Agrégation : Géométrie

Cyril Demarche

5 février 2026

Quelques références (liste non exhaustive) :
Michèle Audin, *Géométrie*.
Philippe Caldero et Jérôme Germoni : *Nouvelles Histoires hédonistes d'algèbre et de géométrie*
Jean-Marie Arnaudiès et José Bertin : *Groupes, algèbres et géométrie*

Pour lectrices et lecteurs un peu plus averti·e·s, ou dans un second temps :
Marcel Berger, *Géométrie*

Dans tout ce chapitre, la notation K désigne un corps.

1 Géométrie affine

1.1 Espaces affines

Commençons par définir le principal objet d'étude de cette partie. La définition est très peu intuitive la première fois. Nous allons essayer de la motiver par la suite.

Définition 1.1. Un K-espace affine est un triplet $(\mathcal{E}, E, \varphi)$, où $\mathcal{E}$ est un ensemble non vide, E est un K-espace vectoriel, et $\varphi : \mathcal{E} \times E \to \mathcal{E}$ est une action (à droite) libre et transitive du groupe $(E, +)$ sur l'ensemble $\mathcal{E}$.

Pour simplifier la notation, si $v \in E$ et $P \in \mathcal{E}$, on note

$$P + v := \varphi(P, v) \in \mathcal{E} .$$

On peut donc reformuler la définition précédente de la façon suivante :

Proposition 1.2. *Un K-espace affine est une paire $(\mathcal{E}, E)$, où E est un K-espace vectoriel et $\mathcal{E}$ un ensemble non vide, muni d'une application :*

$$\mathcal{E} \times E \to \mathcal{E}$$

notée $(P, v) \mapsto P + v$, telle que

1. *pour tous $P \in \mathcal{E}$, pour tous $u, v \in E$, $P + (u + v) = (P + u) + v$.*
2. *pour tous $P, Q \in \mathcal{E}$, il existe un unique v tel que $Q = P + v$.*

On note alors $\overrightarrow{PQ} := v$ l'unique vecteur v permettant de passer de P à Q. L'équivalence entre les deux définitions est claire. La seeconde propriété peut se reformuler en disant que pour tout $P \in \mathcal{E}$, l'application $\psi_P : \mathcal{E} \to E$ définie par $Q \mapsto \overrightarrow{PQ}$ est une bijection. Autrement dit, tout choix d'un point de $\mathcal{E}$ permet d'identifier canoniquement $\mathcal{E}$ à l'espace vectoriel E. Mais cette identification dépend du choix du point, que l'on peut appeler "origine".

On propose une troisième version :

Proposition 1.3. *Un K-espace affine est un couple $(\mathcal{E}, E)$, où $\mathcal{E}$ est un ensemble non vide et E un K-espace vectoriel, muni d'une application*

$$\mathcal{E} \times \mathcal{E} \to E\,,$$

notée $(P,Q) \mapsto \overrightarrow{PQ}$, telle que

1. *pour tous $P, Q, R \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$.*
2. *pour tous $(P, v) \in \mathcal{E} \times E$, il existe un unique $Q \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{PQ} = v$.*

La dernière propriété peut se reformuler en disant que pour tout $P \in \mathcal{E}$, l'application naturelle $\varphi_P : \mathcal{E} \to E$ définie par $Q \mapsto \overrightarrow{PQ}$ est une bijection. Autrement dit, tout choix d'un point de $\mathcal{E}$ permet d'identifier canoniquement $\mathcal{E}$ à l'espace vectoriel E. Mais cette identification dépend du choix du point, que l'on peut appeler "origine". On peut noter que l'application φ_P est la réciproque de l'application ψ_P issue de la définition précédente.

Remarque 1.4. On trouve parfois la notation $Q - P$ pour le vecteur $\overrightarrow{PQ}$. C'est une notation commode permettant de faire la différence de deux points, mais elle peut être un peu glissante au début (car on ne peut pas faire n'importe quelle somme ou combinaison linéaire de points). Par exemple $Q - P$ a bien un sens, alors que $P + Q$ n'en a pas. On peut faire des combinaisons linéaires quelconques de vecteurs de E, mais pas de points de $\mathcal{E}$. Nous y reviendrons dans la partie consacrée au barycentre.

En résumé, et informellement, un espace affine, c'est un ensemble de points et un ensemble de vecteurs, avec une façon d'associer raisonnablement un vecteur à un couple de points (ou d'une façon de translater raisonnablement un point par un vecteur).

Définition 1.5. Soit $(\mathcal{E}, E)$ un K-espace affine. Les éléments de $\mathcal{E}$ sont appelés des points de l'espace affine, et l'espace vectoriel E est appelé "direction de l'espace affine", et ses éléments sont appelés des vecteurs. La dimension de E est appelée la dimension de l'espace affine $\mathcal{E}$.

Construisons les premiers exemples d'espaces affines :

Exemples 1.6.

1. Soit E un K-espace vectoriel. Alors $\mathcal{E} := E$ est canoniquement un espace affine de direction E, via $\overrightarrow{PQ} := Q - P$. L'action de E sur $\mathcal{E}$ est simplement donnée par l'addition dans E.
2. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine et $H \subset E$ un sous-espace vectoriel. Alors $\mathcal{E}/H$ (quotient pour l'action évidente de H sur $\mathcal{E}$) est canoniquement un espace affine de direction E/H, dont les points correspondent aux sous-espaces affines (voir plus bas) de $\mathcal{E}$ de direction H.
3. Soient E et F deux K-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire. Pour tout $b \in \operatorname{im}(f)$, l'ensemble $\mathcal{E}_b := f^{-1}(b) = \{x \in E : f(x) = b\}$ est canoniquement un espace affine de direction $E = \ker(f)$. Autrement dit, toute

solution de l'équation linéaire $f(x) = b$ s'écrit de façon unique comme somme d'une solution particulière et d'une solution homogène. De façon plus concrète, pour toute matrice $A \in \mathrm{Mat}_{n,p}(K)$ et tout vecteur colonne $B \in \mathrm{im}\,(A) \subset K^n$, l'ensemble $\mathcal{E}_B$ des solutions de l'équation linéaire $AX = B$ est canoniquement un espace affine de direction $\ker(A)$.

4. De façon similaire, si $A : \mathbf{R} \to \mathrm{Mat}_{n,p}(\mathbf{R})$ est continue, $B : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ est continue, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire avec second membre $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ est canoniquement un $\mathbf{R}$-espace affine de direction l'espace vectoriel des solutions du système homogène associé $X'(t) = A(t)X(t)$.
5. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. Alors l'ensemble des supplémentaires de F dans E est naturellement un K-espace affine de direction $\mathcal{L}(E/F, F)$.
6. Pour tout ensemble I non vides et toute famille $(\mathcal{E}_i)_{i\in I}$ d'espaces affines, le produit cartésien $\prod_{i\in I} \mathcal{E}_i$ est naturellement un espace affine, de direction $\prod_{i\in I} E_i$.

Définition 1.7. Soit $\mathcal{E}$ un K-espace affine de direction E. Une partie $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ est un sous-espace affine si $\mathcal{F}$ est non vide et pour tout $P \in \mathcal{F}$, l'ensemble $F := \{\overrightarrow{PQ}, Q \in \mathcal{F}\}$ est un sous-K-espace vectoriel de E.

De façon équivalente, $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ est un sous-espace affine si et seulement s'il existe un sous-espace vectoriel $F \subset E$ et un point $P \in \mathcal{F}$ tels que $\mathcal{F} = P + F$.

Proposition 1.8. *Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ un sous-espace affine. Alors $\mathcal{F}$ est un espace affine, de direction $F := \{\overrightarrow{PQ}, P, Q \in \mathcal{F}\}$. De plus, pour tout $P \in \mathcal{F}$, on a $F = F_P := \{\overrightarrow{PQ}, Q \in \mathcal{F}\}$.*

Démonstration. Soient $P, P' \in \mathcal{F}$. Alors $F_P = F_{P'} = F$: en effet, l'inclusion $F_P, F_{P'} \subset F$ est évidente ; en outre, pour tout $v \in F$, il existe $Q, R \in \mathcal{F}$ tels que $v = \overrightarrow{QR}$, alors $v = \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PQ}$, et $\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PQ} \in F_P$, donc $v \in F_P$ car F_P est un sous-espace vectoriel par définition. Donc $F = F_P = F_{P'}$.

