Université de Paris VI
D. Bertrand

Master M1 2009-2010
*Algèbre géométrique*

**CHAPITRE IV**

**GÉOMÉTRIE MULTILINÉAIRE**

# 1 Produits tensoriels.

Dans ce paragraphe, on considère des espaces vectoriels, de dimension éventuellement infinie, sur un corps (commutatif) $K$ quelconque. En première lecture, on pourra les supposer tous de dimension finie.

## 1.1 Définition

Soient $V$ et $W$ deux espaces vectoriels. On cherche à construire un espace vectoriel $V \otimes W$ tel que la donnée d'une forme bilinéaire $b$ sur $V \times W$ équivale à celle d'une forme *linéaire* $f_b$ sur $V \otimes W$. Plus généralement, on étudie le "problème universel" suivant.

*Existe-t-il un couple $(E, \beta)$ formé d'un espace vectoriel $E$ et d'une application bilinéaire $\beta : V \times W \to E$ vérifiant la propriété suivante : pour toute application bilinéaire $b$ de $V \times W$ vers un espace vectoriel $U$ quelconque, il existe une* **unique application linéaire** $f = f_b : E \to U$ *telle que*

$$\text{pour tout } (v, w) \in V \times W, \; b(v, w) = f_b\big(\beta(v, w)\big) \, ,$$

*autrement dit, telle que $b = f_b \circ \beta$.*

Du fait de la condition d'unicité, deux solutions $(E, \beta), (E', \beta')$ de ce problème sont liées par un isomorphisme $K$-linéaire $\phi : E \to E'$ tel que $\phi \circ \beta = \beta'$. S'il y a une solution, elle est donc unique à isomorphisme près. On va montrer qu'il existe une solution. On la désignera (à isomorphisme près) par $(E = V \otimes W, \beta)$. Pour tout $(v, w) \in V \times W$, on écrira

$$\beta(v, w) := v \otimes w \in V \otimes W,$$

de sorte que la bilinéarité de $\beta$ se traduit par les relations:

$$\forall v, v' \in V, w, w' \in W, \lambda \in K \ , \ (\lambda v) \otimes w = v \otimes (\lambda w) = \lambda(v \otimes w);$$
$$v \otimes (w + w') = v \otimes w + v \otimes w' \ , \ (v + v') \otimes w = v \otimes w + v' \otimes w.$$

Lorsqu'on veut préciser le corps des scalaires $K$, on écrit $V \otimes_K W$. On dit que $V \otimes_K W$ est "le" produit tensoriel de $V$ par $W$ sur $K$. Ses éléments s'appellent des tenseurs, ceux de la forme $v \otimes w$ des tenseurs purs (ou décomposés). Attention: une somme $v \otimes w + v' \otimes w' \in V \otimes W$ n'est en général pas un tenseur pur !

*Existence du produit tensoriel.*

Première preuve : soit $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel formé par toutes les applications ensemblistes de $V \times W$ dans $K$ nulles en dehors d'un sous-ensemble fini de $V \times W$. Il admet pour base $\{\delta_{(v,w)}, (v, w) \in V \times W\}$ où $\delta_x$ désigne la fonction de Dirac relative au point $x \in V \times W$. Considérons le sous-espace vectoriel $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ engendré par les éléments $\delta_{(v,w+w')} - \delta_{(v,w)} - \delta_{(v,w')}, \delta_{(v+v',w)} - \delta_{(v,w)} - \delta_{(v',w)}, \delta_{(\lambda v,w)} - \lambda\delta_{(v,w)}, \delta_{(v,\lambda w)} - \lambda\delta_{(v,w)}$, ainsi que l'espace vectoriel quotient $E = \mathcal{E}/\mathcal{F}$. Alors, $\beta : V \times W \to E : \beta(v, w) :=$ classe de $\delta_{(v,w)}$ dans $E$, est une application bilinéaire de $V \times W$ dans $E$, dont l'image ensembliste $\beta(V \times W)$ engendre l'espace vectoriel $E$. Pour toute application $b : V \times W \to U$, l'application $\tilde{f}_b : \mathcal{E} \to U$ qui attache à un élément $\Sigma_{(v,w)\in A\subset V\times W, A \text{ fini}}\, \lambda_{(v,w)}\delta_{(v,w)}$ de $\mathcal{E}$ l'élément $\Sigma_{(v,w)\in A}\lambda_{(v,w)}b(v, w)$ de $U$ est bien définie (car les $\delta_{(v,w)}$ forment une base de $\mathcal{E}$), et est linéaire. Si $b$ est de plus bilinéaire, $\tilde{f}_b$ s'annule sur $\mathcal{F}$, et définit donc par passage au quotient par $\mathcal{F}$ une application linéaire $f_b : E \to U$, qui vérifie bien $f_b \circ \beta = b$. Enfin, $f_b$ est la seule application linéaire de $E$ dans $U$ vérifiant cette propriété, puisque l'image de $\beta$ engendre $E$ tout entier.

Deuxième preuve: soient $\{e_i; i \in I\}, \{\epsilon_j; j \in J\}$ des bases de $V, W$. À tout $(i, j) \in I \times J$, attachons un symbole $\vec{m}_{i,j}$ et considérons l'espace vectoriel $E := \oplus_{(i,j)\in I\times J} K.\vec{m}_{i,j}$, de base $\{\vec{m}_{i,j}, (i, j) \in I \times J\}$. Il existe alors une (unique) application bilinéaire $\beta : V \times W \to E$ telle que $\beta(e_i, \epsilon_j) = \vec{m}_{i,j}$ pour tout $(i, j) \in I \times J$. Soit maintenant $b : V \times W \to U$ une application bilinéaire. Puisque les $\vec{m}_{i,j}$ forment une base de $E$, il existe une unique application linéaire $f_b : E \to U$ telle que $f(\vec{m}_{i,j}) = b(e_i, \epsilon_j)$ pour tout $(i, j) \in I \times J$. De la bilinéarité de $b$ et de $\beta$, et de la linéarité de $f_b$, on déduit alors que pour tout $v = \Sigma_{i\in A \text{ fini } \subset I}\lambda_i e_i \in V \ , \ w = \Sigma_{j\in B \text{ fini } \subset J}\mu_j\epsilon_j \in W$, on a: $b(v, w) = \Sigma_{(i,j)\in A\times B}\lambda_i\mu_j b(e_i, \epsilon_j) = f_b(\Sigma_{(i,j)\in A\times B}\lambda_i\mu_j\vec{m}_{i,j}) = f_b(\beta(v, w))$. Ainsi, l'application linéaire $f_b$ vérifie la propriété requise, et c'est la seule puisque que l'image de $\beta$ contient la base $\vec{m}_{i,j}$ de $E$. On voit ainsi de plus que

**Théoreme 1.1.** *: si $V$, $W$ sont des espaces vectoriels de dimension finies $n, m$, de bases $\{e_i, 1 \leq i \leq n\}, \{\epsilon_j, 1 \leq j \leq m\}$, alors $V \otimes W$ est un espace vectoriel de dimension $nm$, de base $\{e_i \otimes \epsilon_j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$.*

**Remarques**:

i) pour $V = K$, l'application bilinéaire $K \times W \to W : (\lambda, w) \mapsto \lambda w$ établit un isomorphisme canonique $K \otimes W \simeq W$.

ii) Inversion: L'application bilinéaire $V \times W \to W \otimes V : (v, w) \to w \otimes v$ établit un isomorphisme canonique $V \otimes W \simeq W \otimes V$. Mais attention quand $V = W$: dans $V \otimes V$, $v \otimes v'$ n'est égal à $v' \otimes v$ que si $v$ et $v'$ sont colinéaires.

