Université de Paris VI
D. Bertrand

Master M1 2009-2010
*Algèbre géométrique*

**CHAPITRE II**

**GÉOMÉTRIE PROJECTIVE**

# 1 Espaces projectifs.

## 1.1 Sous-espaces projectifs

Soient $K$ un corps commutatif, et $E$ un espace vectoriel de dimension finie sur $K$. Rappelons (chap. 1, §1.4) que l'espace projectif déduit de $E$ est l'espace $\mathbb{P}(E) = (E - \{0\})/K^*$. Il est vide si $dim E = 0$, c-à-d. si $E = \{\overrightarrow{0}\}$. Sinon, ses éléments s'identifient aux droites (vectorielles) de $E$. Par définition, la *dimension de* $\mathbb{P}(E)$ est le nombre

$$dim\, \mathbb{P}(E) := dim E - 1.$$

Ainsi, pour $E = K^{n+1}$, $\mathbb{P}_n(K) := \mathbb{P}(K^{n+1})$ est de dimension $n$. On parle de point, droite, plan projectif si $dim E - 1 = 0, 1, 2$.

Un *sous-espace projectif de* $\mathbb{P}(E)$ est une partie de $\mathbb{P}(E)$ de la forme $\mathbb{P}(F)$, où $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$ : c'est l'ensemble des droites vectorielles de $E$ contenues dans $F$. Par définition, la codimension de $\mathbb{P}(F)$ dans $\mathbb{P}(E)$ est la codimension de $F$ dans $E$, de sorte que

$$dim\, \mathbb{P}(F) + codim\, \mathbb{P}(F) = dim F - 1 + codim F = dim E - 1 = dim\, \mathbb{P}(E),$$

comme il se doit. Un hyperplan de $\mathbb{P}(E)$ est un sous-espace projectif de $\mathbb{P}(E)$ de codimension 1.

**Proposition 1.1.** *Soient $F, G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$. Alors, $\mathbb{P}(F) \cap \mathbb{P}(G)$ est le sous-espace projectif $\mathbb{P}(F \cap G)$ de $\mathbb{P}(E)$, et l'on a : $dim\ (\mathbb{P}(F) \cap \mathbb{P}(G)) = dim\ \mathbb{P}(F) + dim\ \mathbb{P}(G) - dim\ \mathbb{P}(F + G)$. Ainsi, l'intersection de deux droites distinctes du plan projectif est toujours un point.*

*Preuve* : $\mathbb{P}(F) \cap \mathbb{P}(G)$ est l'ensemble des droites vectorielles de $E$ contenues dans $F \cap G$, c-à-d. $\mathbb{P}(F \cap G)$. Sa dimension $dim(F \cap G) - 1$ vaut bien

$dimF-1+dimG-1-(dim(F+G)-1)$. Si $\Delta_1 = \mathbb{P}(\Pi_1)$ et $\Delta_2 = \mathbb{P}(\Pi_2)$ sont deux droites distinctes du plan projectif $\mathbb{P}(E)$, les plans vectoriels $\Pi_1$ et $\Pi_2$ de $E \simeq K^3$ sont distincts, donc $\Pi_1 + \Pi_2 = E$, et $\Delta_1 \cap \Delta_2$, de dimension 0, est un point. Plus généralement, dès que $\mathbb{P}(F)$ a pour dimension la codimension de $\mathbb{P}(G)$, leur intersection, de dimension $\geq 0$, est non vide.

Outre cette propriété, qui montre que la notion de parallèlisme n'a pas de sens en géométrie projective, voici quelques applications de cette proposition.

• *Indépendance projective, repères* : l'intersection d'un nombre quelconque de sous-espaces projectifs de $\mathbb{P}(E)$ est encore un sous-espace projectif. Étant donné un ensemble $S = \{\mathbf{P}_j, j = 0,..,k\}$ de points $\mathbb{P}(E)$, on peut donc parler du plus petit sous-espace projectif $< S >$ de $\mathbb{P}(E)$ contenant $S$. On appelle *$< S >$ le sous-espace projectif de $\mathbb{P}(E)$ engendré par $S$.* Si $\mathbf{P}_j = \mathbb{P}(D_j)$, où les $D_j = K\overrightarrow{v_j}$ sont des droites vectorielles de $E$, on a $< S >= \mathbb{P}(F)$, où $F$ désigne le sous-espace vectoriel de $E$ engendré par les $\overrightarrow{v_j}$. On dit que les points $\mathbf{P}_j$ sont *projectivement indépendants* si les vecteurs $\overrightarrow{v_j}$ sont linéairement indépendants, c-à-d. si $dimF = k+1$. Par exemple, deux points distincts $\mathbf{P}_1 \neq \mathbf{P}_2$ sont projectivement indépendants: $K\overrightarrow{v_1} + K\overrightarrow{v_2}$ est alors un plan, et $(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2) :=< \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 >$ est une droite projective. Si $\mathbf{P}_3 \notin (\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2)$, les points $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ engendrent un plan, etc.

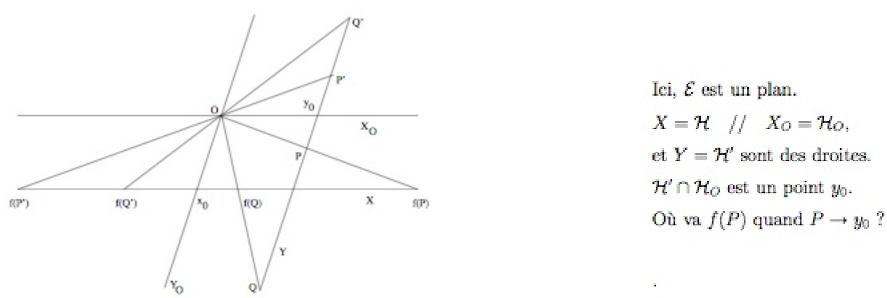
Si $dim\, \mathbb{P}(E) = n$, on dit qu'un $(n+2)$-uplet $\{\mathbf{P}_j, j = 0,..,n+1\}$ est un *repère projectif de* $\mathbb{P}(E)$ si $n+1$ quelconques de ces points sont projectivement indépendants, autrement dit si, pour tout $j_0$, l'ensemble $\{\mathbf{P}_j, j = 0,...,n+1, j \neq j_0\}$ engendre $\mathbb{P}(E)$. Comme on le montrera au §2.2, Prop. 2.2, le choix d'un repère projectif permet d'identifier $\mathbb{P}(E)$ et $\mathbb{P}_n(K)$, et d'utiliser des *coordonnées homogènes* pour repérer les points de $\mathbb{P}(E)$. Nous repoussons au §2.2 la traduction algébrique que ces coordonnées fournissent aux notions géométriques étudiées dans ce §1.

• *Projections centrales* : soient $\mathbf{O}$ un point de $\mathbb{P}(E)$, et $\mathbf{H}$ un hyperplan de $\mathbb{P}(E)$ ne passant pas par $\mathbf{O}$. Toute droite projective $\Delta$ de $\mathbb{P}(E)$ passant par $\mathbf{O}$ rencontre $\mathbf{H}$ en un unique point $\mathbf{p}_\Delta$. En effet, $\mathbf{O} = \mathbb{P}(D), \mathbf{H} = \mathbb{P}(H), \Delta = \mathbb{P}(\Pi)$, où $D, H, \Pi$, sont une droite, un hyperplan, un plan de l'espace vectoriel $E$. Les conditions $\mathbf{O} \notin \mathbf{H}, \mathbf{O} \in \Delta$ se transcrivent par $D \not\subset H, D \subset \Pi$, de sorte que $\Pi \cap H$ est une droite vectorielle de $E$, et $\mathbf{p}_\Delta := \Delta \cap \mathbf{H} = \mathbb{P}(\Pi \cap H)$ est un point projectif.

Pour tout point $\mathbf{P}$ de $\mathbb{P}(E)$ distinct de $\mathbf{O}$, la droite projective $\Delta_\mathbf{P} = (\mathbf{OP})$ est bien définie, et on peut considérer son intersection $\mathbf{p}_{\Delta_\mathbf{P}}$ avec $\mathbf{H}$.

L'application $\pi : \mathbb{P}(E) - \{\mathbf{O}\} \to \mathbf{H} : \mathbf{P} \mapsto \mathbf{p}_{\boldsymbol{\Delta}_\mathbf{P}}$ s'appelle la *projection de centre* $\mathbf{O}$ *sur* $\mathbf{H}$. Elle est surjective. Si $\mathbf{H}'$ est un second hyperplan de de $\mathbb{P}(E)$ ne passant pas par $\mathbf{O}$, la restriction $\pi_{|\mathbf{H}'} : \mathbf{H}' \to \mathbf{H}$ de $\pi$ à $\mathbf{H}'$ établit une bijection de $\mathbf{H}'$ sur $\mathbf{H}$, qu'on appelle *perspective* (projective) de centre $\mathbf{O}$ de $\mathbf{H}'$ sur $\mathbf{H}$.

**Remarque** : en géométrie affine, étant donnés un point $O$ d'un espace affine $\mathcal{E}$, et un hyperplan $\mathcal{H}$ ne passant pas par $O$, soit $\mathcal{H}_O$ l'hyperplan parallèle à $\mathcal{H}$ passant par $O$. On appelle projection centrale de centre $O$ sur $\mathcal{H}$ l'application $f : \mathcal{E} - \mathcal{H}_O \to \mathcal{H}$ qui, à un point $P$ de $\mathcal{E}$ n'appartenant pas $\mathcal{H}_O$ attache le point d'intersection $p_{(OP)}$ de $(OP)$ avec $\mathcal{H}$. La restriction $f_{|\mathcal{H}'}$ de $f$ à un hyperplan $\mathcal{H}'$ ne passant pas par $O$ s'appelle une perspective affine. Elle n'est pas définie aux points d'intersection de $\mathcal{H}'$ avec $\mathcal{H}_O$, et elle ne respecte pas le parallélisme. Après avoir étudié la section suivante (mais sans en garder les notations), le lecteur pourra interpréter les hyperplans $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$ comme des ouverts affines d'hyperplans projectifs $\mathbb{P}(H), \mathbb{P}(H')$ d'un espace projectif $\mathbb{P}(E)$, et la perspective projective $\pi_{|\mathbf{H}'}$ comme un prolongement "continu"[1], et partout défini, de la perspective affine $f_{|\mathcal{H}'}$.




[1] Bien entendu, cette notion nécessite de munir $\mathbb{P}(E)$ d'une topologie. Pour $E$ de dimension finie et $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, un partie de $\mathbb{P}(E)$ est ouverte si la réunion des droites de $E$, privées de $\overrightarrow{0}$, qui la constituent est un ouvert de $E - \{\overrightarrow{0}\}$. On vérifie alors que $\mathbb{P}(E)$ est compact, que les ouverts affines sont effectivement des ouverts, et que les perspectives projectives sont des homéomorphismes. Topologiquement, $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ est un cercle, $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ est une sphère (bord d'une boule de $\mathbb{R}^3$), tandis que $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ n'est pas simplement connexe.

