\ -2 & 1 & 8-X \end{vmatrix} = (6-X)^2 \cdot \begin{vmatrix} 4-X & 2 \\ -2 & 8-X \end{vmatrix}$

$= (X-6)^2 \cdot (X^2 - 12X + 36) = (X-6)^4$.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. λ est valeur propre de $A \iff P_A(\lambda) = 0 \iff \underline{\lambda = 6}$.

3. Le déterminant de A est le coefficient constant de P_A, i.e. le produit des valeurs propres (avec multiplicité) car P_A est scindé.

donc $\det A = 6^4 = 1296$.

4. $A - \lambda I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

En faisant l'opération $L_4 \leftarrow L_4 - L_2$, on obtient la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

qui est clairement de rang 2.

Par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(A - 6I_4)) = 2$.

5. Le théorème de Cayley-Hamilton assure que le polynôme minimal m_A de A divise P_A.

or $A \neq I_4$, donc $m_A \neq X-6$. Donc $m_A = (X-6)^2, (X-6)^3$ ou $(X-6)^4$.

on calcule $A - 6I_4 \neq 0$, et $(A-6I_4)^2 = 0$.

Donc $m_A = (X-6)^2$.

6. Le polynôme m_A admet une racine double, donc A n'est pas diagonalisable. Le polynôme P_A est scindé, donc A est trigonalisable.

7. Comme A admet une unique valeur propre (et P_A scindé), dont la multiplicité géométrique est 2, sa forme normale de Jordan est formée de deux blocs.

En outre, m_A est de degré 2, donc ces deux blocs sont de taille ≤ 2. Par conséquent, la seule matrice de Jordan vérifiant ces contraintes est :

$$J = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

8. puisque $A - 6I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, on voit que $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

sont deux vecteurs indépendants dans $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Ker}((A-6I_4)^2) \setminus \mathrm{Ker}(A-6I_4)$

Notons $e_1 := (A-6I_4)e_2$ et $e_3 := (A-6I_4) \cdot e_4$: $e_1, e_3 \in \mathrm{Ker}(A-6I_4)$.

Le cours assure alors que $\mathcal{B} := (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$,

et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = J$.

$e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

9. La matrice P est la matrice de changement de bases entre $\mathcal{B}$ et la base canonique, i.e :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

10. notons $K := \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$. Alors $K^2 = \begin{pmatrix} 6^2 & 2.6 \\ 0 & 6^2 \end{pmatrix}$, et une récurrence immédiate assure que $K^n = \begin{pmatrix} 6^n & n.6^{n-1} \\ 0 & 6^n \end{pmatrix}$ pour tout $n \geq 0$.

Donc pour tout $n \geqslant 0$, $J^n = \begin{pmatrix} 6^n & n6^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 6^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6^n & n6^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 6^n \end{pmatrix}$

Autre méthode : $K = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N}$, et ces deux matrices commutent.

Par la formule du binôme, comme $N^2 = 0$, on a :

si $n \geqslant 1$, $K^n = (D+N)^n = D^n + nD^{n-1} \cdot N = \begin{pmatrix} 6^n & 0 \\ 0 & 6^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 6^{n-1} & 0 \\ 0 & 6^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 6^n & n6^{n-1} \\ 0 & 6^n \end{pmatrix}.$$

11. On a $A = PJP^{-1}$, donc pour $n \geqslant 0$, on a :

$$A^n = (PJP^{-1})^n = P.J^n.P^{-1}$$

on peut calculer P^{-1}, on obtient $P^{-1} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 8 & -1 & -2 \\ -4 & 0 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Donc $A^n = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6^n & n6^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 6^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6^n & n6^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 6^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 8 & -1 & -2 \\ -4 & 0 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

Tous calculs faits, il reste donc :

$$A^n = \begin{pmatrix} 6^n & 0 & 0 & 0 \\ 5n6^{n-1} & -2(n-3)6^{n-1} & n6^{n-1} & 2n6^{n-1} \\ 4n6^{n-1} & 0 & 6^n & 0 \\ 3n6^{n-1} & -2n6^{n-1} & n6^{n-1} & 2(n+3)6^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Autre méthode : (sans utiliser P).

on écrit $J = 6 \cdot I_4 + N$, avec $N := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Donc $A = 6I_4 + \underbrace{PNP^{-1}}_{N'}$.