iii) *Complexification* : soit $V$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension $n$. Comme $\mathbb{C}$ est un ev de dimension 2 sur $\mathbb{R}$, on peut former $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V := V_{\mathbb{C}}$, qui est un $\mathbb{R}$- ev de dimension $2n$. De plus, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, l'application $\mathbb{C} \times V \to V_{\mathbb{C}} : (\mu, v) \mapsto \lambda\mu \otimes v$ est $\mathbb{R}$-bilinéaire, donc induit un endomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire $m_\lambda$ de $V_{\mathbb{C}}$. On vérifie que $m_\lambda + m_{\lambda'} = m_{\lambda+\lambda'}, m_\lambda \circ m_{\lambda'} = m_{\lambda\lambda'}, m_1 = id_{V_{\mathbb{C}}}$, de sorte que la loi $\mathbb{C} \times V_{\mathbb{C}} \ni (\lambda, \mathbf{v}) \mapsto \lambda.\mathbf{v} := m_\lambda(\mathbf{v}) \in V_{\mathbb{C}}$ munit $V_{\mathbb{C}}$ d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, de dimension $n$ sur $\mathbb{C}$. Un tel $\mathbb{C}$-ev est naturellement muni d'un involution $\mathbb{C}$-antilinéaire $\sigma = c : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$, appelée conjugaison complexe, et définie à partir des relations $c(\lambda \otimes v) = \overline{\lambda} \otimes v$. On récupère la structure réelle en notant que $\{v \in V_{\mathbb{C}}, c(v) = v\}$ coïncide avec $1 \otimes V$, qu'on identifie à $V$. Ceci montre d'ailleurs qu'il n'y a pas de conjugaison complexe naturelle sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel général (les essais "évidents" dépendent du choix d'une base).

iv) *$K$-algèbres* : ce sont les $K$-espaces vectoriels $A$ munis d'une application linéaire $\mu : A \otimes A \to A$. Traduire ce que cela signifie en terme de la loi de composition interne $(a, b) \mapsto a.b := \mu(a \otimes b)$. Pour l'associativité, qui n'est pas requise dans la définition d'une $K$-algèbre (penser aux algèbres de Lie), voir le §2.1 ci-dessous.

v) Soient $V_1 \subset V, W_1 \subset W$ deux sous-espaces vectoriels. Alors, l'application $V_1 \times W_1 \ni (v_1, w_1) \mapsto v_1 \otimes w_1 \in V \otimes W$ fournit une application linéaire injective $\iota : V_1 \otimes W_1 \to V \otimes W$, qui permet d'identifier $V_1 \otimes W_1$ à un sous-espace vectoriel de $V \otimes W$.

vi) (Hors programme) Attention toutefois : si une bonne partie des énoncés de ce chapitre s'étend sans difficulté au cas des modules sur un anneau commutatif, ce n'est pas le cas pour l'injectivité de $\iota$ au (v) précédent.

Ainsi, le $\mathbb{Z}$-module $V = \mathbb{Z}$ admet $V_1 = 2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}$ comme sous-module, et en considérant le $\mathbb{Z}$-module $W = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on a $V_1 \otimes_{\mathbb{Z}} W \simeq \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} W \simeq W$, tandis que le produit tensoriel *dans* $V \otimes_{\mathbb{Z}} W$ d'un élément $2n \in V_1$ par $\overline{1} \in W$ vaut $(2n) \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{1} = 2(n \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{1}) = n \otimes_{\mathbb{Z}} 2.\overline{1} = n \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{0} = 0$. L'application $\iota : V_1 \otimes_{\mathbb{Z}} W \to V \otimes_{\mathbb{Z}} W$ est donc ici identiquement nulle.

## 1.2 Propriétés fonctorielles

**Théoreme 1.2.** *Soient $g : V \to V', h : W \to W'$ deux applications linéaires. Alors, il existe une unique application linéaire, notée*

$$g \otimes h : V \otimes W \to V' \otimes W'$$

*telle que pour tout $(v, w) \in V \times W$, on ait $(g \otimes h)(v \otimes w) = g(v) \otimes h(w)$.*

*Preuve* : l'application $b : V \times W \to V' \otimes W' : (v, w) \mapsto g(v) \otimes h(w)$ est bilinéaire. L'application linéaire correspondante $f_b$ est donc la seule vérifiant ces conditions, et on la note $f_b := g \otimes h$.

Mais cette notation impose de vérifier une compatibilité. Les applications $g, h$ appartiennent aux espaces vectoriels $\mathcal{L}(V, V'), \mathcal{L}(W, W')$, et la notation $g \otimes h$ représente déjà un élément de leur produit tensoriel. Heureusement, l'application $\mathcal{L}(V, V') \times \mathcal{L}(W, W') \to \mathcal{L}(V \otimes W, V' \otimes W') : (g, h) \mapsto f_b$ fournit une application linéaire canonique

$$\kappa : \mathcal{L}(V, V') \otimes \mathcal{L}(W, W') \to \mathcal{L}(V \otimes W, V' \otimes W'),$$

envoyant bien $g \otimes h$ (au sens du membre de gauche) sur $f_b$. Elle est injective, mais pas surjective en général (voir le théorème 2).

*Transcription matricielle* : supposons $V' = V, W' = W$ de dimensions finies $n, m$, et soient $A, B$ les matrices représentatives $(n \times n), (m \times m)$ de $g, h$ dans des bases $e_i, \epsilon_j$ de $V, W$. Alors, la matrice représentative de l'endomorphisme $g \otimes h$ de $V \otimes W$ dans la base $e_i \otimes \epsilon_j$ est donnée par le *produit de Kronecker* $A \otimes B$ de $A$ par $B$ : c'est la matrice $(nm \times nm)$ obtenue en remplacant chaque coefficient $a_{i,i'}$ de $A$ par le bloc $a_{i,i'}B$.

Pour tout espace vectoriel $V$, notons $V^* := \mathcal{L}(V, K)$ le dual de $V$. Si $V$ est de dimension finie, et muni d'une base $\{e_1, ..., e_n\}$, on notera $\{e_1^*, ..., e_n^*\}$ la base duale de $V^*$, définie par $e_j^*(e_i) = \delta_{i,j}, 1 \leq i, j \leq n$. On rappelle que le rang d'une application lineaire est la dimension de son image.

**Théoreme 1.3.** *: soient $V, W$ deux espaces vectoriels.*

*i) Il existe une unique injection linéaire*

$$\phi : V^* \otimes W \hookrightarrow \mathcal{L}(V, W),$$

*telle que pour tout $\ell \in V^*, w \in W, v \in V$, on ait $\big(\phi(\ell \otimes w)\big)(v) = \ell(v)w$.*

*ii) L'image de $\phi$ est formée des applications linéaires de $V$ dans $W$ de rang fini. En particulier, si $V$ ou $W$ est de dimension finie, $\phi$ est un isomorphisme.*

*iii) Si $W = V$ est de dimension finie, et si $u \in End(V)$ est l'image par $\phi$ de $\Sigma_\alpha \ell_\alpha \otimes v_\alpha$, alors sa trace vaut $Tr(u) = \Sigma_\alpha \ell_\alpha(v_\alpha)$. Dans les bases décrites plus haut, l'application identité $u = id_V$ de $V$ est l'image par $\phi$ de $\Sigma_{i=1,...n} e_i^* \otimes e_i$.*

*Preuve* : i) pour définir $\phi$ (qui est un cas particulier de l'application $\kappa$ supra), considérer l'application bilinéaire $V^* \times W \to \mathcal{L}(V, W) : (\ell, w) \mapsto \{v \mapsto \ell(v)w\}$. Pour l'injectivité, choisissons des bases $\{\ell_i, i \in I\}, \{\epsilon_j, j \in J\}$ de $V^*, W$. Alors, les $\{\ell_i \otimes \epsilon_j, (i, j)\}$ forment une base de $V^* \otimes W$, et il suffit de montrer que leurs images par $\phi$ sont des applications de $V$ dans $W$ linéairement indépendantes. Dans le cas contraire, celles-ci enverraient tout vecteur $v$ de $E$ sur des vecteurs $\ell_i(v)\epsilon_j$ de $W$ liés. Les $\epsilon_j$ étant linéairement indépendants, on aurait donc $\ell_i(v) = 0$ pour tout $i \in I, v \in V$, et les $\ell_i$ seraient toutes nulles.

ii) Comme $V^* \otimes W$ est formé de combinaisons linéaires *finies* des $\ell_i \otimes \epsilon_j$, leurs images par $\phi$ sont bien de rang fini. Inversément, soit $u : V \to W$, d'image $W'$ de dimension finie, et soit $\{\epsilon_1, .., \epsilon_m\}$ une base de $W'$. Le lecteur concluera en la complétant en une base $\{\epsilon_j, j \in J\}$ de $W$. Enfin, si $V$ ou $W$ est de dimension finie, tout $u$ est de rang fini.