Montrons maintenant que $\mathcal{F}$ est un espace affine de direction F. La restriction de l'action de E sur $\mathcal{E}$ induit une action de F sur $\mathcal{F}$, car pour tout $P \in \mathcal{F}$ et $v \in F$, il existe (un unique) $Q \in \mathcal{F}$ tel que $v = \overrightarrow{PQ}$, et donc $P + v = P + \overrightarrow{PQ} = Q$ est dans $\mathcal{F}$. Comme l'action de E sur $\mathcal{E}$ est libre, celle de F sur $\mathcal{F}$ l'est aussi, et la transitivité résulte du fait que pour tout $P, Q \in \mathcal{F}$, on a $\overrightarrow{PQ} \in F$. □

Proposition 1.9. *Soit I un ensemble et $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces affines de $\mathcal{E}$, de directions respectives $(F_i)_{i\in I}$.*

Alors $\bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$ est soit vide, soit un sous-espace affine de $\mathcal{E}$, de direction $\bigcap_{i\in I} F_i$.

Démonstration. Supposons $\bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$ non vide et choisissons $P \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$. Pour tout $Q \in \mathcal{E}$, on a $\overrightarrow{PQ} \in \bigcap_{i\in I} F_i$ si et seulement si pour tout $i \in I$, $\overrightarrow{PQ} \in F_i$ si et seulement si pour tout $i \in I$, $Q \in \mathcal{F}_i$ (car $P \in \mathcal{F}_i$) si et seulement si $Q \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$. D'où le résultat. □

Exemple 1.10. Si E, F sont des K-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors pour toute partie $P \subset F$ rencontrant $\mathrm{im}\,(f)$, l'ensemble $f^{-1}(P) \subset E$ est un sous-espace affine.

On dispose donc notamment d'une notion de sous-espace affine engendré par une partie non vide, défini par exemple comme l'intersection des sous-espaces affines contenant cette partie. Si $P \subset \mathcal{E}$ est une partie non vide, on notera $\langle P\rangle$ le sous-espace affine de $\mathcal{E}$ engendré par P.

Définition 1.11. Soient $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subset \mathcal{E}$ des sous-espaces affines. On dit que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont parallèles (resp. faiblement parallèles) si leurs directions sont égales (resp. si la direction de l'un est contenue dans la direction de l'autre).

En particulier, deux sous-espaces affines parallèles sont confondus ou disjoints.

Proposition 1.12. *Soient $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subset \mathcal{E}$ des sous-espaces affines, $P \in \mathcal{F}, Q \in \mathcal{G}$.*

Alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$ si et seulement si $\overrightarrow{PQ} \in F + G$. En particulier, $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est non vide dès que $F + G = E$.

Démonstration. Supposons $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ non vide et choisissons $R \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Alors $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{QR}$, avec $\overrightarrow{PR} \in F$ et $\overrightarrow{QR} \in G$. Donc $\overrightarrow{PQ} \in F + G$.

Réciproquement, si $\overrightarrow{PQ} \in F + G$, on écrit $\overrightarrow{PQ} = f + g$, avec $f \in F$ et $g \in G$. Alors $Q = P + (f + g)$, donc $Q + (-g) = P + f$. Notons R ce point. Alors on a $R = Q + (-g) \in \mathcal{G}$ et $R = P + f \in \mathcal{F}$. Donc $R \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, donc $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$. □

Corollaire 1.13. *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension finie, et $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subset \mathcal{E}$ des sous-espaces affines.*

Si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$, alors

$$\dim (\langle \mathcal{F} \cup \mathcal{G} \rangle) = \dim (\mathcal{F}) + \dim (\mathcal{G}) + 1 - \dim (F \cap G) .$$

Si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$, alors

$$\dim (\langle \mathcal{F} \cup \mathcal{G} \rangle) = \dim (\mathcal{F}) + \dim (\mathcal{G}) - \dim (\mathcal{F} \cap \mathcal{G}) .$$

Démonstration. C'est une conséquence des propositions 1.9 et 1.12, ainsi que la formule de Grassmann sur la dimension d'une somme de deux sous-espaces vectoriels. □

Corollaire 1.14. *Soient $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subset \mathcal{E}$ des sous-espaces affines. Si $F \oplus G = E$, alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un point.*

1.2 Repères affines et coordonnées

La notion de repère d'un espace affine est directement reliée à la notion de base d'un espace vectoriel.

Définition 1.15. Soit $\mathcal{E}$ un K-espace affine de direction E et de dimension n. Un repère affine de $\mathcal{E}$ est un $n+1$-uplet $A_0, \dots, A_n \in \mathcal{E}$ tel que $(\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$ est une base de E.

Cela équivaut à la donnée d'une origine $O \in \mathcal{E}$ et d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E, en posant $A_0 := O$ et $A_i := O + e_i$.

On peut alors introduire les coordonnées d'un point dans un repère affine :

Définition 1.16. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine muni d'un repère affine $\mathcal{R} := (A_0, \dots, A_n)$.

Pour tout $P \in \mathcal{E}$, les coordonnées de P dans le repère $\mathcal{R}$ sont les scalaires $(x_1, \dots, x_n)$ tels que $\overrightarrow{A_0P} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{A_0A_i}$. Autrement dit, les coordonnées de P dans le repère $\mathcal{R}$ sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{A_0P}$ dans la base $(\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$.

On dispose naturellement de formules affines de changement de repères affines, qui se déduisent des formules de changement de bases usuelles :

Proposition 1.17. *Soient $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ et $\mathcal{R}' = (O', \mathcal{B}')$ deux repères affines de $\mathcal{E}$, et $M \in \mathcal{E}$. Notons X (resp. X') le vecteur colonne des coordonnées de M dans $\mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{R}'$), et Y le vecteur colonne des coordonnées de O' dans $\mathcal{R}$. Alors*

$$X = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} X' + Y \,,$$

où $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_E)$ est la matrice de changement de bases, dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.

Démonstration. Écrire $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O'M} + \overrightarrow{OO'}$ et appliquer les formules de changement de bases usuelles en algèbre linéaire. □

1.3 Applications affines

La notion d'application affine est elle aussi inspirée de la notion d'application linéaire :

Définition 1.18. Soit $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ deux K-espaces affines et $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$. On dit que f est une application affine s'il existe $O \in \mathcal{E}$ et $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$ tels que pour tout $v \in E$,

$$f(O + v) = f(O) + \phi(v) \,.$$

Autrement dit, f est affine s'il existe $O \in \mathcal{E}$ tel que l'application $\phi : E \to F$ définie par $\overrightarrow{OP} \mapsto \overrightarrow{f(O)f(P)}$ est une application linéaire.

L'application ϕ est uniquement déterminée par f, on l'appelle la partie linéaire ou la direction de f et on la note $\overrightarrow{f}$.

On notera $\mathrm{Aff}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ l'ensemble des applications affines de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$.

Exemples 1.19.
1. Une application linéaire f entre deux espaces vectoriels est une application affine avec $\overrightarrow{f} = f$.
2. Si $\mathcal{E}$ est un espace affine, pour tout $v \in E$, l'application $t_v : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ définie par $P \mapsto P + v$ est affine, de partie linéaire $\overrightarrow{t_v} = \mathrm{id}_E$. L'application t_v est appelée translation de vecteur v.

Proposition 1.20. *L'ensemble* $\mathrm{Aff}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ *est canoniquement un espace affine, de direction l'espace vectoriel* $\mathrm{Aff}(\mathcal{E}, F)$*.*

Démonstration. L'ensemble $\mathcal{F}^{\mathcal{E}}$ est clairement un espace affine de direction $F^{\mathcal{E}}$, et $\mathrm{Aff}(\mathcal{E}, F) \subset F^{\mathcal{E}}$ est un sous-espace vectoriel. Soient $f \in \mathrm{Aff}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ et $\varphi \in F^{\mathcal{E}}$, considérons l'application $f + \varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ définie par $(f + \varphi)(P) = f(P) + \varphi(P)$. Alors pour tout $P \in \mathcal{E}$, tout $v \in E$, on a

$$\begin{aligned}(f+\varphi)(P+v) = &\ f(P+v) + \varphi(P+v) = f(P) + \overrightarrow{f}(v) + \varphi(P+v) \\ = &\ (f+\varphi)(P) + (\overrightarrow{f}(v) + \varphi(P+v) - \varphi(P))\,,\end{aligned}$$

donc l'application $f + \varphi$ est affine si et seulement si l'application $E \to F$ définie par $v \mapsto (\overrightarrow{f}(v) + \varphi(P+v) - \varphi(P))$ est linéaire et indépendante de P, si et seulement si l'application $v \mapsto \varphi(P+v) - \varphi(P)$ est linéaire et indépendante de P si et seulement si $\varphi : \mathcal{E} \to F$ est une application affine.