Or $N^2 = 0$, donc $N'^2 = 0$.

et $N' = A - 6I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Alors $A^n = 6^n \cdot I_4 + n \cdot 6^{n-1} \cdot N'$ par le binôme de Newton.

donc $A^n = \begin{pmatrix} 6^n & 0 & 0 & 0 \\ 5n6^{n-1} & -2(n-3)6^{n-1} & n6^{n-1} & 2n6^{n-1} \\ 4n6^{n-1} & 0 & 6^n & 0 \\ 3n6^{n-1} & -2n6^{n-1} & n6^{n-1} & 2(n+3)6^{n-1} \end{pmatrix}$.

Exercice 2 :

1. • $\mathcal{F}$ est un ss-espace affine par définition.

• $\mathcal{G}$ est l'ensemble des solutions d'un système d'équations affines, et $\mathcal{G} \neq \emptyset$ car $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \in \mathcal{G}$.

donc $\mathcal{G}$ est un sous-espace affine de E.

• $\mathcal{H}$ est l'ensemble des solutions de l'équation affine $x_1+x_2+x_3+x_4=4$, et $\mathcal{H} \neq \emptyset$ car $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \in \mathcal{H}$, donc $\mathcal{H}$ est un sous-espace affine de E.

2. • La direction F de $\mathcal{F}$ est exactement

$$F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\0\\2\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}3\\0\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}2\\-1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$$

Or $\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$, donc $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}\right)$.

• de même, par le cours, $G = \mathrm{Ker}\, A$.

• enfin, $H = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \in E : x_1+x_2+x_3+x_4=0\right\}$.

3. • $\dim \mathcal{F} = \dim F = 2$, car les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$ forment une famille libre.

• $\dim \mathcal{G} = \dim G = \dim \mathrm{Ker}\, A = 4 - \mathrm{rg}\, A$.

or en faisant des opérations sur les colonnes :

$$A \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1 \\ C_4 \leftarrow C_4 - 4C_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{C_4 \leftarrow C_4 - C_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc A est de rang 2, donc $\dim \mathcal{G} = 2$.

- H est un hyperplan de E, donc $\dim \mathcal{H} = 3$.

4. il suffit de vérifier que les quatres points qui engendrent $\mathcal{F}$ vérifient que la somme de leurs coordonnées vaut 4 : $\begin{cases} 1+1+1+1=4 \\ 2+0+2+0=4 \\ 2+1+0+1=4 \\ 3+0+1+0=4 \end{cases}$

donc $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}$.

5. • $\dim \mathcal{F} = 2$, donc il suffit de trouver deux équations affines indépendantes vérifiées par les 4 points engendrant $\mathcal{F}$:

$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$ conviennent.

• $\dim \mathcal{G} = 2$: deux équations indépendantes suffisent :

$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$ conviennent.

• $\dim \mathcal{H} = 3$: une équation suffit, et par définition

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$ convient.

6. • La question 2 assure que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est un repère affine de $\mathcal{F}$.

• Une base de $G = \operatorname{Ker} A$ est $\left(\begin{pmatrix}3\\0\\-1\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}2\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$, d'après 3 ; et $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \in \mathcal{G}$,

donc un repère affine de $\mathcal{G}$ est $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}4\\0\\-1\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}3\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$.

• $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \in \mathcal{H}$, et une base de H est $\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$, donc un repère affine

de $\mathcal{H}$ est $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$.

Un autre repère affine naturel de $\mathcal{H}$ est $\left(\begin{pmatrix}4\\0\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\4\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\4\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\0\\4\end{pmatrix}\right)$...