iii) En complétant un élément non nul $\ell$, resp. $w$, de $V^*$, resp. $W$ en une base de $V^*, W$, et en considérant la base duale correspondante dans $V$, on voit que $\phi(\ell \otimes w)$ est représentée par une matrice $U$ dont le seul coefficient non nul est $U_{1,1} = \ell(w)$. Sa trace vaut donc $\ell(w)$, et la linéarité de $\phi$ et de $Tr$ permet de conclure. Voici une façon plus intrinsèque de présenter les choses : la forme bilinéaire $V^* \times V \to K : (\ell, v) \mapsto \ell(v)$ définit une forme linéaire canonique (appelée: contraction) $T : V^* \otimes V \to K$. Alors, $T \circ \phi^{-1}$ est une forme linéaire sur $End(V)$, qui coincide avec $Tr$ sur les endomorphismes de type $\phi(\ell \otimes v)$. Pour la denière assertion, noter que pour tout $k$, $\phi(\Sigma_i e_i^* \otimes e_i)(e_k) = \Sigma_i \delta_{i,k} e_i = e_k = id_V(e_k)$. On retrouve ainsi la formule $Tr(id_V) = T(\Sigma_i e_i^* \otimes e_i) = \Sigma_i e_i^*(e_i) = n = dimV$ (évidente, mais qui peut servir de définition de la dimension de $V$).

*Traduction matricielle* : pour $V, W$ de dimensions $n, m$ finies, et munies, ainsi que leurs duaux, de bases, une application linéaire $u$ de $V$ dans $W$ est représentée par une matrice $U$, dont le coefficient $U_{i,j}$ de la $i$-ème ligne et de la $j$-ième colonne vaut $\epsilon_i^*(u(e_j))$. En particulier, si $u = \phi(e_h^* \otimes \epsilon_k)$, on a $U_{i,j} = \epsilon_i^*\big(e_h^*(e_j)\epsilon_k\big) = e_h^*(e_j)\epsilon_i^*(\epsilon_k) = \delta_{h,j}\delta_{i,k}$. Donc $\phi(e_h^* \otimes \epsilon_k) = \phi_{k,h}$ est représentée par la matrice élémentaire usuelle $E_{kh}$ (seul coefficient non nul, et égal à 1, en $k$-ième ligne, $h$-ième colonne). Et $u = \Sigma_{i,j} U_{i,j}\phi_{i,j}$ est l'image par $\phi$ de $\Sigma_{i,j} U_{i,j} e_j^* \otimes \epsilon_i$. Sous-entendant $\phi$, on peut écrire l'image sous $u$ d'un vecteur $v = \Sigma_k x_k e_k$ sous la forme

$$u(v) = \Sigma_{i,j} U_{i,j}(e_j^* \otimes \epsilon_i)(\Sigma_k x_k e_k) = \Sigma_i\big(\Sigma_j U_{i,j} x_j\big)\epsilon_i := \Sigma_i y_i \epsilon_i.$$

Traditionnellement, on pose $U_{i,j} = U_j^i$, $v = (x^1, ..., x^n), u(v) = (y^1, ..., y^n)$, où $y^i = \Sigma_{j=1,...,n} U_j^i x^j$, formule qu'on écrit sous la forme : $y^i = U_j^i x^j$. Il s'agit là de la convention d'Einstein, où un indice apparaissant en positions supérieure et inférieure dans un même terme représente l'effet d'une contraction, et signifie donc qu'on somme sur toutes les valeurs de cet indice. Un autre exemple est donné par $Tr(U) = T(\Sigma_{i,j} U_i^j e_j^* \otimes e_i) = U_i^i$.

**Remarques** :

i) Pour $W$ de dimension finie, $W$ est isomorphe à son bidual $W^{**}$, $\mathcal{L}(V, W) \simeq V^* \otimes W$, $\mathcal{L}(W^*, V^*) \simeq W^{**} \otimes V^* \simeq W \otimes V^*$, et l'opération d'inversion décrite à la remarque (ii) du §1.1: $V^* \otimes W \simeq W \otimes V^*$ correspond à la transposition des applications linéaires : $\mathcal{L}(V, W) \ni u \mapsto {}^t u \in \mathcal{L}(W^*, V^*)$.

ii) D'après la définition-même de $V \otimes W$, son dual $(V \otimes W)^*$ *s'identifie à l'espace des formes bilinéaires sur* $V \times W$. Supposons maintenant $V, W$ de dimensions finies. On a alors un isomorphisme canonique

$$\kappa_0 : V^* \otimes W^* \simeq (V \otimes W)^*,$$

tel que $(\kappa_0(\ell \otimes m))(v \otimes w) = \ell(v)m(w)$ pour toutes formes linéaires $\ell, m$ sur $V, W$, et tous $v, w$ dans $V, W$. En particulier, pour $V = W$, toute forme bilinéaire sur $V$ s'écrit sous la forme $b = \Sigma_{1 \leq i,j \leq n} b_{ij} e_i^* \otimes e_j^*$. Traduire en terme de $V^* \otimes V^*$ la condition que $b$ soit symétrique; qu'elle soit de rang $r$; de rang 1. Pour $v = \Sigma_i x^i e_i, w = \Sigma_j y^j e_j$, on a $b(v, w) = \Sigma_{1 \leq i,j \leq n} b_{ij} x^i y^j$, ce qui s'écrit $b_{ij} x^i y^j$ avec la convention d'Einstein. La distinction entre les matrices $U_i^j$ et $b_{ij}$ est claire: les tenseurs qu'elles représentent vivent dans des espaces $V^* \otimes V, V^* \otimes V^*$ différents.

iii) Pour $V, V', W, W'$ de dimensions finies, le morphisme $\kappa : \mathcal{L}(V, V') \otimes \mathcal{L}(W, W') \to \mathcal{L}(V \otimes W, V' \otimes W')$ équivaut, par le biais de $\phi$, à l'isomorphisme

$(V^* \otimes V') \otimes (W^* \otimes W') \simeq (V \otimes W)^* \otimes (V' \otimes W')$ obtenu en composant $\kappa_0$, l'associativité et l'inversion des facteurs.

iv) (Produit tensoriel de mesures) Soient $X, Y$ deux espaces topologiques compacts, munis de mesures $\mu, \nu$. Pour tout $f \in C(X, \mathbb{R}), g \in C(Y, \mathbb{R})$, on pose $(f \otimes g)\big((x,y)\big) = f(x)g(y)$. Justifier cette écriture et montrer que $C(X, \mathbb{R}) \otimes C(Y, \mathbb{R})$ s'identifie à un sous-espace de $C(X \times Y, \mathbb{R})$ dense pour la topologie de la convergence uniforme. On construit alors une mesure $\mu \otimes \nu$ sur $X \times Y$ vérifiant $(\mu \otimes \nu)(f \otimes g) = \mu(f)\nu(g)$. Justifier cette notation, et énoncer le théorème de Fubini. Pour $X = Y = [01] \subset \mathbb{R}$, munis de la mesure de Lebesgue $\mu = dx, \nu = dy$, on note $dx \otimes dy := dxdy$.

# 2 Algèbre tensorielle.

En dehors des paragraphes 2.2 et 2.3, la caractéristique de $K$ reste ici quelconque, mais on pourra la supposer nulle en première lecture.

## 2.1 L'algèbre tensorielle $\otimes V$.

Soient $p$ un entier naturel, et $V_1, ..., V_p$ des espaces vectoriels sur $K$. Une application de $V_1 \times ... \times V_p$ dans un espace vectoriel $U$ est dite $p$-linéaire, si pour tout $i$ et tout $(v_1, ..., v_{i-1}, v_{i+1}, ..., v_p)$, sa restriction à $v_1 \times ... \times v_{i-1} \times V_i \times v_{i+1} \times ... \times v_p$ fournit une application linéaire de $V_i$ dans $U$. En remplaçant bi- par $p$- au paragraphe précédent, on pose un problème universel, dont la solution existe et est notée $V_1 \otimes ... \otimes V_p$ (à isomorphisme près).

Ainsi, pour $p = 3$, l'application trilinéaire $V_1 \times V_2 \times V_3 \to V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$ : $(v_1, v_2, v_3) \mapsto v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3)$ définit une application linéaire canonique de $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ dans $V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$. On vérifie, par exemple en prenant des bases, que c'est un isomorphisme, et on identifie désormais $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ avec $V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$, et, de même, avec $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$.