Cela assure que $\mathrm{Aff}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ est bien un sous-espace affine de $\mathcal{F}^{\mathcal{E}}$, de direction le sous-espace vectoriel $\mathrm{Aff}(\mathcal{E}, F) \subset F^{\mathcal{E}}$. □

Proposition 1.21. *Une composée d'applications affines est affine, de partie linéaire la composée des parties linéaires. Autrement dit, si* $\mathcal{E} \xrightarrow{g} \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G}$ *sont affines, alors* $f \circ g$ *est affine et* $\overrightarrow{f \circ g} = \overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g}$.

Démonstration. Soient $P \in \mathcal{E}$ et $v \in E$. Alors

$$(f \circ g)(P+v) = f(g(P+v)) = f(g(P)+\overrightarrow{g}(v)) = f(g(P))+\overrightarrow{f}(\overrightarrow{g}(v)) = (f \circ g)(P)+(\overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g})(v)\,,$$

ce qui assure le résultat. □

On a donc une application $\mathrm{Aff}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \to \mathcal{L}(E, F)$ définie par $f \mapsto \overrightarrow{f}$, qui est compatible à la composition.

Proposition 1.22. *Soit* $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ *une application affine. Alors l'image par* f *d'un sous-espace affine* $\mathcal{G}$ *de* $\mathcal{E}$ *est un sous-espace affine de* $\mathcal{F}$ *de direction* $\overrightarrow{f}(G)$*, et l'image réciproque d'un sous-espace affine* $\mathcal{H}$ *de* $\mathcal{F}$ *est soit vide, soit un sous-espace affine de* $\mathcal{E}$ *de direction* $\overrightarrow{f}^{-1}(H)$.

En particulier, une application affine préserve l'alignement.

Démonstration. Choisissons $P \in \mathcal{G}$. Alors $\mathcal{G} = P + G$, donc $f(\mathcal{G}) = f(P) + \overrightarrow{f}(G)$ car f est affine, donc $f(\mathcal{G})$ est bien un sous-espace affine, de direction $\overrightarrow{f}(G)$.

Dans l'autre sens, si $f^{-1}(\mathcal{H})$ est non vide, choisissons $P \in f^{-1}(\mathcal{H})$. Alors, pour tout $Q \in \mathcal{E}$, on a $Q \in f^{-1}(\mathcal{H})$ si et seulement si $f(Q) \in \mathcal{H}$ si et seulement si $f(P)+\overrightarrow{f}(\overrightarrow{PQ}) \in \mathcal{H}$ si et seulement si $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{PQ}) \in H$ (car $f(P) \in \mathcal{H}$) si et seulement si $\overrightarrow{PQ} \in \overrightarrow{f}^{-1}(H)$. Cela assure que $f^{-1}(\mathcal{H}) = P + \overrightarrow{f}^{-1}(G)$, donc $f^{-1}(\mathcal{H})$ est bien un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction $\overrightarrow{f}^{-1}(H)$. □

Remarque 1.23. Réciproquement, une bijection qui préserve l'alignement est "presque" une application affine. C'est le théorème fondamental de la géométrie affine.

Proposition 1.24. *Soient* $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ *deux* K*-espaces affines, et* $\mathcal{R} = (A_0, \dots, A_n)$ *un repère affine de* $\mathcal{E}$.

Alors l'application de restriction $\mathrm{Aff}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \to \mathcal{F}^{\{A_0, \dots, A_n\}}$ *est un isomorphisme d'espaces affines. En particulier, une application affine est entièrement déterminée par l'image d'un repère affine.*

Démonstration. □

Le résultat suivant sera très utile dans l'étude et la classification des isométries affines :

Proposition 1.25. *Soit* $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ *une application affine. Alors l'ensemble* $\mathrm{Fix}(f)$ *des points fixes de* f *est soit vide, soit un sous-espace affine de direction l'espace propre* $\ker(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_E) \subset E$.

Démonstration. Supposons $\mathrm{Fix}(f)$ non vide et choisissons $P \in \mathrm{Fix}(f)$. Alors pour tout $Q \in \mathcal{E}$, on a $Q \in \mathrm{Fix}(f)$ si et seulement si $f(Q) = Q$ si et seulement si $f(P)+\overrightarrow{f}(\overrightarrow{PQ}) = Q$ si et seulement si $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{PQ}$ si et seulement si $\overrightarrow{PQ} \in \ker(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_E)$, ce qui conclut la preuve. □

Corollaire 1.26. *Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application affine avec $\mathcal{E}$ de dimension finie.*

Alors f a un unique point fixe dans $\mathcal{E}$ si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de $\overrightarrow{f}$.

Démonstration. Le sens direct et l'unicité dans le sens réciproque sont conséquences de la proposition précédente. Reste à montrer l'existence sous l'hypothèse que 1 n'est pas valeur propre de $\overrightarrow{f}$. Fixons $P \in \mathcal{E}$, et soit $v \in E$. Alors $f(P+v) = P+v$ si et seulement si $f(P)+\overrightarrow{f}(v) = P+v$ si et seulement si $\overrightarrow{v} - v = \overrightarrow{f(P)P}$. Or l'endomorphisme $\overrightarrow{f} - \mathrm{id}$ est injectif par hypothèse, donc bijectif car E est de dimension finie, donc il existe un unique $v \in E$ tel que $\overrightarrow{v} - v = \overrightarrow{f(P)P}$, donc il existe un unique point fixe pour f. □

On peut écrire les applications affines en coordonnées dans un repère affine, comme on pouvait décrire les applications linéaires comme des matrices, une fois une base fixée :

Proposition 1.27. *Soit $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ (resp. $\mathcal{R}' = (O', \mathcal{C})$) un repère affine de $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{F}$) et $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ une application affine. Soit $P \in \mathcal{E}$ de coordonnées $(x_1, \dots, x_p)$ dans $\mathcal{R}$, et notons $(y_1, \dots, y_n)$ les coordonnées de $f(P)$ dans $\mathcal{R}'$. Notons $A := \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\overrightarrow{f})$ et $(b_1, \dots, b_n)$ les coordonnées de $f(O)$ dans $\mathcal{R}'$. Alors on a :*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

La proposition suivante caractérise les translation, et elle est utile dans plusieurs applications :

Proposition 1.28. *Une application affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est une translation si et seulement si $\overrightarrow{f} = \mathrm{id}_E$.*

Démonstration. On a déjà vu que pour tout $v \in E$, $\overrightarrow{t_v} = \mathrm{id}_E$. Réciproquement, soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ affine telle que $\overrightarrow{f} = \mathrm{id}_E$. Choissons $P \in \mathcal{E}$ et notons $v := \overrightarrow{Pf(P)}$. Alors pour tout $Q \in \mathcal{E}$, $f(Q) = f(P+\overrightarrow{PQ}) = f(P)+\overrightarrow{f}(\overrightarrow{PQ}) = f(P)+\overrightarrow{PQ} = (Q+\overrightarrow{Qf(P)})+\overrightarrow{PQ} = Q + \overrightarrow{Pf(P)} = Q + v$, donc $f = t_v$ est bien une translation. □

Proposition 1.29. *L'ensemble des translations de $\mathcal{E}$ est un groupe abélien (pour la composition) canoniquement isomorphe à $(E, +)$.*

Définition 1.30. Soit $\lambda \in K$. L'homothétie de centre O et de rapport λ $h_{O,\lambda} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est définie par $h_{O,\lambda}(M) := O + \lambda\overrightarrow{OM}$. C'est une application affine de partie linéaire $\overrightarrow{h_{O,\lambda}} = \lambda \mathrm{id}_E$.

On peut montrer qu'une application affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ qui vérifie $\overrightarrow{f} = \lambda \mathrm{id}_E$ avec $\lambda \neq 1$, a un unique point fixe O et que f est l'homothétie de centre O et de rapport λ.

Définition 1.31. Soient $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ un sous-espace affine, et G un supplémentaire de F dans E (i.e. $E = F \oplus G$).

Pour tout $M \in \mathcal{E}$, il existe un unique $p(M) \in \mathcal{F}$ tel que $\overrightarrow{Mp(M)} \in G$. Alors l'application $p : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est une application affine, appelée projection sur $\mathcal{F}$ parallèlement à G.

Comme en algèbre linéaire, on a $p \circ p = p$. La partie linéaire de p est le projection vectorielle sur F parallèlement à G.

Définition 1.32. On suppose la caractéristique de K différente de 2. Avec les notations précédentes, l'application $s : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ définie par $s(M) := M + 2\overrightarrow{Mp(M)}$ est une application affine, appelée symétrie par rapport à $\mathcal{F}$ parallèlement à G.