## 1.2 Du projectif à l'affine, et inversement

Les éléments de la droite projective $\mathbb{P}_1(K)$ sont :

- les droites $D$ de $E = K^2$ d'équation $y = \alpha x$, qu'on peut repérer par leur pente $\alpha \in K$, c-à-d. par l'ordonnée de leur point d'intersection $P_D$ avec la droite affine $\mathcal{H}$ de $K^2$ d'équation $x = 1$.

- la droite $H$ de $K^2$ d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées, de pente infinie), qu'on peut repérer par le symbole $\infty'$.

Ainsi, $\mathbb{P}_1(K) \simeq K \cup \infty'$. Mais cette décomposition de la droite projective en réunion d'une droite affine et d'un point n'a rien de canonique : $\mathbb{P}_1(K)$ est aussi formé des droites de $K^2$ d'équation $x = \beta y$, qu'on peut repérer par le scalaire $\beta \in K$, et de la droite de $K^2$ d'équation $y = 0$, qu'on peut repérer par le symbole $\infty$, d'où $\mathbb{P}_1(K) = K \cup \infty$. En dehors des points (distincts) $\infty$ et $\infty'$, le lien entre les droites affines $K$ fournies par ces deux décompositions est donné par la relation $\beta = 1/\alpha$, qui n'est pas une transformation affine.

Plus généralement, soient $E$ un espace vectoriel, $H$ un hyperplan vectoriel de $E$, et $\mathcal{H}$ un hyperplan affine de l'espace affine attaché à $E$ (au sens du I.2.1, exemple), de direction $H$ et distinct de $H$. D'après I, Prop. 2.1.ii, une droite vectorielle $D$ de $E$ non contenue dans $H$ rencontre $\mathcal{H}$ en un unique point $P_D$; inversément, par tout point $P$ de $\mathcal{H}$ passe une unique droite vectorielle $D_P$ de $E$, et cette droite n'est pas contenue dans $H$. Par conséquent, l'application

$$P \mapsto D_P : \mathcal{H} \simeq \mathbb{P}(E) - \mathbb{P}(H)$$

établit une bijection de l'espace affine $\mathcal{H}$ avec le complémentaire dans $\mathbb{P}(E)$ du sous-espace projectif $\mathbb{P}(H)$ formé par les droites vectorielles de $E$ contenues dans $H$, et permet de munir ce complémentaire d'une structure d'espace affine sous $H$, qu'on identifie à $\mathcal{H}$. On a donc une décomposition

$$\mathbb{P}(E) = \mathcal{H} \cup \mathbb{P}(H),$$

dans laquelle l'espace affine $\mathcal{H}$ est de même dimension $dim\mathcal{H} = dimH = dimE - 1 = dim\, \mathbb{P}(E)$ que $\mathbb{P}(E)$. On dit que $\mathbb{P}(E) - \mathbb{P}(H)$ est *l'ouvert affine* complémentaire de $\mathbb{P}(H)$ dans $\mathbb{P}(E)$.

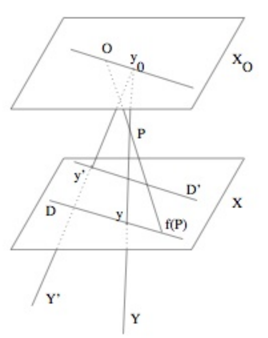
Pour $\mathbb{P}(H)$ fixé, on peut remplacer $\mathcal{H}$ par un autre hyperplan affine $\tilde{\mathcal{H}} \neq H$ de $E$ de direction $H$. Cela modifie la structure d'espace affine sous $H$ de l'ouvert affine $\mathbb{P}(E) - \mathbb{P}(H) \simeq \tilde{\mathcal{H}}$, mais de façon négligeable. En effet, l'application $f : P_D \rightsquigarrow \tilde{P}_D$ de $\mathcal{H}$ dans $\tilde{\mathcal{H}}$ à laquelle conduit la construction précédente est la restriction à $\mathcal{H}$ d'une homothétie vectorielle $f_\mu$ de $E$, de sorte que pour tout $\overrightarrow{v} \in H$, $f(P_D +_{\mathcal{H}} \overrightarrow{v}) = \tilde{P}_D +_{\mathcal{H}'} \mu \overrightarrow{v}$. Les notions de sous-espaces affines, parallèlisme, etc, dont $\mathcal{H}$ et $\tilde{\mathcal{H}}$ munissent l'ouvert affine $\mathbb{P}(E) - \mathbb{P}(H)$ sont donc les mêmes, et nous ferons l'abus d'omettre le choix de $\mathcal{H}$ dans la définition de sa structure d'espace affine. En fait, $\mathbb{P}(E) - \mathbb{P}(H)$ est de façon canonique un espace affine sous l'espace vectoriel $Hom(E/H, H)$, et notre abus consiste simplement à identifier la droite vectorielle $E/H$ à $K$.

**Remarque** : en démarrant avec l'espace vectoriel $E = K^{n+1}$, et en itérant le procédé, on obtient des décompositions de $\mathbb{P}(E)$ en réunions disjointes

$$\mathbb{P}_n(K) = K^n \cup K^{n-1} \cup ... \cup K \cup \{\text{un point}\},$$

d'espaces affines de dimensions $n = dim\ \mathbb{P}_n(K), n-1, ..., 0$. Si $K$ est un corps de cardinal $q$, on retrouve ainsi la formule (dite d'intégration motivique) $card\ (\mathbb{P}_n(K)) = q^n + q^{n-1} + ... + q + 1$ du chapitre I, §1.4.

Revenons à la décomposition $\mathbb{P}(E) = \mathcal{H} \cup \mathbb{P}(H)$ attachée à un hyperplan $\mathbb{P}(H)$ (et à un choix de $\mathcal{H}$), et considérons un sous-espace projectif $\mathbf{W} = \mathbb{P}(W)$, de dimension $w$, de $\mathbb{P}(E)$ non contenu dans $\mathbb{P}(H)$, c-à-d. tel que le sous-espace vectoriel $W$, de dimension $w+1$, de $E$ ne soit pas contenu dans $H$. Alors $\mathcal{W} = W \cap \mathcal{H}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{H}$ de même dimension $w$ que $\mathbf{W}$. Inversement, pour tout sous-espace affine $\mathcal{W}$, de dimension $w$, de $\mathcal{H}$, l'espace vectoriel $W$ engendré par $\mathcal{W}$ dans l'espace vectoriel $E$ est de dimension $w+1$, et définit un sous-espace projectif $\mathbf{W} := \mathbb{P}(W)$ de dimension $w$ de $\mathbb{P}(E)$ non contenu dans $\mathbb{P}(H)$. Ainsi, l'application $\mathbf{W} \rightsquigarrow \mathcal{W}$ établit une bijection entre l'ensemble des sous-espaces projectifs de $\mathbb{P}(E)$ non contenus dans $\mathbb{P}(H)$ et l'ensemble des sous-espaces affines de $\mathcal{H}$.




Exercice :

rebaptiser les éléments
de cette figure
en fonction du texte

Cette bijection respecte les dimensions et l'alignement des points, mais pas les intersections : deux droites $\Delta_1 = \mathbb{P}(\Pi_1)$ et $\Delta_2 = \mathbb{P}(\Pi_2)$ de $\mathbb{P}(E)$ non contenues dans $\mathbb{P}(H)$ peuvent se rencontrer en un point $\varpi$ de $\mathbb{P}(H)$; dans ce cas, $\Pi_1 \cap \Pi_2$ est une droite vectorielle $D$ contenue dans $H$, avec $\varpi = \mathbb{P}(D)$, et les droites affines $\mathcal{D}_i = \Pi_i \cap \mathcal{H}, i = 1, 2$, de $\mathcal{H}$, toutes deux de direction $D$, sont parallèles.

Chacun des points $\varpi = \mathbb{P}(D)$ de $\mathbb{P}(H)$ peut ainsi être vu comme le point de rencontre "à l'infini" de toutes les droites (parallèles) de $\mathcal{H}$ de direction $D$. De ce fait, on dit que la décompositions $\mathbb{P}(E) = \mathcal{H} \cup \mathbb{P}(H)$ correspond au *choix de* $\mathbb{P}(H)$ *comme hyperplan à l'infini de* $\mathbb{P}(E)$. *Tout hyperplan* de $\mathbb{P}(E)$ peut servir d'hyperplan à l'infini, il n'y a pas de choix canonique. Et pour des choix d'hyperplans à l'infini $\mathbb{P}(H) \neq \mathbb{P}(H')$ distincts, les ouverts affines $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$ qu'ils définissent ont des structures affines totalement différentes. Par exemple, les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ de $\mathcal{H}$ étudiées ci-dessus sont parallèles (au sens de la structure affine de $\mathcal{H}$), mais si le point $\varpi$ de $\mathbb{P}(H)$ n'appartient pas à $\mathbb{P}(H')$ (c-à-d. si $\varpi \in \mathcal{H}'$), elles définissent dans l'espace affine $\mathcal{H}'$ des droites $\mathcal{D}'_1, \mathcal{D}'_2$ qui se rencontrent au point $\varpi$ de $\mathcal{H}'$. Un énoncé sur les droites parallèles se transcrit alors sans plus de justification en un nouvel énoncé, concernant des droites concourantes. Voir le §1.3 pour quelques applications de ce principe. Auparavant, nous allons, en sens inverse, associer à tout espace affine $\mathcal{E}$ un espace projectif $\hat{\mathbb{P}}(\mathcal{E})$ dont $\mathcal{E}$ est un ouvert affine; la construction sera cette fois canonique.

**Projectivisé d'un espace affine**

Soit $E$ un espace vectoriel (qui va jouer le rôle précédemment dévolu à $H$), de dimension $n$, et soit $\mathcal{E}$ un espace affine sous l'espace vectoriel $E$. Son prolongement vectoriel canonique $\hat{E}$ (voir I, §2.1, Remarque) est un espace vectoriel de dimension $n + 1$, qui contient $E$ comme sous-espace vectoriel, et $\mathcal{E} \neq E$ comme sous-espace affine de direction $E$. On dispose donc de la décomposition

$$\mathbb{P}(\hat{E}) = \mathcal{E} \cup \mathbb{P}(E),$$

qui permet de voir naturellement $\mathcal{E}$ comme l'ouvert affine complémentaire de l'hyperplan $\mathbb{P}(E)$ de l'espace projectif $\mathbb{P}(\hat{E}) := \hat{\mathbb{P}}(\mathcal{E})$. On dit que $\hat{\mathbb{P}}(\mathcal{E})$ est le projectivisé de l'espace affine $\mathcal{E}$, et que $\mathbb{P}(E)$, qu'on note $\mathcal{E}_\infty$, est *l'hyperplan*[2]

[2] Noter l'article défini. L'absence de cet article dans certaines langues les rend d'un usage délicat en mathématiques. Une comparaison des productions mathématiques grecques et romaines suffira pour s'en convaincre.

