CORRIGÉ DU PARTIEL DU 07/11/18

Exercice 1 :

a) $$\det A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -\lambda & 3 \\ -1 & \lambda & -3 \\ 0 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1+L_2}{=} \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & -3 \\ 0 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = -\lambda.(\lambda^2-2\lambda-3)$$

$$= -\lambda(\lambda+1)(\lambda-3)$$

b) $A(\lambda)$ inversible $\Leftrightarrow \det A(\lambda) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,-1,3\}$.

c) $$A(-1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} =: A.$$

On voit que A est de rang 2. (on peut aussi échelonner la matrice).

Par le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} A = 1$.

Une base de $\operatorname{Ker} A$ est $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Une base de $\operatorname{Im} A$ est $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

d) • $\operatorname{Ker} A$ est de dimension 1, donc il suffit de trouver 2 équations linéairement indépendantes vérifiées par $\operatorname{Ker} A$: par exemple $\begin{cases} x = 0 \\ y + 3z = 0. \end{cases}$

• $\operatorname{Im} A$ est un hyperplan, définit par l'équation $x + 2y - z = 0$.

e) on peut additionner les matrices 3×3, et les multiplier par un scalaire.

On vérifie facilement les axiomes de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

une base de $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ est donnée par les matrices élémentaires $(E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc $\dim(\mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})) = 3^2 = 9$.

f) On peut écrire : pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$A(\lambda) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}}_{A(0)} + \lambda \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B}.$$

Donc l'ensemble en question est $\{A(0) + \lambda \cdot B \,;\, \lambda \in \mathbb{R}\} = A(0) + \mathbb{R} \cdot B$

C'est donc un sous-espace affine de $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$, de dimension 1, passant par $A(0)$ et de direction $\mathbb{R} \cdot B$.

g) $\dim \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R}) = 9$ et $\dim \{A(\lambda) \,;\, \lambda \in \mathbb{R}\} = 1$,

donc $\{A(\lambda) \,;\, \lambda \in \mathbb{R}\}$ est défini par $\underset{9-1}{\overset{}{\underset{\shortparallel}{8}}}$ équations affines dans $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$, et ce nombre est minimal.

Exercice 2 :

a) base canonique : $(1, X, X^2, X^3)$.

donc $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$.

b) pour tout $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $(P + \lambda Q)(0) = P(0) + \lambda Q(0)$

et $(P + \lambda Q)' = P' + \lambda Q'$ par linéarité de la dérivation.

Cela assure que les 3 applications sont linéaires.

c) on cherche des formes linéaires (f_1, f_2, f_3, f_4) sur $\mathbb{R}_3[X]$ tq

$$\begin{cases} f_1(1) = 1 \\ f_1(X) = f_1(X^2) = f_1(X^3) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} f_2(1) = f_2(X^2) = f_2(X^3) = 0 \\ f_2(X) = 1 \end{cases}, \text{ etc...}$$

On constate que $f_1 : P \longmapsto P(0)$, $f_2 : P \longmapsto P'(0)$, $f_3 : P \longmapsto \dfrac{P''(0)}{2}$

et $f_4 : P \longmapsto \dfrac{P^{(3)}(0)}{6}$ conviennent, donc (f_1, f_2, f_3, f_4) est la base duale recherchée.

d) pour tout $k \in \mathbb{R}$, tout $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$, tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$\mathcal{E}_k(P+\lambda Q) = (P+\lambda Q)(k) = P(k) + \lambda Q(k) = \mathcal{E}_k(P) + \lambda \mathcal{E}_k(P)$.

Donc les $\mathcal{E}_k$ sont linéaires.

e) $\dim \mathbb{R}_3[X]^* = \dim \mathbb{R}_3[X] = 4$,

donc il suffit de montrer que $(\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3)$ est libre.

Soient $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^4$ tq $\lambda_0 \mathcal{E}_0 + \lambda_1 \mathcal{E}_1 + \lambda_2 \mathcal{E}_2 + \lambda_3 \mathcal{E}_3 = 0$.

on applique cette égalité aux polynômes $(X-1)(X-2)(X-3)$, $X(X-2)(X-3)$, $X(X-1)(X-3)$ et $X(X-1)(X-2)$ et on en déduit $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

D'où le résultat.

f) les calculs de la question e) assurent que cette base est :

$$\left(\frac{(X-1)(X-2)(X-3)}{-6} ; \frac{X(X-2)(X-3)}{2} ; \frac{X(X-1)(X-3)}{-2} ; \frac{X(X-1)(X-2)}{6} \right).$$

<u>Exercice 3</u> :

a) A, B, C sont non alignés, donc (A,B,C) est un repère affine.