Comme en algèbre linéaire, on a $s \circ s = \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$. La partie linéaire de s est la symétrie vectorielle par rapport à F parallèlement à G.

Une conséquence du fait que les projections sont des applications affines est le fameux :

Théorème 1.33 (Thalès). *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension ≥ 2, $H \subset E$ un hyperplan, $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3$ trois hyperplans affines de direction H, deux à deux distincts, et $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ deux droites affines non faiblement parallèles à H. Alors*

1. *Pour tout i, la droite $\mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{D}'$) coupe l'hyperplan $\mathcal{H}_i$ en un unique point P_i (resp. Q_i).*
2. *On a $\frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{\overrightarrow{P_1P_3}} = \frac{\overrightarrow{Q_1Q_2}}{\overrightarrow{Q_1Q_3}}$.*
3. *Si en outre $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont concourantes en $P_1 = Q_1$, alors $\frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{\overrightarrow{P_1P_3}} = \frac{\overrightarrow{P_1Q_2}}{\overrightarrow{P_1Q_3}} = \frac{\overrightarrow{P_2Q_2}}{\overrightarrow{P_3Q_3}}$.*

Démonstration.

1. Comme $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas faiblement parallèles à $\mathcal{H}$, D et D' ne sont pas contenus dans H, donc $H \oplus D = H \oplus D' = E$, et il suffit d'appliquer le corollaire 1.14.
2. Considérons la projection (affine) $p : \mathcal{E} \to \mathcal{D}'$ sur $\mathcal{D}'$ parallèlement à H. Alors $p(P_i) = Q_i$ pour tout i. Il existe un unique $\lambda := \frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{\overrightarrow{P_1P_3}} \in K$ tel que $\overrightarrow{P_1P_2} = \lambda\overrightarrow{P_1P_3}$. Comme p est affine, on a
$$\overrightarrow{Q_1Q_2} = \overrightarrow{p(P_1)p(P_2)} = \overrightarrow{p}(\overrightarrow{P_1P_2}) = \overrightarrow{p}(\lambda\overrightarrow{P_1P_3}) = \lambda\overrightarrow{p}(\overrightarrow{P_1P_3}) = \lambda\overrightarrow{p(P_1)p(P_3)} = \lambda\overrightarrow{Q_1Q_3}\,,$$
ce qui assure que $\frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{\overrightarrow{P_1P_3}} = \lambda = \frac{\overrightarrow{Q_1Q_2}}{\overrightarrow{Q_1Q_3}}$.
3. Notons $O := P_1 = Q_1$ et considérons l'homothétie h de centre O et de rapport $\lambda := \frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{\overrightarrow{P_1P_3}}$. Alors le point précédente assure que $h(P_3) = P_2$ et $h(Q_3) = Q_2$. Comme h est affine de partie linéaire $\overrightarrow{h} = \lambda\mathrm{id}_E$, on a donc
$$\overrightarrow{P_2Q_2} = \overrightarrow{h(P_3)h(Q_3)} = \overrightarrow{h}(\overrightarrow{P_3Q_3}) = \lambda\overrightarrow{P_3Q_3}\,,$$
ce qui assure le résultat.

□

Remarque 1.34. Notez que le théorème de Thalès est un énoncé affine, et non euclidien. Pas besoin de notion de distance pour l'énoncer.

Remarque 1.35. Une autre preuve possible consiste à considérer le quotient $\mathcal{E}/H$ (qui est une droite affine) de $\mathcal{E}$ par l'action naturelle de H. Alors la projection $\pi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}/H$ est affine, et $\pi(P_i) = \pi(\mathcal{H}_i) = \pi(Q_i)$, donc
$$\frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{\overrightarrow{P_1P_3}} = \frac{\overrightarrow{\pi(\mathcal{H}_1)\pi(\mathcal{H}_2)}}{\overrightarrow{\pi(\mathcal{H}_1)\pi(\mathcal{H}_3)}} = \frac{\overrightarrow{Q_1Q_2}}{\overrightarrow{Q_1Q_3}}\,,$$
ce qui prouve le théorème.

1.4 Groupe affine et sous-groupes

Soit $\mathcal{E}$ un K-espace affine de direction E. On note $\mathrm{GA}(\mathcal{E})$ l'ensemble des applications affines bijectives de $\mathcal{E}$ dans lui-même.

Proposition 1.36. *Muni de la composition,* $(\mathrm{GA}(\mathcal{E}), \circ)$ *est un groupe, appelé groupe affine de* $\mathcal{E}$*, et l'application "partie linéaire" induit un morphisme de groupes surjectif*

$$\mathrm{GA}(\mathcal{E}) \to \mathrm{GL}(E)\,,$$

dont le noyau est exactement le sous-groupe $T(\mathcal{E})$ *de* $\mathrm{GA}(\mathcal{E})$ *(isomorphe à* $(E,+)$*) formé des translations de* $\mathcal{E}$*.*

Intuitivement, les applications affines, ce sont essentiellement les applications linéaires auxquelles on ajoute les translations.

Démonstration. Le fait que ce soit un groupe, et le calcul du noyau du morphisme $f \mapsto \overrightarrow{f}$, résultent des propositions 1.21 et 1.28.

Pour la surjectivité, on choisit un point $O \in \mathcal{E}$. Et pour tout $\varphi \in \mathrm{GL}(E)$, on définie $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ de la façon suivante : pour tout $P \in \mathcal{E}$, $f(P) := O + \varphi OP$. Il est alors immédiat que f est affine, bijective, de partie linéaire $\overrightarrow{f} = \varphi$, ce qui conclut la preuve. $\square$

Remarque 1.37. On peut même vérifier que le choix d'une origine dans $\mathcal{E}$ induit un isomorphisme entre $\mathrm{GA}(\mathcal{E})$ et le produit semi-direct naturel $(E,+) \rtimes \mathrm{GL}(E)$.

Le groupe $\mathrm{GA}(\mathcal{E})$ admet un autre sous-groupe utile : le sous-groupe $HT(\mathcal{E})$ des homothéties-translations, formé des homothéties et des translations. C'est l'image inverse par le morphisme précédent du sous-groupe des homothéties de $\mathrm{GL}(E)$. On remarque que $T(\mathcal{E})$ est un sous-groupe (abélien) distingué de $HT(\mathcal{E})$, et le quotient est isomorphe à $(K^\times, \cdot)$. Plus précisément, le choix d'une origine induit un isomorphisme $HT(\mathcal{E}) \cong (E,+) \rtimes (K^\times, \cdot)$

1.5 Barycentre

Définition 1.38. Soit $\mathcal{E}$ un K-espace affine, $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{E}$, et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$.

1. Si $\sum_i \lambda_i \neq 0$, alors il existe un unique point $G \in \mathcal{E}$ tel que pour tout $M \in \mathcal{E}$,

$$\sum_i \lambda_i \overrightarrow{MP_i} = \left(\sum_i \lambda_i\right) \overrightarrow{MG}\,.$$

   Ce point est appelé le barycentre du système de points pondérés (P_i, λ_i), et parfois noté $G = \mathrm{Bar}((P_1, \lambda_1), \dots, (P_n, \lambda_n))$.

2. Si $\sum_i \lambda_i = 0$, alors le vecteur $\sum_i \lambda_i \overrightarrow{MP_i}$ est indépendant du point $M \in \mathcal{E}$.

Démonstration. 1. Choisissons $O \in \mathcal{E}$. Alors la formule

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum_i \lambda_i} \sum_i \lambda_i \overrightarrow{OP_i}$$

définit un unique point $G \in \mathcal{E}$. Donc l'unicité est claire. Montrons maintenant que le point ainsi défini ne dépend pas du point O choisi. Soit $M \in \mathcal{E}$. Alors

$$\begin{aligned}\sum_i \lambda_i \overrightarrow{MP_i} &= \sum_i \lambda_i(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OP_i}) = \left(\sum_i \lambda_i\right) \overrightarrow{MO} + \sum_i \lambda_i \overrightarrow{OP_i} \\ &= \left(\sum_i \lambda_i\right) \overrightarrow{MO} + \left(\sum_i \lambda_i\right) \overrightarrow{OG} = \left(\sum_i \lambda_i\right) \overrightarrow{MG}\,,\end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve de l'existence de G.

2. Supposons $\sum_i \lambda_i = 0$ et soient $M, N \in \mathcal{E}$. Alors on a

$$\sum_i \lambda_i \overrightarrow{MP_i} = \sum_i \lambda_i(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP_i}) = \left(\sum_i \lambda_i\right) \overrightarrow{MN} + \sum_i \lambda_i \overrightarrow{NP_i} = \sum_i \lambda_i \overrightarrow{NP_i}\,,$$

d'où le résultat.