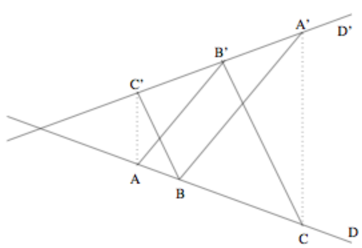
*à l'infini de* $\mathcal{E}$. Les dimensions $dim\ \mathcal{E} = dim E = dim \hat{E} - 1 = dim\ \hat{\mathbb{P}}(\mathcal{E})$ de $\mathcal{E}$ et de son projectivisé sont égales. Si $\mathcal{E} = \mathcal{D}$ est une droite, $\mathcal{D}_\infty$ est un point, qu'on note plutôt $\infty_\mathcal{D}$, et qu'on appelle le point à l'infini de la droite affine $\mathcal{D}$.

Si $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$, son projectivisé $\mathbb{P}(\hat{F})$ s'identifie naturellement à un sous-espace projectif de $\mathbb{P}(\hat{E})$, avec $\mathcal{F}_\infty \subset \mathcal{E}_\infty$. Ainsi, pour toute droite $\mathcal{D}$ de $\mathcal{E}$, le point à l'infini $\infty_\mathcal{D}$ de $\mathcal{D}$ est un point de $\mathcal{E}_\infty$, et deux droites $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ sont parallèles si et slt si $\infty_{\mathcal{D}_1} = \infty_{\mathcal{D}_2}$ dans $\mathcal{E}_\infty$.

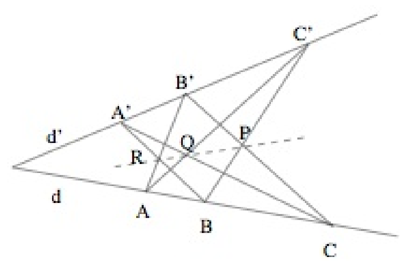
N-B.: si $K$ est infini, toute configuration finie de points d'un espace projectif est contenue dans un ouvert affine convenable. C'est là qu'on les dessine, et nous abandonnerons souvent les notations en lettres grasses utilisées pour désigner les éléments d'un espace projectif.

## 1.3 Retour à la géométrie affine

Le principe de changement d'hyperplan à l'infini évoqué plus haut fournit des théorèmes de Pappus et de Desargues (I. §3.3) les versions équivalentes suivantes.




Pappus affine

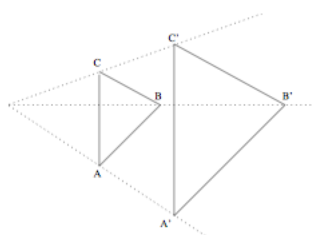



Pappus "projectif"

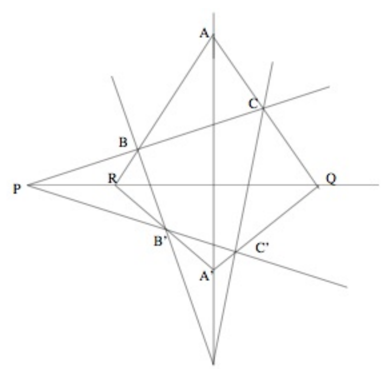
**Théoreme 1.2.** (Pappus) *Soient $d, d'$ deux droites distinctes d'un plan projectif, et $A, B, C$ (resp. $A', B', C'$) trois points distincts situés sur $d$ (resp. $d'$), mais distincts de $d \cap d'$. On suppose que les droites $(BC')$ et $(B'C)$ se coupent en un point $P$, $(CA')$ et $(C'A)$ en $Q$, et $(AB')$ et $(A'B)$ en $R$. Alors, les points $P, Q, R$ sont alignés.*

*Preuve* : la figure de droite est dessinée dans un plan affine, que nous commençons par projectiviser en un plan projectif $\mathbb{P}$. Choisissons comme nouvelle droite à l'infini de $\mathbb{P}$ la droite projective $\Delta = (PQ)$ (ou, comme on dit plus brièvement : envoyons les points $P$ et $Q$ à l'infini). Les droites $(AC')$ et $(A'C)$ se rencontrent en le point $Q$ de cette droite à l'infini. Vues dans le plan affine $\mathcal{H}$ complementaire de $\Delta$ dans $\mathbb{P}$, elles sont donc parallèles. De même, $(BC')$ et $(CB')$, qui se coupent en $P \in \Delta$, sont parallèles dans $\mathcal{H}$. D'après la version affine du théorème de Pappus (I. Théorème 3.3), les droites affines $(AB')$ et $(A'B)$ de $\mathcal{H}$ sont parallèles. Par conséquent, le point d'intersection $R$ des droites projectives $(AB')$ et $(A'B)$ de $\mathbb{P}$ est situé sur $\Delta = (PQ)$, et les points $P, Q, R$ sont bien alignés.

Inversement, le Théorème 3.3 du chapitre I est conséquence de cet énoncé : soit $\mathbb{P}$ le projectivisé du plan affine $\mathcal{E}$ de la figure de gauche et $\mathcal{E}_\infty$ sa droite à l'infini. Les droites $(AB')$ et $(BA')$ de $\mathcal{E}$ sont parallèles, donc se rencontrent dans $\mathbb{P}$ en un point $R$ de $\mathcal{E}_\infty$. De même, $(BC')$ et $(CB')$ se rencontrent dans $\mathbb{P}$ en un point $P$ de $\mathcal{H}_\infty$, distinct de $R$ puisque $C \neq A$. D'après l'énoncé projectif, le point $Q = (AC') \cap (A'C)$ est situé sur la droite $(PR)$, qui est la droite à l'infini de $\mathcal{E}$, donc $(AC')//(A'C)$ dans $\mathcal{E}$.




Desargues affine




Desargues "projectif"

**Théoreme 1.3.** (Desargues) *Soient $A, B, C$ (resp. $A', B', C'$) trois points projectivement indépendants d'un plan projectif, avec $A \neq A', B \neq B', C \neq C'$. Alors les points $P = (BC) \cap (B'C'), Q = (CA) \cap (C'A'), R = (AB) \cap (A'B')$ sont alignés si et seulement si les droites $(AA'), (BB'), (CC')$ sont concourantes.*

La preuve de l'implication $\Rightarrow$ est laissée au plaisir du lecteur. Pour $\Leftarrow$, on commencera par établir une réciproque élémentaire du Théorème 3.5 du chapitre I. Voir aussi l'exercice du §2.3 du présent chapitre.

# 2 Le groupe projectif

## 2.1 Applications projectives

Soient $E, E'$ deux espaces vectoriels, $\mathbb{P}(E), \mathbb{P}(E')$ les espaces projectifs associés, et $f \in \mathcal{L}(E, E')$ une application linéaire non identiquement nulle de $E$ dans $E'$. Toute droite vectorielle $D$ de $E$ admet pour image sous $f$ :

- ou bien le point $\overrightarrow{0}_{E'}$ si $D \subset Ker(f)$;

- ou bien une droite $f(D)$ de $E'$,

de sorte que $f$ induit une application, dite projective :

$$\mathbb{P}(f) : \mathbb{P}(E) - \mathbb{P}(Ker(f)) \to \mathbb{P}(E') : \mathbb{P}(D) \mapsto \mathbb{P}(f)(D) := \mathbb{P}(f(D))$$

définie sur le complémentaire dans $\mathbb{P}(E)$ du sous-espace projectif $\mathbb{P}(Kerf)$, à valeurs dans $\mathbb{P}(E')$. En particulier, $\mathbb{P}(f)$ est définie sur tout $\mathbb{P}(E)$ si et seulement si $f$ est injective, et (exercice) cela équivaut à demander que $\mathbb{P}(f)$ soit injective sur son domaine de définition. Si $f$ est un isomorphisme, $\mathbb{P}(f)$ est une bijection de $\mathbb{P}(E)$ sur $\mathbb{P}(E')$, d'application réciproque $\mathbb{P}(f^{-1})$; on dit alors que c'est une *transformation projective*, ou encore une *homographie.* La loi $\mathbb{P}(f) \circ \mathbb{P}(g) = \mathbb{P}(f \circ g)$ munit ainsi l'ensemble des transformations projectives de $\mathbb{P}(E)$ dans lui-même d'une structure de groupe, noté $G\mathbb{P}(E)$, et appelé le *groupe projectif* de $\mathbb{P}(E)$.

Si $\mathbb{P}(W)$ est un sous-espace projectif de $\mathbb{P}(E)$ ne rencontrant pas $\mathbb{P}(Kerf)$, c-à-d. si $W \cap Kerf = \{\overrightarrow{0}_E\}$, $\mathbb{P}(f)$ est définie sur tout $\mathbb{P}(W)$, et l'envoie injectivement sur le sous-espace projectif $\mathbb{P}(f)(\mathbb{P}(W)) = \mathbb{P}(f(W))$ de $\mathbb{P}(E')$, de même dimension que $\mathbb{P}(W)$. Autrement dit, $\mathbb{P}(f)$ induit une homographie de $\mathbb{P}(W)$ sur son image. Exemple : les perspectives projectives introduites au §1.1 (et généralisées dans l'exemple ci-dessous).

Les applications projectives $\mathbb{P}(f)$ respectent l'alignement : si $P_i = \mathbb{P}(D_i)$, $i = 1, 2, 3$, sont trois points de $\mathbb{P}(E) - \mathbb{P}(Ker(f))$ alignés et distincts, les droites $D_1, D_2, D_3$ engendrent dans $E$ un plan $W \not\subset Ker(f)$. Si $W \cap Ker(f) = \{\overrightarrow{0}_E\}$, $f(W)$ est un plan, et les points $\mathbb{P}(f)(P_i)$ sont situés sur la droite $\mathbb{P}(f(W))$; sinon, $f(W)$ est une droite, et les trois points $\mathbb{P}(f)(P_i)$ coïncident avec le point $\mathbb{P}(f(W))$.

**Exemple** (projections et perspectives généralisées) : Soient $F, W$ deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de dimensions $> 0$ de $E$. La projection vectorielle $f : E \to W$ attachée à la décomposition $E = F \oplus W$ a pour noyau $F$, et définit une application projective surjective : $\mathbb{P}(f) : \mathbb{P}(E) - \mathbb{P}(F) \to \mathbb{P}(W)$, appelée projection de centre $\mathbb{P}(F)$ sur $\mathbb{P}(W)$. Pour tout point $P = \mathbb{P}(D)$ de $\mathbb{P}(E)$ hors de $\mathbb{P}(F)$, le sous-espace projectif $\Phi_P := \mathbb{P}(D + F)$ a pour dimension $dimF = dim\mathbb{P}(D) + dim\mathbb{P}(F)$; d'après la Proposition 1.1, $\Phi_P$ rencontre donc $\mathbb{P}(W)$ en un unique point $p_{\Phi_P} = \mathbb{P}((D+F)\cap W)$. Mais la projection vectorielle $f$ vérifie : $f(D) = f((D+F)\cap W) = (D+F)\cap W$, donc $p_{\Phi_P} = \mathbb{P}(f)(P)$. Si $F$ est une droite, $\mathbb{P}(F) = \mathbf{O}$ et $\mathbb{P}(W) = \mathbf{H}$ sont un point et un hyperplan : on retrouve la projection centrale du §1.1, qui est donc une application projective. En particulier, la perspective $\pi_{|\mathbf{H}'} : \mathbf{H}' \to \mathbf{H}$ qu'elle induit sur tout hyperplan $\mathbf{H}'$ ne passant pas par $\mathbf{O}$ est une homographie. Idem, en dimension supérieure, pour la restriction de $\mathbb{P}(f)$ à tout $\mathbb{P}(W')$ ne rencontrant pas $\mathbb{P}(F)$.