Notons $(s_2, s_3) \in \mathbb{R}^2$ les coordonnées de S dans ce repère.

alors par définition, on a : $\overrightarrow{AS} = s_2 \overrightarrow{AB} + s_3 \overrightarrow{AC}$.

Donc pour tout point $M \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{MS} = \underbrace{(1-s_2-s_3)}_{s_1} \cdot \overrightarrow{MA} + s_2 \overrightarrow{MB} + s_3 \overrightarrow{MC}$

d'où l'existence de (s_1, s_2, s_3) tels que $S = \mathrm{Bar}((A, s_1), (B, s_2), (C, s_3))$.

L'unicité est claire car (s_2, s_3) sont nécessairement les coordonnées de S dans le repère (A,B,C).

b) au vu de la construction précédente, on voit que :

$$S, T, U \text{ alignés} \iff \overrightarrow{ST} \text{ et } \overrightarrow{SU} \text{ colinéaires} \overset{\text{repère } (A,B,C)}{\iff} \begin{vmatrix} t_2 - s_2 & u_2 - s_2 \\ t_3 - s_3 & u_3 - s_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_2 \leftarrow C_2 - C_1$$
$$C_3 \leftarrow$$

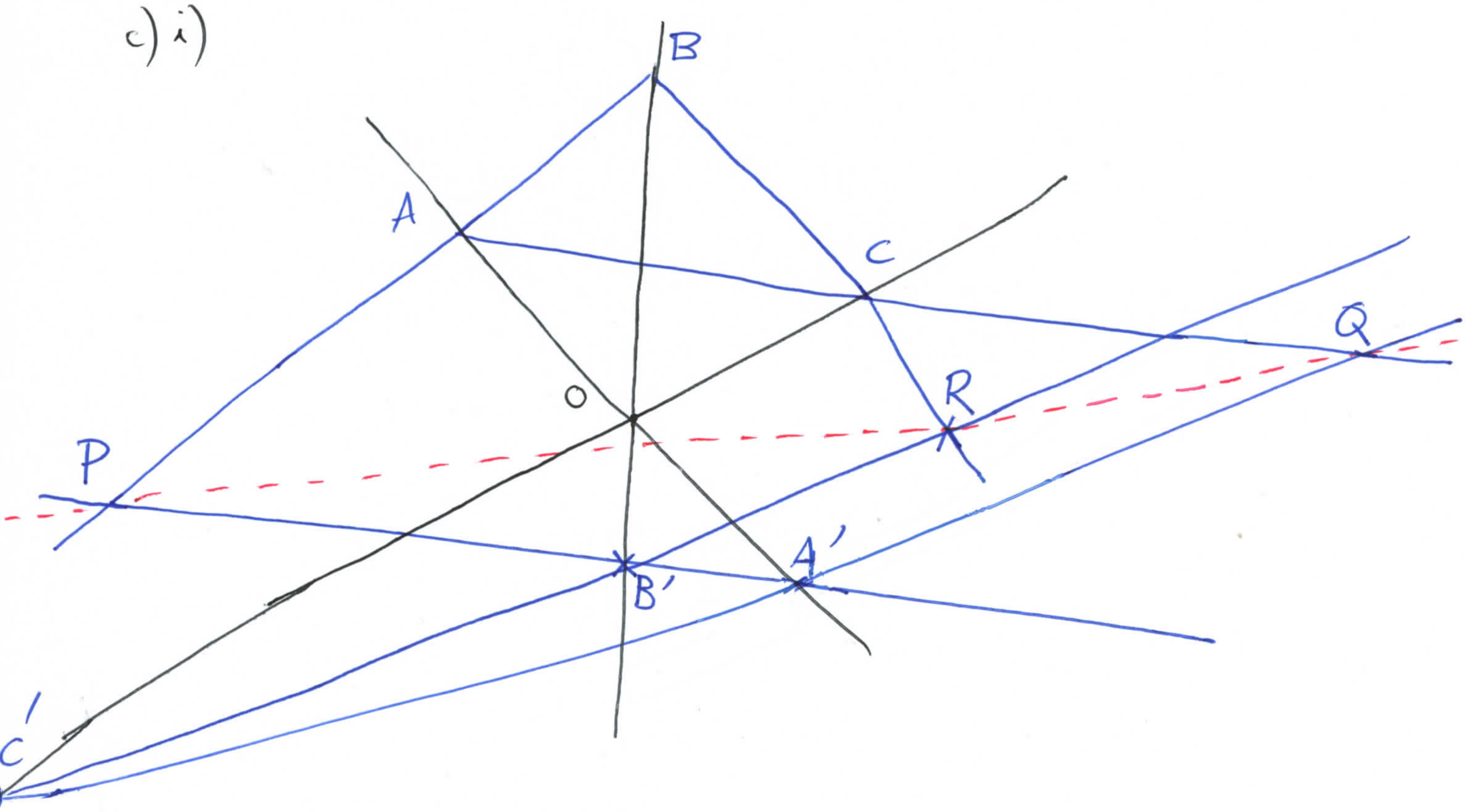
Or $\begin{vmatrix} s_1 & t_1 & u_1 \\ s_2 & t_2 & u_2 \\ s_3 & t_3 & u_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s_1 & t_1 - s_1 & u_1 - s_1 \\ s_2 & t_2 - s_2 & u_2 - s_2 \\ s_3 & t_3 - s_3 & u_3 - s_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s_2 & t_2 - s_2 & u_2 - s_2 \\ s_3 & t_3 - s_3 & u_3 - s_3 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} t_2 - s_2 & u_2 - s_2 \\ t_3 - s_3 & u_3 - s_3 \end{vmatrix}$$