7. $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont de dimension 2, et en combinant leurs équations, on obtient

des équations de $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_3 = 4 \\ x_2 = 0 \\ x_1 + 3x_3 = 1 \\ x_4 = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x_1 = \frac{11}{2} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -\frac{3}{2} \\ x_4 = 0 \end{cases}$

Donc $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est le point de coordonnées $\begin{pmatrix}\frac{11}{2}\\0\\-3/2\\0\end{pmatrix}$.

8. $\dim \mathcal{G} = 2$, $\dim \mathcal{H} = 3$, et $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}$.

donc $\begin{pmatrix}11/2\\0\\-3/2\\0\end{pmatrix} \in \mathcal{G} \cap \mathcal{H}$.

En considérant les équations, on obtient pour $\mathcal{G} \cap \mathcal{H}$: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$

Ces équations sont indépendantes et $\mathcal{G} \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$,

donc $\mathcal{H} \cap \mathcal{G}$ est une droite affine.

C'est la droite joignant les points $\begin{pmatrix} 11/2 \\ 0 \\ -3/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 9/2 \\ 1 \\ -1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 :

1. A est annulée par X^2+1. Donc le polynôme minimal m_A divise X^2+1 dans $\mathbb{R}[X]$. Or X^2+1 est irréductible (sans racine réelle) dans $\mathbb{R}[X]$.

donc $m_A = X^2+1$.

Donc m_A n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, donc A n'est pas trigonalisable, donc A n'est pas diagonalisable (sur $\mathbb{R}$).

2. les valeurs propres de A sont exactement les racines de m_A.

(on peut aussi remarquer que $m_A = P_A$ par Cayley-Hamilton).

Or $m_A = X^2+1 = (X+i)(X-i)$.

donc A admet pour valeurs propres i et $-i$, toutes deux de multiplicité 1.

Donc A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

3. A est annulée par X^2+1, donc $A^2+I_2=0$, donc $A^2=-I_2$,

i.e $A.(-A) = (-A).A = I_2$.

Donc A est inversible et $A^{-1} = -A$.

4. Par définition, $A.z = i.z$. On conjugue cette égalité :

$\overline{A.z} = \overline{i.z}$. Or $\overline{A} = A$ car A est à coefficients réels, et $\overline{Az} = \overline{A}.\overline{z}$,

Donc : $A.\overline{z} = \overline{i}.\overline{z} = -i.\overline{z}$

Donc $\bar{z}$ est bien vecteur propre de A pour $-i$ (car $\bar{z} \neq 0$ si $z \neq 0$).

5. z et $\bar{z}$ sont vecteurs propres pour des valeurs propres distinctes (i et $-i$), donc ils sont linéairement indépendants.

6. Par définition, $\begin{cases} Az = iz \\ A\bar{z} = -i\bar{z} \end{cases}$.

Donc la matrice dans la base $(z, \bar{z})$ est $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

7. Un complexe λ est dans $\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{\lambda} = \lambda$.

donc : un vecteur $w \in \mathbb{C}^2$ est dans $\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \bar{w} = w$.

On calcule : $\overline{w_1} = \overline{z + \bar{z}} = \bar{z} + z = w_1$

et $\overline{w_2} = \bar{i}.(\overline{z - \bar{z}}) = -i.(\bar{z} - z) = i.(z - \bar{z}) = w_2$.

donc w_1, w_2 sont à coefficients réels.

8. $\det_{(z,\bar{z})}(w_1, w_2) = \begin{vmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{vmatrix} = \underset{0}{\underset{\#}{-2i}}$, donc (w_1, w_2) est une base de $\mathbb{C}^2$, donc (w_1, w_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.

9. Par construction, $A.w_1 = A.(z + \bar{z}) = Az + A\bar{z} = iz - i\bar{z}$

$= i.(z - \bar{z}) = w_2$.

et $A.w_2 = A(i(z - \bar{z})) = i.(Az - A\bar{z}) = i(iz + i\bar{z})$

$= -(z + \bar{z}) = -w_1$.

donc la matrice dans la base (w_1, w_2) est : $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.