□

Remarque 1.39. Si $\sum_i \lambda_i = 1$, le barycentre G est parfois noté

$$G = \sum_i \lambda_i P_i\,.$$

Cette notation intuitive peut être pratique, mais elle est probablement à éviter à l'agrégation.

La propriété suivante est élémentaire, mais utile :

Proposition 1.40. *Soit $\mathcal{E}$ un K-espace affine, $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{E}$, et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ tels que $\sum_i \lambda_i \neq 0$.*

Alors le barycentre G des (P_i, λ_i) est caractérisé par

$$\sum_i \lambda_i \overrightarrow{GP_i} = 0\,.$$

Démonstration. Si un point G vérifie

$$\sum_i \lambda_i \overrightarrow{GP_i} = 0\,,$$

alors pour tout $M \in \mathcal{E}$, on a

$$\begin{aligned}\sum_i \lambda_i \overrightarrow{MP_i} &= \sum_i \lambda_i(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OP_i}) = \left(\sum_i \lambda_i\right) \overrightarrow{MO} + \sum_i \lambda_i \overrightarrow{OP_i} \\ &= \left(\sum_i \lambda_i\right) \overrightarrow{MO} + \left(\sum_i \lambda_i\right) \overrightarrow{OG} = \left(\sum_i \lambda_i\right) \overrightarrow{MG}\,,\end{aligned}$$

donc G est bien le barycentre recherché. □

Exemples 1.41.

— Si $n \neq 0$ dans K (i.e. si la caractéristique de K ne divise pas l'entier n), et si pour tout i, $\lambda_i = \frac{1}{n}$, on dit que G est l'isobarycentre (ou le centre de gravité) des P_i.

— En caractéristique différente de 2, l'isobarycentre de deux points est appelé le milieu de ces deux points. En caractéristique 2, le milieu d'un segment n'est pas défini !

Lemme 1.42. *Dans un repère affine, les coordonnées du barycentre d'un système de points pondérés sont les moyennes pondérées des coordonnées des points : si* $G = \mathrm{Bar}((P_1, \lambda_1), \dots, (P_k, \lambda_k))$ *avec* $\sum_i \lambda_i = 1$*, et si chaque* P_i *a pour coordonnées* $(x_{i,0}, \dots, x_{i,n})$*, alors* G *a pour coordonnées* $(\sum_i \lambda_i x_{i,0}, \dots, \sum_i \lambda_i x_{i,n})$*.*

La propriété suivante est appelée l'associativité du barycentre :

Théorème 1.43. *Soit* $\mathcal{E}$ *un* K*-espace affine,* $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{E}$*, et* $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ *tels que* $\sum_i \lambda_i \neq 0$*. Soit* $\{1, \dots, n\} = I \amalg J$ *une partition, avec* $\lambda_I := \sum_I \lambda_i$ *et* $\lambda_J := \sum_{j \in J} \lambda_j$ *non nuls.*

Alors

$$\mathrm{Bar}((P_1, \lambda_1), \dots, (P_n, \lambda_n)) = \mathrm{Bar}((\mathrm{Bar}((P_i, \lambda_i)_{i \in I}), \lambda_I), (\mathrm{Bar}((P_j, \lambda_j)_{j \in J}), \lambda_J)) .$$

Démonstration. On note $G_I := \mathrm{Bar}((P_i, \lambda_i)_{i \in I})$ et $G_J := \mathrm{Bar}((P_j, \lambda_j)_{j \in J})$, et $G := \mathrm{Bar}((G_I, \lambda_I), (G_J, \lambda_J))$.

Alors

$$\sum_i \lambda_i \overrightarrow{GP_i} = \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{GP_i} + \sum_{j \in J} \lambda_j \overrightarrow{GP_j} = \lambda_I \overrightarrow{GG_I} + \lambda_J \overrightarrow{GG_J} = 0$$

ce qui assure que G est le barycentre des (P_i, λ_i). □

Corollaire 1.44. *On suppose le corps* K *de caractéristique différente de* 2*. Soit* $\mathcal{E}$ *un espace affine et* $A, B, C \in \mathcal{E}$ *un triangle non aplati (i.e. trois points non alignés). On définit les médianes de ce triangle comme trois droites joignant un sommet du triangle au milieu du côté opposé.*

1. *Si la caractéristique de* K *n'est pas égale à* 3*, alors les trois médianes sont concourrantes en un unique point* G*, qui est l'isobarycentre du triangle (en outre,* G *est situé au tiers de chaque médiane, en partant de la base de celle-ci).*
2. *Si la caractéristique de* K *est* 3*, alors les trois médianes sont parallèles.*

Démonstration. On considère A' (resp. B', resp. C') le milieu du segment $[BC]$ (resp. $[AC]$, resp. $[AB]$).

1. Si la caractéristique de K n'est pas 3, on définit G comme étant l'isobarycentre de A, B, C. Alors par associativité du barycentre,

$$G = \mathrm{Bar}((A, 1), (A', 2)) = \mathrm{Bar}((B, 1), (B', 2)) = \mathrm{Bar}((C, 1), (C', 2)) .$$

   En particulier, $G \in (AA') \cap (BB') \cap (CC')$, donc les trois médianes sont concourrantes en G. Elles ne sont pas confondues car sinon les trois points A, B et C seraient alignés. En outre, l'égalité $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GA'} = 0$ (et ses analogues) assure le résultat supplémentaire.

2. Supposons maintenant la caractéristique de K égale à 3. Alors le vecteur $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ est indépendant du point $M \in \mathcal{E}$. Notons $v \in E$ ce vecteur. Par construction, on a $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MC'}$ (et symétriquement), donc

$$v = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MA'} = \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB'} = \overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MC'} .$$

Appliquons ces formules à $M = A'$, puis à $M = B'$, puis à $M = C'$. Il vient

$$v = \overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{C'C}$$

ce qui assure que les trois médianes sont parallèles (et définissent même le même vecteur).

□

Proposition 1.45. *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine et $\mathcal{F}$ une partie de $\mathcal{E}$.*

Alors $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine si et seulement si $\mathcal{F} \neq \emptyset$ et $\mathcal{F}$ est stable par barycentre.

Démonstration. L'unicité du barycentre et le fait qu'un sous-espace affine est un espace affine assurent qu'un sous-espace affine est stable par barycentre.

Soit maintenant une partie non vide $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ stable par barycentre. Soit $P \in \mathcal{F}$. Montrons que $F_P := \{\overrightarrow{PQ}, Q \in \mathcal{F}\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

D'abord F_P est non vide, car il contient $\overrightarrow{PP} = 0$.

Soient $u, v \in F_P$ et $\lambda \in K$. Alors il existe $Q, R \in \mathcal{F}$ tels que $u = \overrightarrow{PQ}$ et $v = \overrightarrow{PR}$. Alors $\lambda u + v = \lambda\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR} + (-\lambda)\overrightarrow{PP}$. Alors $\lambda u + v = \overrightarrow{PG}$, où $G = \mathrm{Bar}((Q,\lambda),(R,1),(P,-\lambda))$. Par hypothèse, $G \in \mathcal{F}$, donc $\overrightarrow{PG} \in F_P$, i.e. $\lambda u + v \in F_P$. Donc F_P est un sous-espace vectoriel, donc $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine.

□

Remarque 1.46. On peut aussi montrer facilement que le sous-espace affine engendré par une partie P non vide de $\mathcal{E}$ est exactement l'ensemble des barycentres de points de P.

Proposition 1.47. *Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ une application entre deux espaces affines.*

Alors f est affine si et seulement si f préserve le barycentre.

Démonstration. La démonstration est similaire à la précédente. □

Introduisons maintenant les coordonnées barycentriques d'un point dans un repère affine :

Définition 1.48. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine et $(P_0, \ldots, P_n)$ un repère affine.

Pour tout point $M \in \mathcal{E}$, il existe un unique $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in K^{n+1}$ tel que $\sum_i \lambda_i = 1$ et

$$M = \mathrm{Bar}((P_0,\lambda_0), \ldots, (P_n,\lambda_n)) .$$

Les scalaires $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in K^{n+1}$ sont appelés les coordonnées barycentriques de M dans le repère $(P_0, \ldots, P_n)$.

Démonstration. □

On peut affaiblir la condition $\sum_i \lambda_i = 1$ en $\sum_i \lambda_i \neq 0$. Dans ce cas les coordonnées barycentriques d'un point ne sont plus uniques, mais définies à un scalaire non nul près. C'est exactement le même phénomème qu'avec les coordonnées homogènes d'un point dans un espace projectif.