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n + 1$. L'ensemble $\{\lambda \mathbf{I}_{n+1}, \lambda \in K^*\} \subset GL_{n+1}(K)$ des matrices carrées scalaires inversibles forme un sous-groupe de $GL_{n+1}(K)$ isomorphe à $K^*$, et dont les éléments commutent avec tous les éléments de $GL_{n+1}(K)$ (en fait, c'en est tout le centre). Le quotient

$$PGL_{n+1}(K) = GL_{n+1}(K)/K^*$$

est donc naturellement muni d'une structure de groupe. De façon intrinsèque, les homothéties $\lambda.id_E, \lambda \in K^*$, de $E$ forment le centre de $GL(E)$, et on pose $PGL(E) = GL(E)/K^*.id_E$. La partie (i) de la proposition suivante justifie que ces quotients s'appellent aussi des groupes projectifs. La partie (ii) montre que les groupes affines s'identifient aux sous-groupes de groupes projectifs laissant stables un hyperplan projectif.

**Proposition 2.1.** *soit $E$ un espace vectoriel de dimension $> 0$.*

*i) L'application $\mathbb{P} : GL(E) \to G\mathbb{P}(E) : f \mapsto \mathbb{P}(f)$ induit un isomorphisme de groupes*

$$PGL(E) \simeq G\mathbb{P}(E).$$

*ii) Soient $\mathcal{E}$ un espace affine sous $E$, et $\mathcal{E}_\infty = \mathbb{P}(E)$ l'hyperplan à l'infini de son projectivisé $\mathbb{P}(\hat{E})$ . Toute transformation affine $f$ de $\mathcal{E}$ se prolonge de* *façon unique en une transformation projective $\mathbb{P}(\hat{f})$ de $\mathbb{P}(\hat{E})$, et l'application $\hat{\mathbb{P}} : f \mapsto \mathbb{P}(\hat{f})$ établit un isomorphisme de groupe*

$$GA(\mathcal{E}) \simeq \{\varphi \in G\mathbb{P}(\hat{E}), \varphi(\mathcal{E}_\infty) = \mathcal{E}_\infty.\}$$

*Preuve* : i) puisque $\mathbb{P}(f \circ g) = \mathbb{P}(f) \circ \mathbb{P}(g)$, $\mathbb{P}$ est un morphisme de groupe, qui est surjectif par définition. Son noyau est constitué des automorphismes de $E$ admettant tous les vecteurs de $E$ comme vecteurs propres, et est donc réduit aux homothéties.

Pour $E = K^{n+1}$, prendre garde aux indices : c'est $PGL_{n+1}(K)$ qui représente le groupe projectif de $\mathbb{P}_n(K)$.

ii) Identifions $\hat{E}$ à $E \oplus K = E \times K$ en fixant une origine $P_0$ de $\mathcal{E}$, de sorte que $\mathcal{E} = E \times \{1\}, P_0 = (\overrightarrow{0}_E, 1)$. Les éléments $f$ de $GA(\mathcal{E})$ se mettent alors sous la forme $[\overrightarrow{v}, U] = \begin{pmatrix} U & \overrightarrow{v} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, où $\overrightarrow{v} \in E, U = \overrightarrow{f} \in GL(E)$ (notations suivant la Definition 3.2 du chapitre I). Notons $\hat{f}$ l'élément de $GL(\hat{E})$ défini par cette matrice. Pour tout $P = P_0 + \overrightarrow{P_0P} \in \mathcal{E}$, c-à-d. pour $P = (\overrightarrow{P_0P}, 1) \in \hat{E}$, le point $f(P) = f(P_0) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{P_0P}) = P_0 + \overrightarrow{v} + U.\overrightarrow{P_0P}$ coïncide avec le point $\hat{f}(P) = (U.\overrightarrow{P_0P} + \overrightarrow{v}, 1)$ de $\hat{E}$. Donc $\hat{f}$ prolonge bien $f$ à $\hat{E}$, et puisque $\mathcal{E}$ engendre l'espace vectoriel $\hat{E}$, c'est le seul prolongement linéaire possible. L'application $f \mapsto \hat{f}$ est un morphisme de groupes.

Dans ces conditions, $\mathbb{P}(\hat{f}) \in G\mathbb{P}(\hat{E})$ induit l'application $f$ sur l'ouvert affine $\mathcal{E}$ de $\mathbb{P}(\hat{E})$ formé par les droites vectorielles $(0_{\hat{E}}P), P \in \mathcal{E}$, et pour toute transformation projective $\mathbb{P}(g)$ de $\mathbb{P}(\hat{E})$ prolongeant $f$, l'application linéaire $g^{-1} \circ \hat{f}$ est une homothétie. Ainsi, $f$ admet un unique prolongement projectif $\mathbb{P}(\hat{f}) := \hat{\mathbb{P}}(f)$ à $\mathbb{P}(\hat{E})$, et l'application $\hat{\mathbb{P}}$ ainsi définie est un morphisme de groupes.

Enfin, un élément $\varphi = \mathbb{P}(g)$ de $G\mathbb{P}(\hat{E})$ laisse stable l'hyperplan $\mathcal{E}_\infty = \mathbb{P}(E)$ si et seulement si $g \in GL(\hat{E})$ laisse stable $E \times 0$, c'-à- d. si et seulement s'il est de la forme $g = \begin{pmatrix} U' & \overrightarrow{v}' \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, où $\lambda \in K^*$; quitte à remplacer $g$ par $\lambda^{-1}g$, ce qui ne modifie pas $\mathbb{P}(g)$, on peut en plus supposer que $\lambda = 1$. On en déduit que $\hat{\mathbb{P}}$ admet pour image le stabilisateur décrit dans l'énoncé. Comme $\hat{\mathbb{P}}$ est par définition injective, c'est un isomorphisme.

## 2.2 Coordonnés homogènes

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n+1$ sur $K$. Le choix d'une base $\overrightarrow{e_0}, ..., \overrightarrow{e_n}$ de $E$ identifie $E$ à $K^{n+1}$, et les vecteurs de $E - \{\overrightarrow{0}\}$ a des $(n+1)$-uplets de scalaires *non tous nuls*. Deux vecteurs $\overrightarrow{v} = (X_0, ..., X_n), \overrightarrow{v}' = (X'_0, ..., X'_n)$ non nuls engendrent la même droite $D$ de $E$, définissant donc le même point $P = \mathbb{P}(D)$ de $\mathbb{P}(E) \simeq \mathbb{P}_n(K)$, si et seulement si

$$\exists \lambda \in K^*,\ X'_0 = \lambda X_0,\ X'_1 = \lambda X_1, ...,\ X'_n = \lambda X_n.$$

On dit que chacun de ces $(n+1)$-uplets est un *système de coordonnées homogènes* du point $P$, et on écrit :

$$P = (X_0 : X_1 : .... : X_n) = (X'_0 : X'_1 : ... : X'_n).$$

Par exemple, un point $P$ de $\mathbb{P}_1(K) = \mathbb{P}(K^2)$ est représenté par $(X_0 : X_1)$, avec $(X_0, X_1) \neq (0,0)$, donc par $(1 : \alpha)$, avec $\alpha = X_1/X_0$ si $X_0 \neq 0$, mais aussi par $(\beta : 1)$, avec $\beta = X_0/X_1$ si $X_1 \neq 0$. Le point $(0 : X_1) = (0 : 1)$ est le point noté $\infty'$ au §1.2, tandis que $(X_0 : 0) = (1 : 0) = \infty$. Pour $P \notin \{\infty, \infty'\}$, on a $\alpha\beta = 1$.

La propriété pour un point $P$ de $\mathbb{P}_n(K)$ que $X_0$ soit nul est indépendante du choix des coordonnées homogènes : on aura alors $X'_0 = \lambda X_0 = 0$, et réciproquement, car $\lambda \neq 0$. Elle entraîne que l'une au moins des autres coordonnées $X_1, ..., X_n$ soit non nulle. En fait, l'ensemble

$$\{P \in \mathbb{P}_n(K), X_0 = 0\} \simeq \{(X_1 : ... : X_n), (X_1, ..., X_n) \in K^n - \{\overrightarrow{0}\}\} = \mathbb{P}_{n-1}(K)$$

est l'hyperplan projectif $\mathbb{P}(H_0)$ de $\mathbb{P}_n(K)$ défini par l'hyperplan vectoriel $H_0$ de $E = K^{n+1}$ d'équation $X_0 = 0$. Comme $X_0 \neq 0$ sur l'ouvert affine $\mathcal{H}_0$ complémentaire de $\mathbb{P}(H_0)$ dans $\mathbb{P}_n(K)$, on peut, en multipliant par $\lambda = 1/X_0$, représenter ses points par $(1 : x_1 = \frac{X_1}{X_0} : ... : x_n = \frac{X_n}{X_0})$, et identifier $\mathcal{H}_0$ au sous-espace affine $\overrightarrow{e_0} + H_0$ de $E$, muni des coordonnées cartésiennes $(x_1, ..., x_n)$ attachées à l'origine $\overrightarrow{e_0}$ de $\mathcal{H}_0$ et à la base $\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n}$ de $H_0$. Ce passage des coordonnées homogènes aux coordonnéees cartésiennes traduit donc le passage du projectif à l'affine décrit au §1.2. Remarquons qu'en effectuant cette construction pour $i = 0, ..., n$, on obtient $n+1$ ouverts affines $\mathcal{H}_i$, dont la réunion (non disjointe) *recouvre* l'espace projectif $\mathbb{P}_n(K)$ tout entier. Voici par exemple les formules de passage de l'ouvert affine $\mathcal{H}_0$ à l'ouvert affine $\mathcal{H}_1$ de $\mathbb{P}_2(K)$ : l'isomorphisme $\mathcal{H}_0 \simeq K^2$ est donné par $(X_0 \neq 0 :$

$X_1 : X_2) \mapsto (x = \frac{X_1}{X_0}, y = \frac{X_2}{X_0})$; l'isomorphisme $\mathcal{H}_1 \simeq K^2$ est donné par $(X_0 : X_1 \neq 0 : X_2) \mapsto (u = \frac{X_0}{X_1}, v = \frac{X_2}{X_1})$. Sur $\mathcal{H}_0 \cap \mathcal{H}_1$, on a donc $(u,v) = (\frac{1}{x}, \frac{y}{x}), (x,y) = (\frac{1}{u}, \frac{v}{u})$.