Donc les calculs précédents assurent que :

$$S, T, U \text{ alignés} \iff \begin{vmatrix} s_1 & t_1 & u_1 \\ s_2 & t_2 & u_2 \\ s_3 & t_3 & u_3 \end{vmatrix} = 0$$

c) i)



ii) $O \in (AA')$, donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $O = \text{Bar}((A,a),(A',1-a))$.

en effet, $\overrightarrow{OA'}$ est proportionnel à $\overrightarrow{AA'}$, donc :

il existe $a \in \mathbb{R}$ tq $\overrightarrow{OA'} = a \cdot \overrightarrow{AA'}$. Alors $a\overrightarrow{OA} + (1-a)\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{0}$, d'où le résultat.

iii) supposons $a = b$.

alors : $\begin{cases} \overrightarrow{OA'} = a\,\overrightarrow{AA'} \\ \overrightarrow{OB'} = a\,\overrightarrow{BB'} \end{cases}$, donc le théorème de Thalès assure que $(AB) /\!/ (A'B')$,

ce qui contredit l'existence de P.

iv) Un calcul simple assure que :

$$a\overrightarrow{PA} + (1-a)\overrightarrow{PA'} = \overrightarrow{PO} = b\overrightarrow{PB} + (1-b)\overrightarrow{PB'}$$

Donc $\quad a\overrightarrow{PA} - b\overrightarrow{PB} = (1-b)\overrightarrow{PB'} - (1-a)\overrightarrow{PA'} \qquad (*)$

Or les points A, B, P sont alignés sur (AB)

et les points A', B', C' sont alignés sur (A'B').

et (AB) n'est pas parallèle à (A'B').

Donc les vecteurs apparaissant à gauche et à droite de $(*)$ ont pour support des droites non parallèles. Donc ces deux vecteurs sont nuls, :

i.e : $\quad a\overrightarrow{PA} + b\overrightarrow{PB} = \vec{0}$

D'où $\quad P = \text{Bar}\left(\left(A, \frac{a}{a-b}\right), \left(B, \frac{-b}{a-b}\right)\right)$.

Les autres cas sont similaires.

v) on applique b) :

$$\begin{vmatrix} \frac{a}{a-b} & 0 & \frac{-a}{c-a} \\ \frac{-b}{a-b} & \frac{b}{b-c} & 0 \\ 0 & \frac{-c}{b-c} & \frac{c}{c-a} \end{vmatrix} = \frac{abc}{(a-b)(b-c)(c-a)} - \frac{abc}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 0.$$

Donc par b), les points P, Q, R sont alignés.