Remarque 1.49. Les coordonnées barycentriques sont souvent plus naturelles et plus élégantes que les coordonnées cartésiennes, car elles font jouer un rôle symétrique à tous les points du repère, alors que les coordonées cartésiennes privilégient l'un des $n+1$ points du repère (le premier) qui est pris comme origine des coordonnées.

On peut exprimer un hyperplan affine via une équation linéaire en coordonnées barycentriques :

Proposition 1.50. *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension n et $\mathcal{H}$ un hyperplan affine de $\mathcal{E}$.*

1. *Il existe une forme affine non constante $f : \mathcal{E} \to K$ telle que $\mathcal{H} = f^{-1}(0)$. De plus, deux formes affines f et g définissent le même hyperplan affine si et seulement s'il existe $\lambda \in K^\times$ tel que $f = \lambda g$.*
2. *Soit $\mathcal{R} = (P_0, \dots, P_n)$ un repère affine de $\mathcal{E}$. Alors il existe $a_1, \dots, a_n, b \in K$, avec $(a_1, \dots, a_n)$ non tous nuls, tels que une équation de $\mathcal{H}$ dans le repère $\mathcal{R}$ soit $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b = 0$. De plus, la famille $(a_1, \dots, a_n, b)$ est unique à multiplication près par un élément de $K^\times$.*
3. *Soit $\mathcal{R} = (P_0, \dots, P_n)$ un repère affine de $\mathcal{E}$. Alors il existe $(a_0, \dots, a_n) \in K^{n+1}$ non tous nuls tels qu'une équation de $\mathcal{H}$ en coordonnées barycentriques dans $\mathcal{R}$ soit $a_0\lambda_0 + \cdots + a_n\lambda_n = 0$. De plus, la famille $(a_0, \dots, a_n)$ est unique à un scalaire non nul près.*

Démonstration.

1. Fixons un point $P \in \mathcal{H}$. Puisque $H \subset E$ est un hyperplan, il existe une forme linéaire non nulle $g \in E^*$, unique à un scalaire près, telle que $H = \ker(g)$. On définit alors $f : \mathcal{E} \to K$ par la formule $f(M) := g(\overrightarrow{PM})$. Il est clair que f est affine non constante, et pour tout $M \in \mathcal{E}$, on a $f(M) = 0$ si et seulement si $\overrightarrow{PM} \in H$ si et seulement si $M \in P + H = \mathcal{H}$. L'unicité de f résulte de celle de g.
2. Il suffit d'écrire la preuve précédente en coordonnées cartésiennes dans le repère $\mathcal{R}$: si on note $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées d'un point M de $\mathcal{E}$, $(b_1, \dots, b_n)$ celles de P, la forme linéaire $g \in E^*$ s'écrit, dans la base $(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$, sous la forme $g(y_1, \dots, y_n) = a_1y_1 + \cdots + a_ny_n$, donc $f(M) = g(\overrightarrow{PM}) = a_1(x_1 - b_1) + \cdots + a_n(x_n - b_n)$. On obtient l'équation souhaitée en posant $b := -\sum_i a_ib_i$.
3. Comme au point précédent, il suffit d'écrire la preuve du premier point en coordonnées barycentriques.

□

En dimension 2, les droites affines dans un plan affine admettent donc, dans un repère affine, une équation en coordonnées cartésiennes de la forme $ax + by + c = 0$, et en coordonnées barycentriques $ax + by + cz = 0$.

Proposition 1.51. *Soient D_1, D_2, D_3 trois droites deux à deux distinctes d'un plan affine $\mathcal{E}$, et $\mathcal{R}$ un repère affine de $\mathcal{E}$. Notons $a_ix + b_iy + c_iz = 0$ une équation de D_i en coordonnées barycentriques. Alors les trois droites D_i sont parallèles ou concourrantes si et seulement si*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Démonstration. □

On peut faire le lien entre les coordonnées barycentriques et des coordonnées dans un espace vectoriel de dimension un de plus :

Théorème 1.52. *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension n.*

Alors il existe un espace vectoriel canonique F de dimension $n+1$ et une forme linéaire non nulle canonique $\varphi \in F^*$ tels que $\mathcal{E}$ est l'hyperplan affine de F défini par l'équation $\varphi = 1$.

Démonstration. On sait que $\mathrm{Aff}(\mathcal{E}, E)$ est canoniquement un K-espace vectoriel, et on définit $F \subset \mathrm{Aff}(\mathcal{E}, E)$ comme le sous-espace vectoriel engendré par les applications affines $f_P : M \mapsto \overrightarrow{PM}$, où M décrit $\mathcal{E}$. Alors E s'identifie au sous-espace vectoriel de F formé des applications constantes.

On dispose d'une application injective naturelle $j : \mathcal{E} \to F$ définie par $j(P) := f_P$. Considérons la forme linéaire $\varphi : F \to K$ définie par $\varphi(f) := \sum_P \lambda_P$, si f s'écrit $f = \sum_P \lambda_P f_P$ (somme à support fini). Montrons que cette application est bien définie : si $\sum_P \lambda_P f_P = \sum_Q \mu_Q f_Q$, alors pour tout $M \in \mathcal{E}$, $\sum_P \lambda_P \overrightarrow{PM} - \sum_Q \mu_Q \overrightarrow{QM} = 0$, donc par propriété du barycentre, cela implique que $\sum_P \lambda_P = \sum_Q \mu_Q$. Donc φ est bien définie, et sa linéarité est claire.

On montre ensuite que $E = \ker(\varphi)$ et $\mathcal{E} = \varphi^{-1}(1)$, ce qui conclut la preuve. □

Le corollaire suivant est instructif (faire un dessin !) :

Corollaire 1.53. *Avec les notations précédentes, on a une bijection canonique entre l'ensemble des points de $\mathcal{E}$ et l'ensemble des droites de F non contenue dans E, et tout repère affine de $\mathcal{E}$ s'identifie à une base de F, faisant ainsi correspondre les coordonnées barycentriques d'un point dans un repère affine avec les coordonnées usuelles du vecteur correspondant dans la base associée, et identifiant ainsi $\mathcal{E}$ à l'hyperplan de F donné par "(somme des coordonnées dans cette base) = 1", alors que E est identifié à l'hyperplan E donné par "(somme des coordonnées dans cette base) = 0".*

Démonstration. □

Proposition 1.54. *Soit $\mathcal{E}$ un plan affine et (A, B, C) un repère affine.*

Soient P, Q, R trois points de $\mathcal{E}$ de coordonnées barycentriques respectives (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) et (x_3, y_3, z_3).

Alors P, Q et R sont alignés si et seulement si

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \,.$$

Démonstration. Il existe un espace vectoriel $\widehat{\mathcal{E}}$ de dimension 3 et $\varphi \in \widehat{\mathcal{E}}^*$ tels que $\mathcal{E} \subset \widehat{\mathcal{E}}$ soit le plan affine d'équation $\varphi = 1$. Alors le repère affine (A, B, C) correspond à une base $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ de $\widehat{\mathcal{E}}$ et les vecteurs $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$ ont pour coordonnées (x_i, y_i, z_i) dans cette base.

Alors P, Q, R sont alignés si et seulement si la famille $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR})$ est liée si et seulement si le déterminant formé par leurs coordonnées dans la base précédente est nul. Ce qui conclut la preuve.

□

Une généralisation évidente, avec la même preuve :

Proposition 1.55. *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension n et $\mathcal{R} = (A_0, \dots, A_n)$ un repère affine.*

Soient $(P_0, \dots, P_n)$ $n+1$ points de $\mathcal{E}$ de coordonnées barycentriques respectives $(\lambda_{0,0}, \dots, \lambda_{0,n})$, …, $(\lambda_{n,0}, \dots, \lambda_{n,n})$ (x_2, y_2, z_2) dans $\mathcal{R}$. Notons Λ la matrice de taille $n+1$ définie par $\Lambda := (\lambda_{i,j})$.