Quand tous les $V_i$ sont égaux à un même $V$, sa $p$-ième puissance tensorielle est notée $\otimes^p V$. On pose $\otimes^0 V = K$. Du fait de l'associativité supra (étendue à un nombre quelconque de facteurs), la loi $\otimes^p V \times \otimes^q V \ni (t_1, t_2) \mapsto t_1 \otimes t_2 \in \otimes^{p+q} V$ permet de munir

$$\otimes V := \oplus_{p \geq 0} \otimes^p V$$

d'une structure de $K$-algèbre associative (et graduée), appelée *l'algèbre tensorielle de* $V$. Pour $V$ de dimension 1, $\otimes V$ est isomorphe à l'algèbre $K[T]$

des polynômes en une variable. En dimension plus grande, $\otimes V$ n'est pas commutative.

## 2.2 Tenseurs symétriques et antisymétriques.

Nous supposons ici que $K$ *est de caractéristique nulle* (et en particulier, $\neq 2$).

Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_p$ est le groupe, d'ordre $p!$, formé par les permutations de l'ensemble $\{1, ..., p\}$, avec la loi $\sigma\tau = \sigma \circ \tau$. Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_p$, l'application $(v_1, ..., v_p) \mapsto v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes ... \otimes v_{\sigma^{-1}(p)}$ définit un automorphisme $\rho(\sigma)$ de $\otimes^p V$ vérifiant $\rho(\sigma)(v_1 \otimes ... \otimes v_p) = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes ... \otimes v_{\sigma^{-1}(p)}$: en $k$-ième position, on met le vecteur qui était en $\sigma^{-1}(k)$-ième position, autrement dit, on place en $\sigma(k)$-ième position le vecteur qui était en $k$-ième position. Par conséquent, pour tout $\tau \in \mathfrak{S}_p$, $\rho(\tau)\big(\rho(\sigma)(v_1 \otimes ... \otimes v_p)\big) = \rho(\tau)(v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes ... \otimes v_{\sigma^{-1}(p)}) = v_{\sigma^{-1}(\tau^{-1}(1))} \otimes ... \otimes v_{\sigma^{-1}(\tau^{-1}(p))} = v_{(\tau\sigma)^{-1}(1)} \otimes ... \otimes v_{(\tau\sigma)^{-1}(p)} = \rho(\tau\sigma)(v_1 \otimes ... \otimes v_p)$. On a ainsi défini une action à gauche $(\sigma, t) \mapsto \sigma.t := \rho(\sigma)(t)$ de $\mathfrak{S}_p$ sur $\otimes^p V$.

Un tenseur $t \in \otimes^p V$ est dit symétrique, resp. antisymétrique, si pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_p$, on a $\sigma.t = t$, resp. $\sigma.t = sgn(\sigma)t$, où $sgn(\sigma) = sgn(\sigma^{-1}) = \pm 1$ désigne la signature de la permutation $\sigma$. On note $Sym^p V$, resp. $Ant^p V$, le sous-ev de $\otimes^p V$ formé par les tenseurs symétriques, resp. antisymétriques. Clairement: $Sym^p V \cap Ant^p V = \{0\}$, mais dès que $dim(V) > 2$ (voir plus bas), $Sym^p V \oplus Ant^p V$ ne remplit pas tout $\otimes^p V$.

L'endomorphisme de $\otimes^p V$ de symétrisation $s_p : t \mapsto s_p(t) = \frac{1}{p!}\Sigma_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \sigma.t$ (resp. d'antisymétrisation $a_p : t \mapsto a_p(t) = \frac{1}{p!}\Sigma_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} sgn(\sigma)\sigma.t$) a une image contenue dans $Sym^p V$ (resp. $Ant^p V$), où il induit l'identité. On en déduit que $Im(s_p) = Sym^p V$, resp. $Im(a_p) = Ant^p V$.

Le noyau de $s_p$ est le sous-espace vectoriel $N_p$ engendré par les tenseurs de la forme $\{\sigma.t - t, \sigma \in \mathfrak{S}_p, t \in \otimes^p V\}$. En effet, $N_p$ est clairement tué par $s_p$, tandis que tout élément $t$ de $\otimes^p V$ est somme de $s_p(t) \in Sym^p(V)$ et de $(id - s_p)(t) = \frac{1}{p!}\Sigma_{\sigma \in \mathfrak{S}_p}(t - \sigma t) \in N_p$. Donc $Ker s_p = N_p$ , $\otimes^p V = Sym^p V \oplus N_p$ et $s_p$ est la projection de $\otimes^p V$ sur $Sym^p V$ parallèlement à $N_p$.

On montre de même que le noyau de $a_p$ est le sous-espace vectoriel $J_p$ engendré par les tenseurs de la forme $\{\sigma.t - sgn(\sigma)t, \sigma \in \mathfrak{S}_p, t \in \otimes^p V\}$, et que $a_p$ est la projection de $\otimes^p V$ sur $Ant^p V$ parallèlement à $J_p$.

Notons ici que pour $p = 2$, $N_2$ coïncide avec $Im(a_2)$, $J_2$ avec $Im(s_2)$, de sorte que $\otimes^2 V = Sym^2 V \oplus Ant^2 V$. Ainsi, $\otimes^2(V^*) = Sym^2(V^*) \oplus Ant^2(V^*)$, soit, pour $V$ de dimension finie (voir la Remarque (ii) du §1.2) : toute forme bilinéaire sur $V$ s'écrit de façon unique comme somme d'une forme bilinéaire symétrique et d'une forme bilinéaire alternée.

## 2.3 Bases de $Sym^pV$ et de $Ant^pV$.

Ici, $K$ est encore de caractéristique nulle, et nous supposons que $V$ est un espace vectoriel de dimension finie $n$, muni d'une base $(e_1, ..., e_n)$.

Dans ces conditions, $\otimes^p V$ admet pour base les $n^p$ tenseurs $e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p}$, où $(i_1, ..., i_p)$ parcourt l'ensemble des $p$-uplets, éventuellement répétés, d'éléments de $\{1, ..., n\} := [1, n]$, c'est-à-dire l'ensemble des applications $I : [1, p] \to [1, n]$, avec $I(1) = i_1, ..., I(p) = i_p$; on écrira alors $e_I = e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p}$. Pour n'importe quelle application $J : [1, p] \mapsto [1, n]$, il existe une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ telle que $(j_{\sigma(1)}, ..., j_{\sigma(p)})$ soit une réécriture de $(j_1, ..., j_p)$ en termes croissants au sens large, c.à.d. telle que $I = J \circ \sigma$ soit une application croissante au sens large de même image que $J$, multiplicités comprises. Les classes de $e_I$ et de $e_J$ modulo $N_p$ sont alors égales. Par conséquent, les images des $e_I$ dans $Sym^pV$, où $I$ parcourt l'ensemble des applications croissantes $(1 \leq i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_p \leq n)$, engendrent $Sym^pV$. Je dis maintenant que ces images sont linéairement indépendantes. En effet, le symétrisé d'un tel $e_I$ est la somme d'un multiple non nul de $e_I$ (correspondant aux $\sigma$ stabilisant $I$), et d'éléments $e_{j_1} \otimes ... \otimes e_{j_p}$ de la base de $\otimes^p V$ ne correspondant pas à des suites croissantes. Ainsi, *$Sym^pV$ admet pour base $\{s_p(e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p}), 1 \leq i_1 \leq ... \leq i_p \leq n\}$, et*

$$dim(Sym^pV) = \binom{n+p-1}{p}.$$

(Une façon de vérifier cette formule consiste à noter que les suites ci-dessus s'identifient aux monômes $T_{i_1}...T_{i_p} = T_1^{d_1}...T_n^{d_n}$ en $n$ variables de degré $p = d_1 + ... + d_n$. Ou encore, qu'elles s'identifient, via $(i_1, ..., i_p) \mapsto (i_1, i_2+1, ..., i_p + p - 1)$, aux suites strictement croissantes $[1, p] \mapsto [1, n+p-1]$ c.à.d. aux parties à $p$ éléments d'un ensemble à $n + p - 1$ éléments.)