Soit maintenant $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension $n$, muni d'une origine et d'une base, qui l'identifient à $K^n$. Ses points sont repérés par des coordonnées cartésiennes $(x_1, ..., x_n)$. Écrivons son prolongement vectoriel $\hat{E}$ sous la forme $K \oplus K^n$, repéré par les coordonnées cartésiennes $(x_0, x_1, ..., x_n)$. Le plongement de $\mathcal{E}$ dans son projectivisé $\mathbb{P}(\hat{E})$ est alors donné par $(x_1, ..., x_n) \mapsto (1 : x_1 : ... : x_n)$, égal à $(\lambda : \lambda x_1 : ... : \lambda x_n)$ pour tout $\lambda \neq 0$, et $\mathcal{E}_\infty = \mathbb{P}(\{x_0 = 0\})$.

*Exemple* : dans le plan affine $\mathcal{E} = xOy$, la projection centrale de centre $O = (0,0)$ sur la droite $\mathcal{H} : y = 1$, s'écrit : $(x,y) \mapsto (\frac{x}{y}, 1)$ et induit sur la droite $\mathcal{H}' : x = 1$, la perspective affine $(1,y) \mapsto (\frac{1}{y}, 1)$. Dans son projectivisé $\mathbb{P}(\hat{E})$, repéré par les coordonnées homogènes $(X_0 : X_1 : X_2)$, avec $x = \frac{X_1}{X_0}, y = \frac{X_2}{X_0}$ sur $\mathcal{E}$, la projection centrale de centre $O = (1 : 0 : 0)$ sur la droite $H : X_0 - X_2 = 0$, s'écrit : $(X_0 : X_1 : X_2) \mapsto (X_2 : X_1 : X_2)$, et induit sur la droite $H' : X_0 - X_1 = 0$, la perspective projective $(X_0 : X_0 : X_2) \mapsto (X_2 : X_0 : X_2)$.

**Équations des sous-espaces**

Soient $\mathbb{P}(H)$ un hyperplan de $\mathbb{P}_n(K)$, et $L(X_0, ..., X_n) = a_0 X_0 + ... + a_n X_n$ une forme linéaire sur $K^{n+1}$ telle que $Ker(L) = H$. Quel que soit le choix de coordonnées projectives $(c_0 : ... : c_n)$ d'un point $P$ de $\mathbb{P}_n(K)$, la relation $P \in \mathbb{P}(H)$ équivaut à la condition $L(c_0, ..., c_n) = 0$. On écrit cette condition sous la forme $L(P) = 0$ (tout en gardant à l'esprit que $L$ n'est pas une fonction de $P$), et on dit que $L$ est une équation de $\mathbb{P}(H)$. Les autres équations de $\mathbb{P}(H)$ sont de la forme $\lambda . L$, où $\lambda \in K^*$. Si $E^* = \mathcal{L}(E, K)$ désigne l'espace dual de $E$, ces équations définisssent donc un unique point de $(E^* - \{0\})/K^*$, c'est-à-dire un point de l'espace projectif $\mathbb{P}(E^*)$. Nous revenons plus bas sur la "dualité" qui en résulte entre l'ensemble des hyperplans de $\mathbb{P}(E)$ et l'ensemble des points de $\mathbb{P}(E^*)$. Notons pour l'instant que si $\mathbb{P}(H) \neq \mathbb{P}(H_0)$, c'est-à-dire si $a_1, ..., a_n$ ne sont pas tous nuls, $\mathbb{P}(H)$ induit sur l'ouvert affine $\mathcal{H}_0 : X_0 \neq 0$ un hyperplan affine, donné dans les coordonnées cartésiennes $(x_1, ..., x_n)$ de $\mathcal{H}_0$ par l'équation affine $\ell(x_1, ... x_n) := a_1 x_1 + ... + a_n x_n + a_0 = 0$. On dit que que la forme affine $\ell(\frac{X_1}{X_0}, ..., \frac{X_n}{X_0}) := \frac{1}{X_0} L(X_0, ..., X_n)$ est la *déshomogénéisée par rapport à* $X_0$ de la forme linéaire $L$.

Inversement, un hyperplan $\mathcal{H}$, de direction $H$, de l'espace affine $\mathcal{E} = K^n$ admet une équation affine de la forme $\ell(x_1, ..., x_n) := a_1 x_1 + ... + a_n x_n +$

$a_0 = 0$, dont la partie linéaire, non identiquement nulle, est une équation de $H$. Son projectivisé $\mathbb{P}(\hat{H})$ est défini dans $\mathbb{P}(\hat{E})$ par l'équation homogène $L(X_0, ..., X_n) := a_0X_0 + a_1X_1 + ... + a_nX_n = 0$. On dit que $L(X_0, ..., X_n) = X_0\ell(\frac{X_1}{X_0}, ..., \frac{X_n}{X_0})$ est l'*homogénéisée* de la forme affine $\ell$.

Ces constructions s'étendent sans difficulté aux systèmes d'équations linéaires homogènes $L_1 = .. = L_k = 0$ définissant un sous-espace projectif $\mathbb{P}(W)$ de $\mathbb{P}_n(K)$ : le sous-espace affine $\mathcal{W} = \mathbb{P}(W) \cap \mathcal{H}_0$ est défini dans les coordonnées cartésiennes de $\mathcal{H}_0$ par les équations déshomogénéisées relativement à $X_0$ : $\ell_1 = ... = \ell_k = 0$. On a $codim\mathbb{P}(W) = k$ si et seulement si les formes $L_1, ..., L_k$ sont linéairement indépendantes dans $E^*$; $\mathbb{P}(W) \not\subset \mathbb{P}(H_0)$ (c-à-d. $\mathcal{W} \neq \emptyset$) si et seulement si $X_0$ n'appartient pas au sous-espace vectoriel de $E^*$ engendré par les $L_i$; et $codim\mathcal{W} = k$ si et seulement si $L_1, ..., L_k$ et $X_0$ sont linéairement indépendantes, ce qui équivaut à dire que les parties linéaires $L_i(0, X_1, ..., X_n)$ des formes affines $\ell_i, i = 1, ...k$, sont linéairement indépendantes. Ces parties linéaires, qui sont des éléments du dual $H_0^*$ de $H_0$, forment, un système d'équations homogènes de $\mathbb{P}(W) \cap \mathbb{P}(H_0)$; celui-ci n'est le sous-espace à l'infini $\mathcal{W}_\infty$ de $\mathcal{W}$ que quand $\mathcal{W} \neq \emptyset$.

**Paramétrage des sous-espaces.**

Comme en vectoriel et en affine, un autre façon de représenter les sous-espaces projectifs de $\mathbb{P}_n(K)$ consiste à les paramétrer. Soient $\mathbb{P}(W)$ un sous-espace projectif de dimension $m \leq n$, et $P_0, ..., P_m$ une famille de $m + 1$ points de $\mathbb{P}(W)$ projectivement indépendants. Alors, $\mathbb{P}(W) =< P_0, ..., P_m >$. Pour tout $i = 0, ..., n$, soit $\overrightarrow{v}_i = {}^t(c_{0i}, ..., c_{ni})$ un vecteur de $K^{n+1}$ tel que $P_i = \mathbb{P}(K\overrightarrow{v_i})$, c-à -d. tel que $(c_{0i} : ... : c_{ni})$ est un système de coordonnées projectives du point $P_i$. Par définition de l'indépendance projective, les $\overrightarrow{v_i}$ sont linéairement indépendants. Tout point $P$ de $\mathbb{P}(W)$ s'écrit alors $\mathbb{P}(K\overrightarrow{v})$, où $\overrightarrow{v} = \lambda_0\overrightarrow{v_0} + ... + \lambda_n\overrightarrow{v_n}, (\lambda_0, ..., \lambda_m) \in K^{m+1}$, est unique à homothétie près, d'où une bijection

$$\psi : \mathbb{P}_m(K) \simeq \mathbb{P}(W) : (\lambda_0 : ... : \lambda_m) \mapsto \mathbb{P}(\Sigma_{i=0,...,m}\lambda_i\overrightarrow{v_i}).$$

De plus, $\psi$ est une homographie. En effet, on a $\psi = \mathbb{P}(f)$, où $f$ désigne l'application linéaire de $K^{m+1}$ dans $W \subset K^{n+1}$ de matrice représentative $\begin{pmatrix} c_{00} & . & c_{0m} \\ \vdots & . & \vdots \\ c_{n0} & . & c_{nm} \end{pmatrix}$. La relation $rang \begin{pmatrix} c_{00} & . & c_{0m} & X_0 \\ \vdots & . & \vdots & . \\ c_{n0} & . & c_{nm} & X_n \end{pmatrix} = m + 1 \Leftrightarrow P = (X_0 : ... : X_n) \in \mathbb{P}(W)$ permet alors de retrouver un système d'équations homogènes définissant $\mathbb{P}(W)$, en considérant les mineurs d'ordre maximal $(= m+2)$ de cette deuxième matrice.

On prendra garde que la notation $\psi(\lambda_0 : ... : \lambda_m)$" = "$\lambda_0 P_0 + .... + \lambda_m P_m$ est abusive : $\psi$ dépend non seulement des points $P_i$, mais aussi des systèmes de coordonnées projectives *individuels* qu'on a choisi pour les représenter. Pour la même raison, la donnée de $n+1$ points projectivement indépendants d'un espace projectif $\mathbb{P}(E)$ de dimension $n$ ne suffit pas à l'identifier à $\mathbb{P}_n(K)$. Le $(n+2)$-ième point introduit dans la définition d'un repère projectif au §1.1 répond précisément à ce problème :

**Proposition 2.2.** *Soient $\mathbb{P}(E)$ un espace projectif de dimension $n \geq 1$, et $(P_0, ..., P_{n+1})$ un repère projectif de $\mathbb{P}(E)$. Il existe une unique homographie $\phi : \mathbb{P}(E) \simeq \mathbb{P}_n(K)$ telle que*

$$\forall i = 0, ..., n, \ \phi(P_i) = (0 : ... : 1_{(i)} : ... : 0), \text{ et } \phi(P_{n+1}) = (1 : .... : 1).$$

*Preuve* Pour tout $i = 0, ..., n$, soit $\overrightarrow{v}_i$ un générateur de la droite de $E$ associée à $P_i$. Il existe un (unique) isomorphisme $f' : E \simeq K^{n+1}$ envoyant $(\overrightarrow{v_0}, ..., \overrightarrow{v_n})$ sur la base canonique $(\overrightarrow{e_0}, ..., \overrightarrow{e_n})$ de $K^{n+1}$. Comme $(P_0, ..., P_{n+1})$ est un repère projectif, aucune des coordonnées $c_i$ de $f'(\overrightarrow{v_{n+1}}) = \Sigma_{i=0,...,n} c_i \overrightarrow{e_i}$ n'est nulle. Alors, $\phi = \mathbb{P}(f)$, où $f = diag(c_0^{-1}, ...., c_n^{-1}) \circ f'$, répond à la question. Si $\mathbb{P}(g)$ est une autres solution, l'automorphisme $g \circ f^{-1}$ de $K^{n+1}$ admet pour vecteurs propres $\overrightarrow{e_0}, ..., \overrightarrow{e_n}$ (sa matrice représentative est donc diagonale) et $\overrightarrow{e_0} + ... + \overrightarrow{e_n}$. Elle est donc scalaire, et $\mathbb{P}(g) = \mathbb{P}(f)$.