Alors $P_0, \dots, P_n$ sont contenus dans un hyperplan affine de $\mathcal{E}$ si et seulement si

$$\det(\Lambda) = 0 \,.$$

Deux applications classiques des coordonnées barycentriques :

Théorème 1.56 (Menelaüs)**.** *Soit $\mathcal{E}$ un plan affine sur un corps K, A, B, C trois points non alignés (i.e. un triangle non aplati). Soient $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$ et $C' \in (AB)$ trois points distincts de A, B et C.*

Alors les points A', B' et C' sont alignés si et seulement si

$$\frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}} \frac{B'C}{\overrightarrow{B'A}} \frac{\overrightarrow{C'A}}{\overrightarrow{C'B}} = 1 \,.$$

Démonstration. Par hypothèse, (A, B, C) forment un repère affine de $\mathcal{E}$. Si l'on note $a := \frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}}$, $b := \frac{B'C}{\overrightarrow{B'A}}$ et $c := \frac{\overrightarrow{C'A}}{\overrightarrow{C'B}}$, on voit que les points A', B' et C' ont pour coordonnées barycentriques respectives $(0, 1, -a)$, $(-b, 0, 1)$ et $(1, -c, 0)$.

Alors la proposition 1.54 assure que les trois points A', B', C' sont alignés si et seulement si

$$\begin{vmatrix} 0 & -b & 1 \\ 1 & 0 & -c \\ -a & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \,,$$

si et seulement si $1 - abc = 0$, ce qui assure le résultat. □

Une variante :

Théorème 1.57 (Ceva)**.** *Soit $\mathcal{E}$ un plan affine sur un corps K, A, B, C trois points non alignés (i.e. un triangle non aplati). Soient $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$ et $C' \in (AB)$ trois points distincts de A, B et C.*

Alors les droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles ou concourrantes si et seulement si

$$\frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}} \frac{B'C}{\overrightarrow{B'A}} \frac{\overrightarrow{C'A}}{\overrightarrow{C'B}} = -1 \,.$$

Démonstration. Par hypothèse, (A, B, C) forment un repère affine de $\mathcal{E}$. Si l'on note $a := \frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}}$, $b := \frac{B'C}{\overrightarrow{B'A}}$ et $c := \frac{\overrightarrow{C'A}}{\overrightarrow{C'B}}$, on voit que les points A', B' et C' ont pour coordonnées barycentriques respectives $(0, 1, -a)$, $(-b, 0, 1)$ et $(1, -c, 0)$. Alors les droites (AA'), (BB') et (CC') ont pour équation respective $ay + z = 0$, $x + bz = 0$, $cx + y = 0$. Alors la proposition 1.51 assure que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles ou concourrantes si et seulement si

$$\begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & b \\ c & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \,,$$

si et seulement si $1 + abc = 0$, ce qui assure le résultat.

$\square$

Remarque 1.58. Ces deux énoncés (et leurs preuves) très similaires sont en fait intimement liés. Plus précisément, il existe une formulation de ces deux théorèmes en géométrie projective, et dans ce cas, les deux énoncés deviennent duaux l'un de l'autre, au sens de la dualité en géométrie projective (qui est une incarnation géométrique de la dualité en algèbre linéaire).

Exemple 1.59. Une autre application des coordonnées barycentriques : la preuve du théorème du point fixe de Brouwer à partir du lemme de Sperner sur les coloriages des triangulations d'un triangle (ou d'un simplexe).

1.6 Théorèmes classiques de la géométrie affine

Nous avons déjà vu le théorème de Thalès. Nous allons maintenant nous intéresser à deux autres résultats historiques : les théorèmes de Pappus (antiquité grecque) et de Désargues (mathématicien français du 17ème siècle).

Théorème 1.60 (Pappus)**.** *Soit $\mathcal{P}$ un plan affine, $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ deux droites distinctes de $\mathcal{P}$. Soient $P, Q, R \in \mathcal{D}$ et $P', Q', R' \in \mathcal{D}'$ deux triplets de points distincts (et différents de l'éventuel point de concours de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$). Si (PQ') et $(P'Q)$ sont parallèles, et si (QR') et $(Q'R)$ sont parallèles, alors (PR') et $(P'R)$ sont parallèles.*

Démonstration. On a deux cas à considérer :

1. si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas parallèles. Alors ces deux droites sont sécantes en un point O. Considérons l'homothétie $h : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ de centre O qui envoie P sur Q (i.e. de rapport $\lambda := \frac{\overrightarrow{OQ}}{\overrightarrow{OP}}$). Puisque l'image d'une droite par un homothétie est une droite parallèle (car $\overrightarrow{h} = \lambda \mathrm{id}_E$), on sait que $h((PQ')) = (QR')$, donc $h(Q')$ est à la fois sur $\mathcal{D}'$ (car $h(\mathcal{D}') = \mathcal{D}'$ puisque $O \in \mathcal{D}$) et sur (QR'), donc $h(Q') = R'$. Notons h' l'homothétie de centre O envoyant Q sur R. Alors par le même raisonnement que plus haut, on a $h(R') = Q'$. Considérons $f := h' \circ h$. Alors $\overrightarrow{f}$ est une homothétie vectorielle et $f(O) = O$, donc f est est une homothétie de centre O. En outre, $f(P) = R$ et $f(R') = P'$. Donc $f((PR')) = (P'R)$, donc (PR') et $(P'R)$ sont parallèles.
2. si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles. Considérons la translation $t = t_{\overrightarrow{PQ}} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ de vecteur $\overrightarrow{PQ}$. Puisque l'image d'une droite par une translation est une droite parallèle (car $\overrightarrow{t} = \mathrm{id}_E$), on sait que $t((PQ')) = (QR')$, donc $t(Q')$ est à la fois sur $\mathcal{D}'$ (car $h(\mathcal{D}') = \mathcal{D}'$ puisque $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles) et sur (QR'), donc $t(Q') = R'$. Notons $t' = t_{\overrightarrow{QR}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{QR}$. Alors par le même raisonnement que plus haut, on a $t(R') = Q'$. Considérons $f := t' \circ t$. Alors $\overrightarrow{f} = \mathrm{id}_E$ et $f(P) = R$, donc f est une translation. En outre, $f(P) = R$ et $f(R') = P'$. Donc $f((PR')) = (P'R)$, donc (PR') et $(P'R)$ sont parallèles.

$\square$

Remarque 1.61. Les deux cas traités dans la preuve sont très similaires. Ils peuvent être unifiés dans une version projective du théorème de Pappus.

Théorème 1.62 (Désargues). *Soit $\mathcal{P}$ un plan affine, P, Q, R, P', Q', R' six points distincts de $\mathcal{P}$, tels que P, Q, R (resp. P', Q', R') ne soient pas alignés.*

On suppose les droites (PP'), (QQ') et (RR') deux à deux distinctes, (PQ) et $(P'Q')$ parallèles et (PR) et $(P'R')$ parallèles.

Alors : (QR) et $(Q'R')$ sont parallèles si et seulement si les trois droites (PP'), (QQ') et (RR') sont parallèles ou concourrantes.

Démonstration. Par hypothèse, il existe $\lambda, \mu \in K^\times$ tels que $\overrightarrow{P'Q'} = \lambda \overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{P'R'} = \mu \overrightarrow{PR}$. Alors on a $\overrightarrow{Q'R'} = \overrightarrow{Q'P'} + \overrightarrow{P'R'} = \lambda \overrightarrow{QP} + \mu \overrightarrow{PR}$ et évidemment $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PR}$. Or P, Q et R ne sont pas alignés, donc la famille $(\overrightarrow{QP}, \overrightarrow{PR})$ est libre, donc $\overrightarrow{QR}$ et $\overrightarrow{Q'R'}$ sont colinéaires si et seulement si $\lambda = \mu$.

En outre, puisque (PQ) et $(P'Q')$ sont parallèles, on a (PP') et (QQ') parallèles si et seulement si $PP'Q'Q$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{PQ}$ si et seulement si $\lambda = 1$. De même, (PP') et (RR') sont parallèles si et seulement si $\mu = 1$.

Par conséquent, les trois droites (PP'), (QQ') et (RR') sont parallèles si et seulement si $\lambda = \mu = 1$.

Supposons maintenant $\lambda \neq 1$. Alors (PP') et (QQ') sont sécantes en un point O, et le théorème de Thalès assure que $\overrightarrow{OP'} = \lambda \overrightarrow{OP}$, donc $\overrightarrow{PO} = \frac{1}{1-\lambda} \overrightarrow{PP'}$. De même, si $\mu \neq 1$, alors (PP') et (RR') sont sécantes en un point O', tel que $\overrightarrow{PO'} = \frac{1}{1-\mu} \overrightarrow{PP'}$.

Par conséquent, les trois droites (PP'), (QQ') et (RR') sont concourrantes si et seulement si $\lambda \neq 1$, $\mu \neq 1$ et $O = O'$ si et seulement si $\lambda = \mu \neq 1$.