Passons à $Ant^pV$, et notons que comme $\mathrm{car}(K) \neq 2$, $J_p$ contient les tenseurs $v_1 \otimes ... \otimes v_p$ pour lesquels $v_i = v_j$ pour deux indices $i \neq j$. En fait, $J_p = J'_p$, où $J'_p$ désigne le sous-espace de $\otimes^p V$ engendré par ces tenseurs et par les $\{\sigma.e_I - sgn(\sigma)e_I, \sigma \in \mathfrak{S}_p,\ I : [1, p] \mapsto [1, n] \text{ strictement croissante}\}$. On peut donc reprendre le raisonnement précédent, en se limitant aux applications $I : [1, p] \to [1, n]$ strictement croissantes. On en déduit que $Ant^pV$

*admet pour base* $\{a_p(e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p}), 1 \leq i_1 < ... < i_p \leq n\}$. En particulier,

$$dim(Ant^p V) = \binom{n}{p}.$$

Pour $p = 2$, on a bien $dim(Sym^2 V) + dim(Ant^2 V) = \frac{(n+1)n}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2$, mais la somme des dimensions sera $< n^p$ pour $p > 2$ (et $n > 1$).

## 2.4 Une présentation plus intrinsèque.

Nous ne faisons plus d'hypothèse sur la caractéristique de $K$ , et montrons maintenant que $Sym^p V$ et $Ant^p$ sont solutions de problèmes universels, qui fournissent à leurs classes d'isomorphismes des définitions meilleures, car: (i) elles sont valables en toute caractéristique; (ii) elles sont mieux adaptées à l'étude de leurs propriétés fonctorielles; (iii) elles conduisent naturellement aux analogues symétrique et antisymétrique (mieux, alterné) de l'algèbre $\otimes V$. On fixe un espace vectoriel $V$ sur le corps $K$ et un entier $p$.

Pour toute application $b : V^p \to U$, et tout $\sigma \in \mathfrak{S}_p$, on pose $(\sigma.b)(v_1, ..., v_p)$ $= b(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(p)})$. On dit que $b$ est dite symétrique (resp. antisymétrique) si $\sigma.b = b$ (resp. $sgn(\sigma)b$) pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_p$; et que $b$ est alternée si $b(v_1, ..., v_p) = 0$ dès qu'il existe deux indices $i \neq j$ tels que $v_i = v_j$, ce qui entraîne ($\Leftrightarrow$ en car. $\neq 2$) que $b$ est antisymétrique, puisque $\mathfrak{S}_p$ est engendré par les transpositions.

*Existe-t-il un couple* $(S, s)$ *(resp.* $(\Lambda, \lambda)$ *) formé d'un espace vectoriel* $S$ *(resp.* $\Lambda$*) et d'une application p-linéaire symétrique* $s$ *(resp. alternée* $\lambda$*) :* $V^p \to S$ *(resp.* $\Lambda$*) vérifiant la propriété suivante : pour toute application p-linéaire symétrique (resp. alternée)* $b$ *de* $V^p$ *vers un espace vectoriel* $U$ *quelconque, il existe une* **unique application linéaire** $f = f_b$ *telle que* $b = f_b \circ s$ *(resp.* $b = f_b \circ \lambda$*).*

La réponse est positive. La définition même des sous-espaces $N_p$ (resp. $J'_p$) du §2.2 (voir aussi la fin de ce paragraphe) montre qu'elle est donnée par $S = (\otimes^p V)/N_p$ (resp. $\Lambda = (\otimes^p V)/J'_p$), muni de l'application canonique $s$ (resp. $\lambda$): $(v_1, ..., v_p) \mapsto$ classe de $v_1 \otimes ... \otimes v_p$ modulo $N_p$ (resp. $J'_p$). On posera désormais:

$$S^p V := \otimes^p V / N_p \qquad , \qquad \wedge^p V = \otimes^p V / J'_p \ ;$$
$$. \quad . \quad s(v_1, v_2, .., v_p) = v_1 v_2 ... v_p \qquad , \qquad \lambda(v_1, v_2, ..., v_p) = v_1 \wedge v_2 \wedge ... \wedge v_p \ .$$

Par exemple, les symboles $v.w \in S^2V$ (resp. $v \wedge w \in \wedge^2 V$) sont caractérisés par les relations de bilinéarité que vérifie $v \otimes w$, jointes aux relations $v.w = w.v$ (resp. $v \wedge v = 0$).

On dit que $S^pV$ (resp. $\wedge^p V$) est la $p$-ième puissance symétrique (resp. extérieure) de $V$. Les éléments de $\wedge^p V$ sont appelés des *$p$-vecteurs*, ceux de $\wedge^p(V^*)$ des *$p$-formes*.

En caractéristique nulle, le §2.2 montre qu'on peut relever les quotients $S^pV$ (resp. $\wedge^p V$) de $\otimes^p V$ en ses sous-espaces $Sym^pV$ (resp. $Ant^pV$), mais comme l'a déjà fait deviner le calcul de leurs dimensions au §2.3, de tels relèvements sont inutiles, et les mêmes arguments montrent qu'en toute caractéristique :

**Théoreme 2.1.** *pour $V$ de dimension $n$, de base $\{e_1, ..., e_n\}$:*
*- $S^pV$, de dim. $\binom{n+p-1}{p}$, admet pour base les $\{e_{i_1}...e_{i_p}, 1 \leq i_1 \leq ... \leq i_p \leq n\}$;*
*- $\wedge^p V$, de dim. $\binom{n}{p}$, admet pour base les $\{e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_p}, 1 \leq i_1 < ... < i_p \leq n\}$.*

(Il est d'ailleurs clair sur sa propriété universelle que $\wedge^p V = \{0\}$ pour $p > dimV$ , toute forme $p$-linéaire alternée sur $V^p$ étant alors identiquement nulle.)

Ainsi, pour $p = n$, $\wedge^n V$ est une droite, engendrée par le $n$-vecteur $e_1 \wedge ... \wedge e_n$. Pour tout $n$-uplet $\mathbf{v} = (v_1, ..., v_n)$ de vecteurs de $V$, on appelle *déterminant de la famille $\{v_1, ..., v_n\}$ relativement à la base* $\mathbf{e} = (e_1, ..., e_n)$ l'unique scalaire $det_{\mathbf{e}}(\{\mathbf{v}\}) \in K$ tel que $v_1 \wedge ... \wedge v_n = det_{\mathbf{e}}(\{\mathbf{v}\})\ e_1 \wedge ... \wedge e_n$. Si $v_j = \Sigma_{i=1,...,n} x_{i,j} e_i$, on a: $v_1 \wedge ... \wedge v_n = \Sigma_{i_1,...,i_n} x_{i_1,1} x_{i_2,2} ... x_{i_n,n}\ e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_n}$, où $(i_1, ..., i_n)$ parcourt l'ensemble de tous les $n$-uplets ordonnés d'éléments distincts de $\{1, .., n\}$, d'où:

$$det_{\mathbf{e}}(v_1, ..., v_n) = \Sigma_{\sigma \in \mathfrak{S}_n}\ sgn(\sigma)\ x_{1,\sigma(1)} ... x_{n,\sigma(n)}$$

Mais $det_{\mathbf{e}}(\{\mathbf{v}\})$ ne dépend que de $v_1 \wedge ... \wedge v_n$ et de $e_1 \wedge ... \wedge e_n$. Déduire de cette remarque que $det_{\mathbf{e}}$ est une forme $n$-linéaire alternée sur $V$, et retrouver toutes les propriétés élémentaires du déterminant.

Remarquons enfin que puisque $\mathfrak{S}_p$ est engendré par les transpositions $(i, i+1), 1 \leq i < p$, une forme $p$-linéaire $b$ sur $V$ (c'est-à-dire sur $V^p$) est symétrique si et seulement si elle s'annule sur le sous-espace $N''_p$ engendré par les tenseurs de la forme $v_1 \otimes .. \otimes v_{i-1} \otimes (v_i \otimes v_{i+1} - v_{i+1} \otimes v_i) \otimes v_{i+2} \otimes ... \otimes v_p$. On en déduit (on aurait pu le montrer directement) que $N''_p = N_p$. De même, une forme $p$-linéaire $b$ sur $V$ est alternée si et seulement si elle s'annule sur le sous-espace $J''_p$ engendré par les tenseurs de la forme $v_1 \otimes .. \otimes v_{i-1} \otimes v_i \otimes v_i \otimes v_{i+2} \otimes ... \otimes v_p$. On en déduit (ou on montre directement) que $J'_p = J''_p$ (qui, en car. $\neq 2$, coïncide avec $J_p$).