**Le birapport**

Nous identifions ici $\mathbb{P}_1(K)$ à $K \cup \infty := \hat{K}$, en décrétant que $\infty = \{X_1 = 0\}$ et que les points de $K$ sont repérés par $X_0/X_1$. Alors $\{\infty = (1 : 0) \ , \ 0 = (0 : 1) \ , 1 = (1, 1)\}$ est un repère projectif de $\mathbb{P}_1(K)$. De façon générale, trois points distincts d'une droite projective en forment un repère projectif. Pour $n = 1$, la proposition précédente valide donc l'importante :

**Definition 2.3.** *: soit $\Delta$ une droite projective, et $A, B, C$ trois points distincts de $\Delta$, de sorte qu'il existe une unique homographie $\phi : \Delta \to \hat{K}$ telle que $\phi(A) = \infty, \phi(B) = 0, \phi(C) = 1$. Pour tout point $D$ de $\Delta$, on appelle birapport des points ordonnés $A, B, C, D$ l'élément*

$$[A, B, C, D] := \phi(D) \in K \cup \infty.$$

*On dit que $(A, B, C, D)$ forme une* division harmonique *si* $[A, B, C, D] = -1$.

Calculons ce birapport quand $\Delta = \mathcal{D} \cup \infty_{\mathcal{D}}$ est la projectivisée d'une droite affine $\mathcal{D}$, identifiée à $K$ par le choix d'une coordonnée cartésienne $z$, et contenant les points $A, B, C$, repérés par leurs affixes $z_A, z_B, z_C \in K$. L'homographie $\phi : \mathbb{P}(\Delta) \simeq \mathbb{P}_1(K) \to \hat{K} \simeq \mathbb{P}_1(K)$ s'identifie alors à un élément $\mathbb{P}(g)$ de $PGL_2(K)$, représenté par une matrice $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, avec $ad - bc \neq 0$, et $\phi(X_0 : X_1) = (aX_0 + bX_1 : cX_0 + dX_1)$. En particulier, un point $z \sim (z, 1)$ de $K$ s'envoie sur le point $\phi(z) = (az + b : cz + d) \sim \frac{az+b}{cz+d}$ de $\hat{K}$, et $\phi(\infty_{\mathcal{D}}) = \frac{a}{c} \in \hat{K}$. Dans ces notations $\frac{u}{v}$, $u$ et $v$ ne sont jamais tous deux nuls, et on convient de $\frac{u}{0} = \infty$. Ainsi, $\phi(\infty_{\mathcal{D}}) = \infty$ si et seulement si $c = 0$. Les conditions $\phi(A) = \infty, \phi(B) = 0, \phi(C) = 1$ entraînent alors que $\phi(z) = \frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} \times \frac{z - z_B}{z - z_A} := \frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} : \frac{z - z_A}{z - z_B}$, d'où

$$\phi(z_D) = [A, B, C, D] = \frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} : \frac{z_D - z_A}{z_D - z_B} = \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} : \frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}}$$

si $D \neq \infty_{\mathcal{D}}$, et $\phi(\infty_{\mathcal{D}}) = \frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} = \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}}$.

En particulier, $A, B, C, \infty_{\mathcal{D}}$ sont en division harmonique si et seulement si $C$ est le milieu du segment $[AB]$ de la droite affine $\mathcal{D}$.

**Proposition 2.4.** *: soit $\theta : \Delta \to \Delta'$ une bijection entre deux droites projectives. Alors, $\theta$ est une homographie si et seulement si elle préserve les birapports.*

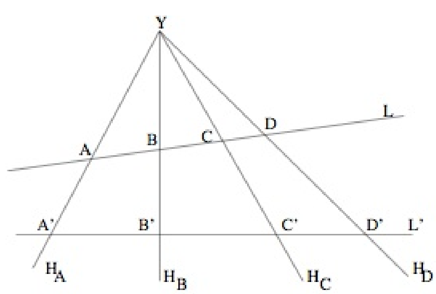
*Preuve .* $\Rightarrow$ : si $\theta$ est une homographie, et si les points distincts $A, B, C$, et un point $D$ de $\Delta$ ont pour image par $\theta$ les points, encore distincts, $A', B', C'$ et le point $D'$ de $\Delta'$, il existe une unique homographie $\phi : \Delta \to \hat{K}$ (resp. $\psi = \Delta' \to \hat{K}$ envoyant le repère projectif $(A, B, C)$ (resp. $(A', B', C')$) sur $(\infty, 0, 1)$. L'homographie $\psi \circ \phi^{-1}$ de $\hat{K}$ fixant $(\infty, 0, 1)$, c'est l'identité. Donc $\psi(D') = \phi(D)$, et $[A', B', C', D'] = \psi(D') = \phi(D) = [A, B, C, D]$.

$\Leftarrow$ : identifiant $\Delta$ et $\Delta'$ à $\mathbb{P}_1(K)$ au moyen d'homographies arbitraires, on se ramène à étudier une bijection $\theta$ de $\mathbb{P}_1(K)$ sur lui-même. D'après la proposition 2.1, il existe une homographie $\phi$ de $\mathbb{P}_1(K)$ envoyant $0, 1, \infty$ sur leurs images par la bijection $\theta$. L'hypothèse et le sens $\Rightarrow$ montrent que la bijection $\theta' = \phi^{-1} \circ \theta$, qui fixe $\infty, 0, 1$, préserve le birapport. Pour tout $z \neq 0, 1, \infty$, on a donc $\theta'(z) = [\infty, 0, 1, \theta'(z)] = [\theta'(\infty), \theta'(0), \theta'(1), \theta'(z)] = [\infty, 0, 1, z] = z$, donc $\theta'$ est l'identité, et $\theta = \phi$ est une homographie.

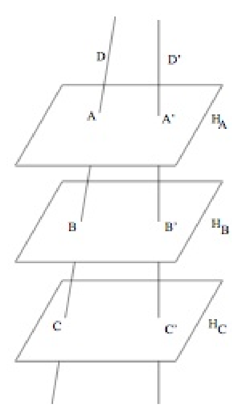
On déduit de cet énoncé les identités $[C,D,A,B] = [A,B,C,D] = [B,A,C,D]^{-1} = [A,B,D,C]^{-1} = 1 - [A,C,B,D]$. Ainsi, les 24 permutations de $\mathfrak{S}_4$ conduisent à (au plus) 6 valeurs de birapports, et on peut, dans la définition d'une division harmonique, intervertir $A$ et $B$, ainsi que $C$ et $D$ (et bien sûr, $\{A,B\}$ et $\{C,D\}$).

## 2.3 Retour à la géométrie

Soient $\mathbf{H}_1$ et $\mathbf{H}_2$ deux hyperplans distincts d'un espace projectif $\mathbb{P}(E)$, d'équations respectives $L_1 = 0, L_2 = 0$ ($L_1$ et $L_2$ sont donc des éléments linéairement indépendants du dual $E^*$ de $E$). On appelle *faisceau d'hyperplans* de $\mathbb{P}(E)$ engendré par $\mathbf{H}_1$ et $\mathbf{H}_2$ l'ensemble $\mathfrak{F}$ des hyperplans $\mathbf{H}$ de $\mathbb{P}(E)$ d'équations $L = 0$, où $L = a_1L_1 + a_2L_2, (a_1,a_2) \in K^2$, parcourt le plan de $E^*$ engendré par $L_1$ et $L_2$. Dans ces conditions, $\mathbf{H}_1 \cap \mathbf{H}_2$ est un sous-espace projectif $\mathbf{W}$ de codimension 2 dans $\mathbb{P}(E)$ défini par le système $L_1 = L_2 = 0$, et un hyperplan $\mathbf{H}$ appartient au faisceau $\mathfrak{F}$ si et seulement s'il contient $\mathbf{W}$, qu'on appelle le centre du faisceau. Par exemple, dans le plan projectif, un faisceau de droites est constitué par l'ensemble des droites projectives passant par un point donné.




Thalès projectif




Thalès affine ($\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{\overrightarrow{C'A'}}{\overrightarrow{C'B'}}$)

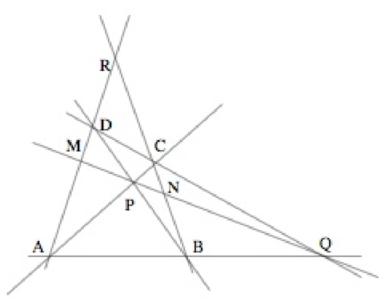
**Théoreme 2.5.** (Thalès projectif) : *soient* $\mathbf{H}_i, i = 1, ..., 4$, *quatre hyperplans d'un faisceau d'hyperplans* $\mathfrak{F}$ *de* $\mathbb{P}(E)$, *et* $\Delta, \Delta'$ *deux droites de* $\mathbb{P}(E)$. *On suppose que* $\Delta$ *(resp.* $\Delta'$*) rencontre les hyperplans en quatre points distincts* $A_i$ *(resp.* $A'_i$*),* $i = 1, .., 4$. *Alors,* $[A_1,A_2,A_3,A_4] = [A'_1,A'_2,A'_3,A'_4]$.

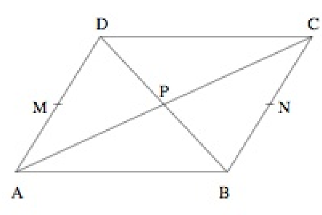
*Preuve* : soient $\mathbf{W} = \mathbb{P}(W)$ le centre du faisceau $\mathfrak{F}$, $\Delta = \mathbb{P}(\Pi), \Delta' = \mathbb{P}(\Pi')$. Comme $W \oplus \Pi' = E = W \oplus \Pi$, on peut considérer la projection centrale généralisée de centre $\mathbf{W}$ sur $\Delta'$, et sa restriction à $\Delta$. Cette perspective généralisée est une homographie $\theta$ de $\Delta$ sur $\Delta'$, qui envoie les $A_i$ sur les $A'_i$. On conclut par la proposition 2.4. Ainsi, le birapport des points d'intersection est indépendant de la sécante $\Delta$. On l'appelle le *birapport des 4 hyperplans du faisceau*, et on le note $[\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \mathbf{H}_3, \mathbf{H}_4]$.

Envoyons à l'infini l'un des hyperplans. Dans l'ouvert affine complémentaire, les hyperplans restant sont parallèles, leurs intersections avec les droites $\Delta, \Delta'$ sont des triplets de points, les 4es points devenant leurs points à l'infini. La relation $[A, B, C, \infty_{\mathcal{D}}] = \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}}$ entraîne alors la généralisation suivante du théorème de Thalès : dans les notations de la figure de droite, $\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{\overrightarrow{C'A'}}{\overrightarrow{C'B'}}$, même si $\Delta$ et $\Delta'$ ne sont pas coplanaires.