Finalement, on a bien montré que les trois droites (PP'), (QQ') et (RR') sont parallèles ou concourrantes si et seulement si $\lambda = \mu$ si et seulement si (QR) et $(Q'R')$ sont parallèles. □

Remarque 1.63. On peut donner une autre preuve de ce résultat, dans l'esprit de la preuve de Pappus présentée plus haut : dans le cas des droites parallèles, considérer une translation de vecteur $\overrightarrow{PP'}$, et dans le cas des droites concourrantes en O, considérer l'homothétie de centre O qui envoie P sur P'.

Remarque 1.64. De nouveau, les cas "parallèles" et "concourrantes" peuvent être unifiés dans une version projective du résultat.

1.7 Convexité dans un espace affine réel

Dans cette section, le corps K est le corps $\mathbf{R}$ des nombres réels. Cette hypothèse permet de définir la notion de convexité. Si $\mathcal{E}$ est un espace affine réel de dimension finie, on munira $\mathcal{E}$ de la topologie induite par un (donc par tout) isomorphisme affine $\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}^n$.

Définition 1.65. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine réel. Si $P, Q \in \mathcal{E}$, on définit le segment $[PQ]$ comme l'ensemble des barycentres à coefficients poistifs ou nuls de P et Q, i.e.

$$[PQ] := \{\mathrm{Bar}((P, \lambda), (Q, 1 - \lambda)), \lambda \in [0, 1]\} .$$

Définition 1.66. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine réel, et C une partie de $\mathcal{E}$. On dit que C est convexe si pour tout $P, Q \in C$, le segment $[PQ]$ est contenu dans C.

On dit de plus qu'un convexe C est strictement convexe si son bord $\partial C := \overline{C} \setminus \mathring{C}$ ne contient aucun segment non réduit à un point.

Exemples 1.67.

1. Tout sous-espace affine est convexe.
2. Un segment est convexe.
3. Les parties convexes de $\mathbf{R}$ sont les intervalles.
4. Soit $f : C \to \mathbf{R}$ une fonction définie sur un convexe C d'un espace affine réel $\mathcal{E}$ (par exemple, C est un intervalle de $\mathbf{R}$). Alors la fonction f est convexe (au sens où, pour tout $a, b \in C$ et $t \in [0,1]$, $f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$) si et seulement si l'épigraphe de f, défini par $\{(a, y) \in C \times \mathbf{R} : f(a) \leq y\}$, est un convexe de $\mathcal{E} \times \mathbf{R}$.

Lemme 1.68. *Une partie C de $\mathcal{E}$ est convexe si et seulement si elle est stable par barycentre à coefficients positifs ou nuls.*

Proposition 1.69. *Une intersection de parties convexes est convexe.*

Proposition 1.70. *Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ une application affine entre espaces affines réels. Pour toute partie convexe $C \subset \mathcal{E}$ (resp. $C' \subset \mathcal{F}$), l'ensemble $f(C)$ (resp. $f^{-1}(C')$) est convexe.*

Définition 1.71. Soit P une partie de $\mathcal{E}$.

L'enveloppe convexe de P, notée $\mathrm{Conv}(P)$, est la plus petite partie convexe de $\mathcal{E}$ contenant P. C'est à la fois l'intersection de tous les convexes de $\mathcal{E}$ contenant P, et aussi l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de points de P.

Exemples 1.72.

— L'enveloppe convexe de deux points P et Q est le segment $[PQ]$.

— L'enveloppe convexe de trois points A, B, C est le triangle ABC "plein".

Voici un exemple d'énoncé faisant usage de la notion d'enveloppe convexe :

Théorème 1.73 (Gauss-Lucas)**.** *On identifie $\mathbf{C}$ avec un plan affine réel. Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ un polynôme non constant.*

Alors les racines de P' sont situeés dans l'enveloppe convexe des racines de P.

Démonstration. Scinder P, puis calculer la décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$. Évaluer en une racine de P' et conjuguer. $\square$

Remarque 1.74. On peut montrer également que les racines de P' ont même isobarycentre que celles de P. Par conséquent, si P est de degré n, alors l'unique racine de $P^{(n-1)}$ est l'isobarycentre des racines de P.

Le théorème suivant est utile notamment pour ses applications aux propriétés de l'enveloppe convexe.

Théorème 1.75 (Carathéodory)**.** *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine réel de dimension n et $P \subset \mathcal{E}$ non vide. l'enveloppe convexe de P est exactement l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de $n+1$ points de P.*

Démonstration. Fixons un point $O \in \mathcal{E}$.

Soit $M \in \mathrm{Conv}(P)$. Alors il existe $k \geq 1$, $P_1, \ldots, P_k \in P$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k > 0$ avec $\sum_i \lambda_i = 1$ tels que $P = \mathrm{Bar}((P_1, \lambda_1), \ldots, (P_k, \lambda_k))$. On a donc $\overrightarrow{OM} = \sum_i \lambda_i \overrightarrow{OP_i}$.

Supposons $k \geq n+2$.

Alors la famille $(\overrightarrow{P_1P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_1P_k})$ est formé d'au moins $n+1$ vecteurs, donc elle est liée : il existe $(\mu_2, \ldots, \mu_k) \in K^{k-1} \setminus \{0\}$ tels que $\sum_{i \geq 2} \mu_i \overrightarrow{P_1P_i} = O$. Posons $\mu_1 := -(\mu_2 + \cdots + \mu_k)$, alors on a $\sum_i \mu_i = 0$ et $\sum_i \mu_i \overrightarrow{P_1P_i} = O$.

Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \textstyle\sum_i \lambda_i \overrightarrow{OP_i} - t \sum_i \mu_i \overrightarrow{P_1P_i} = \sum_i \lambda_i \overrightarrow{OP_i} - t\left(\sum_i \mu_i\right) \overrightarrow{P_1O} - t \sum_i \mu_i \overrightarrow{OP_i} \\ &= \textstyle\sum_i (\lambda_i - t\mu_i) \overrightarrow{OP_i}\,.\end{aligned}$$

On cherche un réel t tel que

1. pour tout i, $\lambda_i - t\mu_i \geq 0$.
2. il existe $1 \leq j \leq n$ tel que $\lambda_j - t\mu_j = 0$.

Puisque $\sum_i \mu_i = 0$ et les μ_i ne sont pas tous nuls, il existe i tel que $\mu_i > 0$. Notons $M := \{\frac{\lambda_i}{\mu_i}, \mu_i > 0\}$ et $t := \min M$. Définissons $\lambda'_i := \lambda_i - t\mu_i$.

Alors $\sum_i \lambda'_i = 1$ et il existe j tel que $\lambda'_j = 0$. Pour tout i tel que $\mu_i > 0$, on a $t \leq \frac{\lambda_i}{\mu_i}$, donc $\lambda'_i = \lambda_i - t\mu_i \geq 0$. Enfin, si $\mu_i \leq 0$, on a $\lambda'_i \geq \lambda_i \geq 0$, car $t > 0$.

Par conséquent, les deux conditions précédentes sont satisfaites pour cette valeur de t, donc M est le barycentre à coefficients positifs de $k-1$ points, à savoir $M = \mathrm{Bar}((P_i, \lambda'_i)_{i \neq j})$.

On conclut alors par récurrence sur k. □

Corollaire 1.76. *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine réel et $K \subset \mathcal{E}$. Si K est conpact, alors* $\mathrm{Conv}(K)$ *est compact.*

Remarque 1.77. Dans le même contexte, l'enveloppe convexe d'une partie bornée est clairement bornée, car les boules sont convexes. Mais l'enveloppe convexe d'une partie fermée n'est pas nécessairement fermée.

Le lemme suivant peut être utile dans la suite :

Lemme 1.78. *Un convexe d'un espace affine réel de dimension finie est d'intérieur vide si et seulement s'il est contenu dans un hyperplan.*

Démonstration. Le sens réciproque est évident. Montrons le sens direct. Supposons que le convexe C ne soit pas contenu dans un hyperplan. Alors C contient un repère affine $\mathcal{R}$. Puisque C est convexe, C contient l'enveloppe convexe $\mathrm{Conv}(\mathcal{R})$ (qui est appelée un "simplexe"). Or un tel simplexe est d'intérieur non vide (preuve par récurrence sur la dimension). □

Nous allons maintenant démontrer des variantes du théorème de Hahn-Banach (en dimension finie !), et en déduire des applications à l'étude des convexes d'un espace affine réel.

On commence par définir et étudier la jauge d'un convexe :

Définition 1.79. Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et C un convexe ouvert de E contenant 0.

On définit la jauge de C comme l'application $j_C : E \to \mathbf{R}^+$ définie par

$$j_C(x) := \inf\{\lambda > 0 : \frac{x}{\lambda} \in C\}\,.$$

Cette application vérifie les propriétés suivantes :