## 2.5 Algèbres symétrique et extérieure

Soit maintenant $q \geq 0$ un second entier. Comme $N_p \otimes (\otimes^q V)$ et $(\otimes^p V) \otimes N_q$ sont contenus dans $N_{p+q}$, la loi de produit $(\otimes^p V) \times (\otimes^q V) \to \otimes^{p+q} V$ définie au §2.1 induit par passage au quotient une application bilinéaire canonique $S^p V \times S^q V \to S^{p+q} V : (t_1, t_2) \mapsto t_1.t_2 :=$ classe de $\tilde{t}_1 \otimes \tilde{t}_2$ modulo $N_{p+q}$ (indépendante du choix des relevés $\tilde{t}_1, \tilde{t}_2$ de $t_1, t_2$ dans $\otimes^p V, \otimes^q V$). On a ainsi muni

$$S(V) := \oplus_{p \geq 0} S^p V$$

(avec $S^0 V = K$) d'une structure de $K$-algèbre graduée, associative et commutative, appelée *l'algèbre symétrique de* $V$. Pour $V$ de dimension finie $n$, le théorème 2.1 montre que $S(V)$ s'identifie à l'algèbre $K[T_1, ..., T_n]$ des polynômes en $n$ variables à coefficients dans $K$. Pour $V$ de dimension 1, $\otimes V = S(V) \simeq K[T]$, et $K[T] \otimes K[T] \simeq K[T_1, T_2]$. De façon générale, $K[X_1, ..., X_n] \otimes K[Y_1, ..., Y_m] \simeq K[X_1, ..., X_n, Y_1, ..., Y_m]$.

**Remarque** : en fait, c'est à $S(V^*)$ qu'il vaut mieux identifier $K[T_1, ..., T_n]$. En effet, $T_1, ..., T_n$ peuvent être vus comme des formes linéaires sur $V$ formant une base de $V^*$, et les monômes $\{T_1^{d_1}, ...T_n^{d_n}, d_1 + ... + d_n = p\}$, qui s'interprètent naturellement comme des formes $p$-linéaires symétriques sur $V$, forment une base de $S^p(V^*)$, .

De même, $J'_p \otimes (\otimes^q V)$ et $(\otimes^p V) \otimes J'_q$ sont contenus dans $J'_{p+q}$, et la loi de produit $(\otimes^p V) \times (\otimes^q V) \to \otimes^{p+q} V$ induit par passage au quotient une application bilinéaire canonique $\wedge^p V \times \wedge^q V \to \wedge^{p+q} V$, notée: $(t_1, t_2) \mapsto t_1 \wedge t_2$; ce $(p+q)$-vecteur s'appelle le produit extérieur du $p$-vecteur $t_1$ par le $q$-vecteur $t_2$. Pour $V$ de dimension $n$, on a ainsi muni

$$\wedge(V) := \oplus_{p=0,...,n} \wedge^p V$$

(avec $\wedge^0 V = K$) d'une structure de $K$-algèbre graduée de dimension $2^n$, associative et, si $n > 1$, non commutative, appelée *l'algèbre extérieure de* $V$. On a néanmoins la propriété d'anticommutativité suivante:

$$\forall t_1 \in \wedge^p V, t_2 \in \wedge^q V,\ t_2 \wedge t_1 = (-1)^{pq} t_1 \wedge t_2 \text{ dans } \wedge^{p+q} V,$$

car pour passer de $(1, ..., p, p+1, ..., p+q)$ à $(p+1, ..., p+q, 1, ..., p)$, il suffit de faire $pq$ chevauchements. En particulier, au moins en car. $\neq 2$, si $t$ est un $p$-vecteur avec $p$ impair, $t \wedge t = 0$ dans $\wedge^{2p} V$ (quand $p = 1$, on le savait déjà, par définition); mais si $p$ est pair, $t \wedge t$ n'a aucune raison d'être nul: par exemple, pour $dim V \geq 4$, $t = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 \in \wedge^2 V$ a pour carré extérieur $t \wedge t = 2e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \neq 0$ dans $\wedge^4 V$.

## 2.6 Propriétés fonctorielles

Du fait de leurs applications géométriques, nous allons nous concentrer sur le cas des puissances extérieures, mais la théorie peut être développée de façon parallèle pour les puissances symétriques. Pour simplifier, nous supposons désormais que notre espace vectoriel $V$ est de dimension $n$ finie, muni d'une base $\mathbf{e} = (e_1, ..., e_n)$. Nous désignons par $(e_1^*, ..., e_n^*)$ la base de $V^*$ duale, et pour tout $p \geq 0$:

• par $S(p, n)$ l'ensemble, à $\binom{n}{p}$ éléments, des suites strictement croissantes $J : [1, p] \to [1, n]$, qu'on identifie aux parties à $p$ éléments $\{j_1 < j_2 < ... < j_p\}$ de $\{1, ..., n\}$, avec $J(i) = j_i$;

• par $\{e_J = e_{j_1}, \wedge ... \wedge e_{j_n}, J \in S(p, n)\}$ la base de $\wedge^p V$ donné par le théorème 2.1;

• par $\{e_J^* = e_{j_1}^*, \wedge ... \wedge e_{j_n}^* J \in S(p, n)\}$ la base de $\wedge^p(V^*)$ définie de la même façon.

Le caractère "fonctoriel" des constructions tensorielles conduit aux propositions-définitions suivantes.

*Soit $u : V \to W$ une application linéaire. Il existe une unique application linéaire, notée $\wedge^p u : \wedge^p V \to \wedge^p W$ telle que pour tout $(v_1, ..., v_p) \in V^p$, on ait $(\wedge^p u)(v_1 \wedge ... \wedge v_p) = u(v_1) \wedge ... \wedge u(v_p)$.*

En effet, l'application $b : V^p \to \wedge^p W : (v_1, ..., v_p) \mapsto u(v_1) \wedge ... \wedge u(v_p)$ est une application $p$-linéaire alternée, et on note $f_b := \wedge^p u$ l'application linéaire qu'elle induit sur $\wedge^p V$. On prendra garde au fait que la notation $\wedge^p u$ ne désigne *pas* un élément de $\wedge^p(\mathcal{L}(V, W))$; il n'y a pas de confusion possible, $\wedge^p u$ ne pouvant être que nul dans ce deuxième sens. Remarquons également que si $i : V_1 \hookrightarrow V$ est une injection, l'application $\wedge^p i$ est encore injective, et permet d'identifier $\wedge^p V_1$ à un sous-espace vectoriel de $\wedge^p V$. Pour $V = W$, et $p = n$, on obtient:

*Soient $V$ un ev de dimension $n$, et $u \in End(V)$. Alors, $\wedge^n u$ s'identifie à un scalaire, noté $det(u) \in K$ et appelé le* déterminant de l'endomorphisme $u$ *de $V$. Pour tout $u, u' \in End(V)$, on a : $det(u'u) = det(u')det(u)$.*

En effet, pour tout ev $D$ de dimension 1, la contraction $D^* \otimes D \to K$ montre que $End(D)$ s'identifie de façon canonique à l'anneau $K$. Donc $\wedge^n u \in End(\wedge^n V)$ est un scalaire $det(u)$ *indépendant* du choix d'une base. Par ailleurs, $u' \circ u$ vérifie $\wedge^n(u' \circ u)(v_1 \wedge ... \wedge v_n) = u'(u(v_1)) \wedge ... \wedge u'(u(v_n)) = \wedge^n u'\big( \wedge^n u(v_1 \wedge ... \wedge v_n)\big)$, et $\wedge^n(u' \circ u) = \wedge^n u' \circ \wedge^n u$. Si $\mathbf{e} = (e_1, ..., e_n)$ est une base de $V$, on a $\wedge^n u(e_1, ..., e_n) = u(e_1) \wedge ... \wedge u(e_n)$, donc

$$det(u) = det_{\mathbf{e}}(u(e_1), ...., u(e_n)),$$

comme espéré. En développant l'expression $Car_u(\lambda) = \wedge^n(u - \lambda id_V)$ définissant le polynôme caractéristique de $u$, on retrouve pour la trace de $u$ la formule $Tr(u) = \Sigma_{i=1,...,n} e_i^*(u(e_i))$.