Dans le même esprit, soit $ABCD$ un quadrilatère propre quelconque d'un plan affine (c-à-d. : soit $(A, B, C, D)$ un repère projectif d'un plan projectif). Ses 4 côtés et ses 2 diagonales définissent 6 droites, d'où, (au moins en projectif) 3 nouveaux points d'intersection : $P$ (pour les diagonales), et $Q, R$ (pour les couples de côté opposés). Soient $M, N$ les points d'intersection de $(PQ)$ avec $(AD), (BC)$. Alors,

$$[M, N, P, Q] = -1 \qquad \text{car} \qquad \frac{\overrightarrow{PM}}{\overrightarrow{PN}} = -1$$




**Théoreme 2.6.** (du quadrilatère) *: $M, N, P, Q$ sont en division harmonique.*

*Preuve* : envoyons la droite $(QR)$ à l'infini. Le quadrilatère devient un parallélogramme, donc $P$ est le milieu du segment $[MN]$, tandis que $Q = \infty_{(MN)}$. Ainsi $[M, N, P, \infty_{(MN)}] = -1$. Mais le birapport ne dépend que des points sur la droite, pas du choix d'un point à l'infini, donc $[M, N, P, Q] = -1$.

*Remarque* : considérons le faisceau $\mathfrak{F}$ engendré par les droites $(RA)$ et $(RB)$, et soit $Q$ un point du plan projectif hors de ces droites. Il existe une unique droite $\Delta_Q$ de $\mathfrak{F}$ telle que $((RA), (RB), \Delta_Q, (RQ)) = -1$. On dit que $\Delta_Q$ est la *polaire* de $Q$ par rapport aux droites $(RA)$ et $(RB)$. La figure de gauche en fournit une construction : tracer deux sécantes depuis $Q$, donnant les points $B, A; C, D$, et poser $P = (AC) \cap (BD)$. Alors, $\Delta_Q = (RP)$.

**La dualité projective**

Soient $E$ un espace vectoriel de dimension $\geq 2$, et $E^* = \mathcal{L}(E, K)$ son dual. Comme on l'a vu au §2.2, Équations, la loi qui, à un hyperplan $\mathbf{H} = \mathbb{P}(H)$ de l'espace projectif $\mathbb{P}(E)$, attache l'ensemble $\mathbf{h} = \{\lambda.L, \lambda \in K^*\}$ des formes linéaire non nulles qui s'annulent sur $\mathbb{P}(H)$, s'interprète comme une bijection

$$\delta_1 : Hyp(E) \to \mathbb{P}(E^*) : \mathbf{H} \leftrightarrow \mathbf{h}$$

de l'ensemble $Hyp(E)$ des hyperplans de $\mathbb{P}(E)$ (ou de $E$, cela revient au même) vers l'ensemble des points de $\mathbb{P}(E^*)$. Dans cette transformation, les hyperplans du faisceau $\mathfrak{F}$ engendré par deux hyperplans $\mathbf{H}_1 \neq \mathbf{H}_2$, d'équations $L_1 = 0, L_2 = 0$, admettent pour équations les combinaisons linéaires de $L_1$ et de $L_2$, et correspondent donc aux points de la droite $\mathfrak{f}$ engendrée par $\mathbf{h}_1$ et $\mathbf{h}_2$ dans $\mathbb{P}(E^*)$. Autrement dit, si $\mathbf{W} = \mathbf{H}_1 \cap \mathbf{H}_2$ désigne le centre du faisceau $\mathfrak{F}$, $\delta_1$ induit une bijection

$$\{\mathbf{H} \in Hyp(\mathbb{P}(E)), \mathbf{H} \supset \mathbf{H}_1 \cap \mathbf{H}_2\} \leftrightarrow \{\mathbf{h} \in \mathbb{P}(E^*), \mathbf{h} \in (\mathbf{h}_1\mathbf{h}_2))\} \qquad (*)$$

entre l'ensemble des hyperplans passsant par $\mathbf{H}_1 \cap \mathbf{H}_2$ et la droite $\mathfrak{f} =< \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 >$ de $\mathbb{P}(E^*)$. Par exemple, quand $\mathbb{P}(E)$ est un plan, la bijection $\delta_1$ fait passer des droites de $\mathbb{P}(E)$ aux point de $\mathbb{P}(E^*)$, et une famille de droites concourantes devient une famille de points alignés. On exprime $(*)$ en disant que $\delta_1$ *préserve les relations d'incidence.*

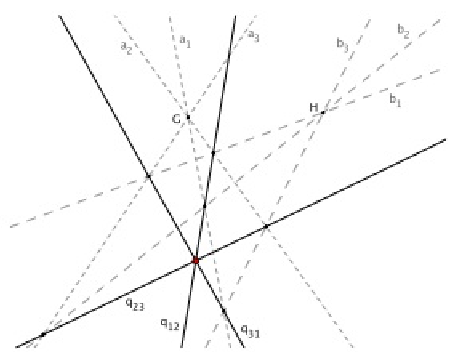
Plus généralement, soit $m \in [1, n]$ un entier. La loi qui, à un sous-espace projectif $\mathbf{W} = \mathbb{P}(W)$ de $\mathbb{P}(E)$ de codimension $m$, attache l'ensemble $\mathbf{w} = \mathbb{P}(\{L \in E^*, W \subset KerL\})$ des classes dans $\mathbb{P}(E^*)$ de formes linéaire non nulles s'annulant sur $\mathbb{P}(H)$, s'interprète comme une bijection

$$\delta_m : H^m(\mathbb{P}(E)) \to H_{m-1}(\mathbb{P}(E^*)) : \mathbf{W} \leftrightarrow \mathbf{w}$$

de l'ensemble $H^m(\mathbb{P}(E)$ des sous-espaces projectifs de codimension $m$ de $\mathbb{P}(E)$ vers l'ensemble $H_{m-1}(\mathbb{P}(E^*))$ des sous-espaces projectifs de dimension $m-1$ de $\mathbb{P}(E^*)$. La collection $\delta$ des applications $\delta_m, m = 1, ..., n$, s'appelle la *dualité projective*. Elle renverse les inclusions ($\mathbf{W} \supset \mathbf{W}' \Rightarrow \mathbf{w} \subset \mathbf{w}'$), et préserve donc les relations d'incidence. Par exemple, quand $\mathbb{P}(E)$ est un plan, $\delta_2$ envoie des points alignés de $\mathbb{P}(E)$ sur des droites concourantes de $\mathbb{P}(E^*)$. On voit d'ailleurs, en identifiant $E$ à son bidual $E^{**}$, que $\delta_{m,E\to E^*}$ admet $\delta_{n-m+1,E^*\to E^{**}}$ pour application réciproque.

Puisque la dualité projective préserve les relations d'incidence, tout théorème $Th$ dont les hypothèses et les conclusions sont des relations d'incidence dans $\mathbb{P}(E)$ fournira par dualité un théorème d'incidence $Th^*$ dans $\mathbb{P}(E^*)$, et donc dans $\mathbb{P}(E)$ puisque $E^*$ et $E$ sont (non canoniquement) isomorphes. On n'a pas toujours de la chance (voir (i) ci-dessous), mais l'énoncé auquel on aboutit ainsi est en général nouveau !

**Exercice** : justifier, puis traduire, le texte suivant (cours de U. Stuhler, Göttingen).




Der

Brianchonsche

Satz

i) Der Satz von Desargues ist selbstdual.

ii) Die Dualisierung des Satzes von Pappos führt uns in $\mathbb{P}_2(K)$ auf den

**Satz von Brianchon** : *Für jede Auswahl von paarweise verschiedenen Geraden* $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ *gilt : verlaufen* $a_1, a_2, a_3$ *durch einen gemeinsamen Punkt* $G$ *und* $b_1, b_2, b_3$ *durch einen gemeinsamen Punkt* $H$*, wobei* $a_i = (GH) = b_i, i = 1, 2, 3)$*, so verlaufen die Gerade* $q_{12} = <(a_1 \cap b_2), (b_1 \cap a_2)>$ *(d.h. die projektive Gerade durch die Punkte* $a_1 \cap b_2$ *und* $b_1 \cap a_2$*),* $q_{23} = <(a_2 \cap b_3), (b_2 \cap a_3)>$*,* $q_{31} = <(a_3 \cap b_1), (b_3 \cap a_1)>$ *durch einen gemeinsamen Punkt.*

### La notion de tangence

Les procédés de (dés)homogénéisation vus au §2.2 s'étendent aux "variétés algébriques" de degré quelconque. Ainsi, un polynôme homogène $F(X_0, ..., X_n)$ de degré $d \geq 1$ vérifie l'identité $F(\lambda X_0, ...., \lambda X_n) \equiv \lambda^d F(X_0, ..., X_n)$, de sorte que l'hypersurface projective

$$Z(F) := \{P = (X_0 : ... : X_n) \in \mathbb{P}_n, F(X_0, ..., X_n) = 0\}$$

formée par les zéros[3] de $F$ dans $\mathbb{P}_n$ est bien définie (comme dans le cas linéaire, on ne peut pas parler de la valeur de $F$ en $P$, mais l'expression $F(P) = 0$ a un sens). Supposons que $F \neq a_0 X_0^d$. Alors, $Z(F)$ induit sur l'ouvert affine $\mathcal{H}_0 \simeq K^n$ une hypersurface affine $\mathcal{Z}(f)$ d'équation $f(x_1, ..., x_n) = 0$, où $f$ est le polynôme (en général non homogène) non constant de degré total $\delta \leq d$ en $n$ variables défini par $f(\frac{X_1}{X_0}, ..., \frac{X_n}{X_0}) := \frac{1}{X_0^d} F(X_0, ..., X_n)$. Le complémentaire de $\mathcal{Z}(f)$ dans $Z(F)$ est formé par les points d'intersection de $Z(F)$ avec l'hyperplan à l'infini $\mathbb{P}(H_0) \simeq \mathbb{P}_{n-1}(K)$ : ce sont les zéros du polynôme en $n$ variables $\Phi(X_1, ..., X_n) := F(0, X_1, ..., X_n)$, qui est non nul (et homogène de degré $d$) si $Z(F) \not\supset \mathbb{P}(H_0)$, c-à-d. si $X_0$ ne divise pas $F$ dans l'anneau $K[X_0, ..., X_n]$.

Inversement, soit $f(x_1, ..., x_n)$ un polynôme de degré total $\delta \geq 1$ en $n$ variables. Son lieu des zéros $\mathcal{Z}(f)$ dans l'espace affine $\mathcal{E} = K^n$ est une hypersurface affine. On appelle projectivisée de $\mathcal{Z}(f)$ l'hypersurface $\hat{\mathbb{P}}(\mathcal{Z}(f)) := Z(F)$ de $\mathbb{P}(\hat{E}) = \mathbb{P}_n(K)$ définie par le polynôme homogène $F(X_0, ..., X_n) = X_0^\delta f(\frac{X_1}{X_0}), .., \frac{X_n}{X_0})$, de degré $\delta$ en $n+1$ variables (et jamais divisible par $X_0$). On obtient $Z(F)$ en adjoignant à $\mathcal{Z}(f)$ ses "points à l'infini", définis comme supra par l'annulation du polynôme $\Phi$, soit : $Z(F) = \mathcal{Z}(f) \cup Z(\Phi)$.