**Théoreme 2.2.** *: Il existe un isomorphisme canonique $\wedge^p(V^*) \simeq (\wedge^p V)^*$ tel que pour tout $(\ell_1, ..., \ell_p) \in (V^*)^p$ et tout $p$-vecteur $v_1 \wedge .... \wedge v_p \in \wedge^p V$, la $p$-forme $\ell_1 \wedge ... \wedge \ell_p \in \wedge^p(V^*)$, vue dans $(\wedge^p V)^*$, vérifie*

$$(\ell_1 \wedge ... \wedge \ell_p)(v_1 \wedge .... \wedge v_p) = det\big(\ell_i(v_j)\big)_{1 \le i,j \le p}.$$

*Dans cette identification de $\wedge^p(V^*)$ avec le dual de $\wedge^p V$, la base $\{e_J^*, J \in S(p,n)\}$ est la base duale de la base $\{e_J, J \in S(p,n)\}$ de $\wedge^p V$.*

*Preuve* : pour tout $p$-uplet $\ell = (\ell_1, ..., \ell_p) \in (V^*)^p$, la forme $p$-linéaire sur $V$ définie par $b_\ell : (v_1, ..., v_p) \mapsto det\big(\ell_i(v_j)\big)$ est alternée, donc définit une forme linéaire $f_{b_\ell}$ sur $\wedge^p V$, c'est-à-dire un élément $f_\ell$ de $(\wedge^p V)^*$ vérifiant $f_\ell(v_1 \wedge ... \wedge v_p) = det\big(\ell_i(v_j)\big)$, et l'application $\ell \mapsto f_\ell$ de $(V^*)^p$ dans $(\wedge^p V)^*$ est $p$-linéaire alternée, donc définit une application linéaire canonique : $\phi$ : $\wedge^p(V^*) \to (\wedge^p V)^*$ telle que $\phi(\ell_1 \wedge ... \wedge \ell_p) = f_\ell$. Pour tout $I, J \in S(p,n)$, l'image de $e_J^*$ par $\phi$ vérifie : $\phi(e_J^*)(e_I) = det(e_{j_h}^*(e_{i_k}), 1 \le h, k \le p)$, qui vaut 1 si $I = J$, et 0 sinon. Donc $\phi$ est un isomorphisme de $\wedge^p(V^*)$ sur $(\wedge^p V)^*$ envoyant la base $\{e_J^*\}$ sur la base duale de $\{e_J\}$.

Soient $q \le p$ deux entiers compris entre 1 et $n$, et $v_j = \Sigma_{i=1,...,n} x_{i,j} e_i$ , $j = 1, ..., p$ un $p$-uplet d'éléments de $V$. On note $X = (x_{ij}) \in Mat_{n,p}$ la matrice à $n$ lignes et $p$ colonnes représentant ce $p$-uplet dans la base $\mathbf{e}$ de $V$. Pour toute partie $J \in S(q,p)$, considérons le $q$-vecteur $v_J = v_{j_1} \wedge ... \wedge v_{j_q}$. Ses coordonnées relativement à la base $\{e_I, I \in S(q,n)\}$ de $\wedge^q V$ s'écrivent:

$$v_J = \Sigma_{I \in S(q,n)} X_{I,J} e_I, \text{ avec } X_{I,J} = det(x_{i,j})_{i \in I, j \in J},$$

qui s'appelle le (determinant) *mineur* d'ordre $q$, d'indices lignes $I$, d'indices colonnes $J$, de la matrice $X$. Pour vérifier cette formule, il suffit d'évaluer sur $v_J$ la base duale de $\wedge^q V^*$ formée par $\{e_I^*, I \in S(q,n)\}$ . On obtient : $e_I^*(v_J) = det(e_{i_h}^*(v_{j_k}))_{1 \leq h,k \leq q} = det(x_{i_h,j_k})_{1 \leq h,k \leq q} = det(x_{i,j})_{i \in I, j \in J}$. Citons comme corollaire la

**Formule de Lagrange** : *soient* $k \leq p, q \leq n$ *quatre entiers, et* $Y \in Mat_{p,n}, Z \in Mat_{n,q}$ *deux matrices rectangulaires, de sorte que* $X = YZ \in Mat_{p,q}$. *Soient* $I \in S(k,p), J \in S(k,q)$. *Alors le mineur d'ordre* $k$, *d'indices* $(I,J)$, *de* $X$ *est donné par*

$$X_{I,J} = \Sigma_{H \in S(k,n)} Y_{I,H} Z_{H,J}.$$

En effet, soient $(\ell_i, i \in I)$ les $k$ formes linéaires sur $V = K^n$ apparaissant sur les lignes correspondantes de $Y$, et $(v_j, j \in J)$ les $k$ vecteurs de $V$ apparaissant sur les colonnes correspondantes de $Z$. Alors, $X_{I,J} = (\ell_{i_1} \wedge ... \wedge \ell_{i_k})(v_{j_1}, ..., v_{j_k})$. Mais $v_J = \Sigma_{H \in S(k,r)} Z_{H,J} e_H$, et comme $\{e_i\}$ est la base duale de $\{e_i^*\}$ dans la bidualité $V^{**} \simeq V$, on a de même: $\ell_I = \Sigma_{H' \in S(k,r)} Y_{I,H'} e_{H'}^*$. Alors, $\ell_I(v_J) = \Sigma_{H,H'} Y_{I,H'} Z_{H,J} e_{H'}^*(e_H) = \Sigma_H Y_{I,H} Z_{H,J}$.

## 2.7 Groupes algébriques linéaires

Soit $V$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie. On appelle construction tensorielle de $V$ tout espace vectoriel $C(V)$ construit à partir de $V$ en itérant les procédés suivants : si $W$ est une construction de $V$, il en est de même de son dual $W^*$, de ses puissances tensorielles, symétriques et alternées $\otimes^p W, S^p W, \wedge^p W$; si $W_1, W_2$ sont deux constructions de $V$, il en est de même de leur somme directe $W_1 \oplus W_2$ et de leur produit tensoriel $W_1 \otimes W_2$.

Soit alors $u \in GL(V)$ un automorphisme de $V$. Comme on l'a vu ci-dessus dans plusieurs cas, $u$ définit naturellement sur toute construction $C(V)$ de $V$ un automorphisme $C(u) \in GL(C(V))$ de $C(V)$. Par exemple, si $C(V) = V^*$ est le dual de $V$, $C(u) = {}^t u^{-1} \in GL(V^*)$, où ${}^t u$ est le transposé de $u$; pour $C(V) = \otimes^p V$, $C(u) := \otimes^p u$ vérifie : $C(u)(v_1 \otimes ... \otimes p) = u(v_1) \otimes ... \otimes u(v_p)$; propriété similaire pour $C(V) = S^p V, \wedge^p V$. Et $C_1(u) \oplus C_2(u), C_1(u) \otimes C_2(u)$ sont bien des automorphismes de $C_1(V) \oplus C_2(V), C_1(V) \otimes C_2(V)$.

Si $u, u'$ sont deux automorphismes de $V$, l'automorphisme $C(u \circ u')$ de $C(V)$ est égal à $C(u) \circ C(u')$. De plus, $C(id_V) = id_{C(V)}$. Par conséquent, toute construction tensorielle $C(V)$ de $V$ est naturellement munie d'une action à gauche du groupe $GL(V)$.

Étant donnés un ensemble fini de constructions $C_1(V), ..., C_N(V)$ de $V$, et dans chacune d'elle, un sous-espace vectoriel $W_i \subset C_i(V)$, on peut donc attacher au sous-espace vectoriel $W = W_1 \oplus ... \oplus W_N$ de la construction $C(V) = C_1(V) \oplus ... \oplus C_N(V)$ son stabilisateur

$$Stab(W) = \{u \in GL(V), C(u)(W) = W\},$$

qui est un sous-groupe de $GL(V)$. Dans une base de $V$ où $u$ est représentée par une matrice $U \in GL_n$, la condition $C(u)(W) = W$, ou de façon équivalente (puisque $C(u)$ est un automorphisme) $C(u)(W) \subset W$, se traduit par des équations algébriques à coefficients dans $K$ liant les coefficients $U_{ij}$ de la matrice $U$. De tels sous-groupes de $GL(V)$ sont dit algébriques, et on montre inversement que tout sous-groupe algébrique $G$ de $GL(V)$ est le stabilisateur d'un sous-espace vectoriel d'une construction de $V$. Par exemple, le sous-groupe $G$ de $GL_n(K)$ formé par les matrices triangulaires supérieures est le stabilisateur de $W = W_1 \oplus ... \oplus W_{n-1} \subset V \oplus .... \oplus V$, où pour tout $i, W_i$ est le sous-espace $Ke_1 \oplus .. \oplus Ke_i$ de $V = K^n$.