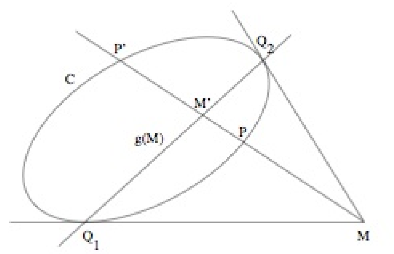
Les hypersurfaces de degré 2 s'appellent des quadriques (des coniques si $n = 2$). Elles font l'objet du chapitre III, §2. Pour $K = \mathbb{R}$ et $n = 2$, les polynômes homogènes $F$ de degré 2 de $\mathbb{R}[X_0, X_1, X_2]$ sont

[3] Cette expression cache une subtilité importante. Nous considérons les zéros de $F$ (c-à-d. les points d'annulation de $F$) non seulement dans $\mathbb{P}_n(K)$, mais aussi dans $\mathbb{P}_n(K')$ pour tout corps commutatif $K'$ contenant $K$, et nous tenons compte de leurs multiplicités. Ainsi pour $K = \mathbb{R}$, les polynômes $F_1(X_0, X_1, X_2) = X_0^2 + X_1^2 + X_2^2$ et $F_2(X_0, X_1, X_2) = X_0^2 + X_1^2 + 2X_2^2$ ne définissent pas les mêmes hypersurfaces : bien que dans $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, $Z(F_1) = Z(F_2)$ soient tous deux l'ensemble vide, $Z(F_1) \neq Z(F_2)$ dans $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. De même, $F_1(X_0, X_1 X_2) = X_1$ et $F_2(X_0, X_1 X_2) = X_1^2$, bien qu'ayant le même lieu de zéros dans $\mathbb{P}_2(K)$ (l'hyperplan $H_1$), définissent des hypersurfaces $Z(F_1), Z(F_2)$ distinctes : les zéros de $F_2$ sont doubles, et on dit que $Z(F_2)$ est l'hyperplan $H_1$, compté deux fois. On peut aussi les distinguer en considérant les zéros de $F_1$ et $F_2$ à coordonnées dans la $K$-algèbre $\tilde{K} = K[t]/(t^2)$.

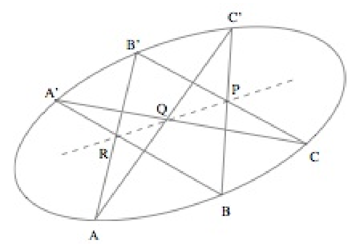
- ou bien irréductibles dans l'anneau $\mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$;

- ou bien produit de deux formes linéaires (éventuellement complexes).

Dans ce deuxième cas, $Z(F)$ est la réunion de deux droites (éventuellement confondues, ou complexes), et on dit que la conique $Z(F)$ est dégénérée. On verra au chapitre III les propriétés suivantes :




$[P, P', M, M'] = -1$




$P, Q, R$ sont alignés
(Théorème de Pascal)

Quand $Z(F) = \Delta \cup \Delta'$ est une conique dégénérée, la figure de droite redonne le théorème de Pappus. Nous donnons maintenant une définition formelle des "tangentes" qui interviennent dans la figure de gauche.

Soit $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(f)$ une hypersurface affine de l'espace affine $K^n$. Le théorème des fonctions implicites conduit à dire qu'un point $P = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$ de $\mathcal{Z}(f)$ est *lisse* si l'une au moins des dérivées partielles de $f$ en $P$ est non nulle : $\exists i \in [1, ..., n], f'_{x_i}(P) := \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma_1, ..., \gamma_n) \neq 0$. L'équation

$$\Sigma_{i=1,\dots,n} f'_{x_i}(P)(x_i - \gamma_i) = 0$$

définit alors un hyperplan affine $T_P(\mathcal{Z})$, qu'on appelle *l'hyperplan tangent à* $\mathcal{Z}$ *en* $P$.

Soit maintenant $Z := Z(F) \subset \mathbb{P}_n(K)$ une hypersurface projective de degré $d$. Pour tout $j = 0, ..., n$, son intersection avec l'ouvert affine $\mathcal{H}_j : X_j \neq 0$, si elle est non vide, est l'hypersurface affine $\mathcal{Z}(f^{[j]})$, où $f^{[j]}(\frac{X_0}{X_j}, ..., \frac{X_n}{X_j}) := \frac{1}{X_j^d} F(X_0, ..., X_n)$ est le polynôme en $n$ variables déshomogénéisé de $F$ par rapport à $X_j$. Les dérivées partielles $F'_{X_i} = \frac{\partial F}{\partial X_i}, i = 0, ..., n$, de $F$, sont des polynômes homogènes de degré $d - 1$, et on vérifie, en considérant chacun des monômes de $F$, que pour tout $i \neq j$,

$$f_{x_i}^{[j]\prime}(\frac{X_0}{X_j}, ..., \frac{X_n}{X_j}) = \frac{1}{X_j^{d-1}} F'_{X_i}(X_0, ..., X_n).$$

En prenant par exemple $j = 0$, et en posant $f = f^{[0]}, \mathcal{Z} = \mathcal{Z}(f^{[0]})$, on a :

**Proposition 2.7.** *Soient $Z = Z(F)$ une hypersurface de $\mathbb{P}_n(K)$, et $P = (c_0 : ... : c_n)$ un point de l'hypersurface affine $\mathcal{Z} = Z \cap \mathcal{H}_0$. Alors,*

*i) $P$ est lisse sur $\mathcal{Z}$ si et seulement si $F'_{X_i}(P) \neq 0$ pour un au moins des indices $i = 0, ..., n$;*

*ii) dans ce cas, le projectivisé $\hat{\mathbb{P}}(T_P(\mathcal{Z}))$ de l'hyperplan tangent à $\mathcal{Z}$ en $P$ admet pour équation homogène :*

$$\sum_{i=0,...,n} F'_{X_i}(c_0, ..., c_n)\ X_i = 0$$

*Preuve* : soit $d$ le degré du polynôme homogène $F$. Pour donner sens à cet énoncé, on doit d'abord noter que $Z \cap \mathcal{H}_0$ étant par hypothèse non vide, c'est bien une hypersurface, donnée par $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(f^{[0]})$, puis, pour (i), que comme les dérivées partielles $F'_{X_i}$ sont des polynômes homogènes, les expressions $F'_{X_i}(P) \neq 0$ sont licites, et enfin, pour (ii), que comme elles sont toutes de degré $d-1$, le $(n+1)$-uplet $(F'_{X_i}(c_0, ..., c_n) = \frac{1}{\lambda^{d-1}} F'_{X_i}(\lambda c_0, ..., \lambda c_n), i = 0, ..., n)$ définit un hyperplan indépendant du choix des coordonnées homogènes de $P$. Rappelons par ailleurs la *relation d'Euler* : pour tout polynôme homogène $F$ de degré $d$,

$$\sum_{i=0,...,n} F'_{X_i}(X_0, ..., X_n).X_i = d\ F(X_0, ..., X_n),$$

qui montre déjà que cet hyperplan passe bien par le point $P \in Z(F)$.

i) Puisque $P \in \mathcal{H}_0$ on peut le repérer par les coordonnées $(1 : \gamma_1, ..., \gamma_n)$, où $\gamma_i = \frac{c_i}{c_0}$. Alors, $P$ est lisse sur $\mathcal{Z}$ si et slt s'il existe $i \in [1, ..., n]$ tel que $0 \neq f'_{x_i}(\gamma_1, ..., \gamma_n)$. Mais cette expression vaut $\frac{1}{c_0^{d-1}} F'_{X_i}(c_0, ..., c_n)$. Il reste à noter que si $F'_{X_i}(P) = 0$ pour tout $i = 1, .., n$, la relation d'Euler et l'hypothèse $c_0 \neq 0$ entraîne qu'on a aussi $F'_{X_0}(P) = 0$.

ii) L'équation du projectivisé du plan tangent à $\mathcal{Z}$ en $P$, d'équation affine $\Sigma_{i=1,...,n} f'_{x_i}(\gamma_1, ..., \gamma_n)(x_i - \gamma_i) = 0$, en est l'homogénéisée. Après multiplication par $c_0^{d-1}$, elle s'écrit : $\Sigma_{i=1,...,n} F'_{X_i}(c_0, ..., c_n)(X_i - \frac{c_i}{c_0} X_0) = 0$. D'après Euler, $\Sigma_{i=1,...,n} F'_{X_i}(c_0, ..., c_n) c_i = -F'_{X_0}(c_0, ..., n) c_0$, d'où l'équation recherchée.

Soit enfin $P = (c_0 : ... : c_n)$ un point quelconque de $Z(F)$. Il appartient à un au moins des ouverts affines $\mathcal{H}_j, j = 0, ..., n$, puisque ceux-ci recouvrent $\mathbb{P}_n(K)$. Si $j_1$ et $j_2$ sont deux tels indices, c-à-d. si $P$ appartient à $\mathcal{Z}(f^{[j_1]})$ et à $\mathcal{Z}(f^{[j_2]})$, la proposition précédente, montre que :

i) $P$ est lisse sur $\mathcal{Z}(f^{[j_1]})$ si et seulement s'il est lisse sur $\mathcal{Z}(f^{[j_2]})$ : cela équivaut à la condition

$$\exists i \in [0, ..., n], F'_{X_i}(P) \neq 0;$$

ii) alors, les hyperplans tangents à $\mathcal{Z}(f^{[j_1]})$ et à $\mathcal{Z}(f^{[j_2]})$ en $P$ sont les intersections avec $\mathcal{H}_{j_1}$ et $\mathcal{H}_{j_2}$ du même hyperplan de $\mathbb{P}_n(K)$

$$T_P(Z) : \sum_{i=0,...,n} F'_{X_i}(c_0, ..., c_n)\ X_i = 0.$$

Dans ces conditions, on dit que $P$ est *lisse* sur l'hypersurface projective $Z = Z(F)$ s'il vérifie la condition (i), et on appelle *hyperplan tangent à $Z$ en $P$* l'hyperplan projectif $T_P(Z)$ défini par (ii).

*Exemple* : soit $F = a_0X_0^2 + a_1X_1^2 + a_2X_2^2 \in \mathbb{R}[X_0, X_1, X_2]$. Si $Z(F)$ est une conique non dégénérée ($\Leftrightarrow a_0a_1a_2 \neq 0$), tous les points $P$ de $Z(F)$ sont lisses, et pour tout $M \notin Z(F)$, le faisceau de droites de centre $M$ contient exactement deux tangentes à $Z(F)$ (éventuellement complexes).