Plutot qu'une collection $\{W_i\}$ de sous-espaces des constructions $C_1(V), ...,$ $C_N(V)$, on peut également se donner pour chaque $i$ un tenseur $t_i \in C_i(V)$, ou de façon équivalente, un tenseur $t = t_1 \oplus ... \oplus t_N \in C(V)$, et lui associer son fixateur

$$Fix(t) = \{u \in GL(V), C(u)(t) = t\},$$

qui est encore un sous-groupe algébrique de $GL(V)$. Les sous-groupes algébriques de $GL(V)$ ne sont pas tous des fixateurs, mais c'est le cas de la plupart des "groupes classiques" rencontrés au chapitre III. Ainsi,

$SL_n(K) = Fix(t)$, où $t = e_1 \wedge ... \wedge e_n \in \wedge^n(V)$.

$O_n(K) = Fix(t)$, où $t = e_1^* \otimes e_1^* + ... + e_n^* \otimes e_n^* \in V^* \otimes V^*$.

En revanche, le groupe unitaire $U(n)$ n'est pas un sous-groupe algébrique de $GL_n$.

# 3 Applications géométriques

## 3.1 Grassmaniennes

Soient $V$ un ev de dimension $n$ sur $K$, et $p \in [0, n]$ un entier. On appelle grassmanienne d'ordre $p$ de $V$ l'ensemble des sous-ev de dimension $p$ de $V$.

On le note $Gr_p(V)$, ou $Gr(p,n)$ quand $V = K^n$. Par exemple, $Gr_1(V)$ est l'espace projectif $\mathbb{P}(V) \simeq \mathbb{P}_{n-1}$ des droites de $V$. Pour tout élément $W$ de $Gr_p(V)$, le sous-espace $\wedge^p W$ de $\wedge^p V$ est une droite, donc un élément de l'espace projectif $\mathbb{P}(\wedge^p V) \simeq \mathbb{P}_N$, de dimension $N = \binom{n}{p} - 1$. On appelle plongement de Plücker l'application

$$\gamma : Gr_p(V) \to \mathbb{P}(\wedge^p V) : W \mapsto \wedge^p W.$$

L'énoncé suivant justifie (partiellement) cette dénomination.

**Proposition 3.1.** *: i) Soient $v_1, ..., v_p$ (resp. $w_1, ..., w_p$) des vecteurs de $V$ linéairement indépendants. Alors, les $v_1 \wedge ... \wedge v_p$ et $w_1 \wedge ... \wedge w_p$ sont linéairement dépendants dans $\wedge^p V$ si et seulement si les sous-espaces vectoriels (de dimension $p$) de $V$ engendrés par $\{v_1, ..., v_p\}$ et par $\{w_1, ..., w_p\}$ coïncident.*

*ii) Le plongement de Plücker est injectif, et son image est formée des droites de $\wedge^p V$ engendrées par des $p$-vecteurs purs (c'est-à-dire: décomposables, c.à.d. de la forme $v_1 \wedge ... \wedge v_p$).*

*Preuve* : i) Soit $W'$ (resp. $W$) le sous-ev engendré par les $v_i$ (resp. les $w_i$). Si $W \subset W'$, $w_1 \wedge ... \wedge w_p$ est une combinaison linéaire des $v_{\sigma(1)} \wedge ... \wedge v_{\sigma(p)}, \sigma \in \mathfrak{S}_p$, donc un multiple de $v_1 \wedge ... \wedge v_p$. Inversément, si $w_1 \wedge ... \wedge w_p$ est un multiple (automatiquement non nul) de $v_1 \wedge ... \wedge v_p$, et si l'un des $w_i$, soit $w_1$, n'appartient pas à $W'$, il existe une base de $V$ complétant la famille libre $\{v_1, ..., v_p, w_1\}$. Les coordonées non nulles de $w_1 \wedge ... \wedge w_p$ dans la base correspondante de $\wedge^p V$ font toutes intervenir $w_1$, alors que par hypothèse, sa seule coordonnée non nulle est portée par $v_1 \wedge ... \wedge v_p$, où $w_1$ n'intervient pas. Contradiction.

ii) On vient de voir que si $W \neq W' \in Gr_p(V)$, les $p$-vecteurs qui portent les points $\gamma(W)$ et $\gamma(W')$ ne peuvent être proportionnels, donc $\gamma(W) \neq \gamma(W')$. La deuxième assertion est un réécriture de la définition des $\gamma(W)$.

Fixons une base $\mathbf{e} = \{e_1, ..., e_n\}$ de $V$, et soit $X = (x_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} \in Mat_{n,p}$ la matrice représentant le $p$-uplet $(v_1, .., v_p)$ relativement à $\mathbf{e}$. Alors, $v_1 \wedge ... \wedge v_p = \Sigma_{I \in S(p,n)} X_{I,[1,..,p]} e_I$. À homothétie près, la collection de ces mineurs ne dépend que de $W$ et de l'identification de $\mathbb{P}(V)$ à $\mathbb{P}_{n-1}$ que fournit $\mathbf{e}$. On appelle $(\{\lambda X_{I,[1,..,p]}, I \in S(p,n), \lambda \in K^*\}$ les coordonnés de Plücker de $W$. Elles sont liées par des relations de dépendance algébriques (indépendantes de $W$), qui montrent que $\gamma(Gr(p,n))$ est une intersection de quadriques de $\mathbb{P}_N$.

## 3.2 Aires $p$-dimensionnelles

Soit $V$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension $n$, de sorte que $\wedge^n V$ est une droite réelle. On appelle *orientation* de $V$ le choix d'une direction $\mathbb{R}^{>0}.\omega$ sur cette droite.

Supposons maintenant $V$ muni d'un produit scalaire $b$. Si $\mathbf{e}$ et $\mathbf{e}'$ sont deux bases orthonormées de $V$, alors $det_{\mathbf{e}} = \pm det_{\mathbf{e}'}$ dans $\wedge^n(V^*)$, et on peut attacher à tout $n$-uplet $(v_1, ..., v_n)$ de vecteurs de $V$ le nombre

$$Vol_{b,n}(v_1, ..., v_n) = |det_{\mathbf{e}}(v_1, ..., v_n)|^{\frac{1}{2}} = (det(b(v_i, v_j))_{1 \leq i,j \leq n})^{\frac{1}{2}}.$$

La formule de changement de variables dans les intégrales multiples montre que c'est la mesure du parallélépipède porté par $(v_1, ..., v_n)$ relativement à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ (identifié à $V$ par le choix de la base $\mathbf{e}$). S'il est non nul, et si $V$ est muni d'une orientation, on peut affecter ce nombre du signe de $v_1 \wedge ... \wedge v_n$ relativement à $\omega$. On peut donc définir un volume algébrique $n$-dimensionnel pour les espaces vectoriels euclidens et orientés de dimension $n$.

Soit en revanche $p$ un entier compris entre 1 et $n-1$. Les sous-espaces vectoriels $W$ de dimension $p$ de $V$ sont encore munis d'un produit scalaire (la restriction de $b$ à $W$ restant définie positive), mais ils n'ont *plus* d'orientation. Si $(v_1, ..., v_p)$ sont $p$ éléments de $V$ linéairement indépendants, on peut donc parler seulement de l'aire $p$-dimensionnelle

$$Vol_{b,p}(v_1, ..., v_p) = (det(b(v_i, v_j))_{1 \leq i,j \leq p})^{\frac{1}{2}}$$

(sans signe) de $(v_1, ..., v_p)$. Elle vérifie :

**Proposition 3.2.** (théorème de Pythagore) *: le carré de l'aire $p$-dimensionnelle d'un parallélépipède de dimension $p$ de $\mathbb{R}^n$ est égal à la somme des carrés des aires ($p$-dimensionnelles) de ses projections sur les $\binom{n}{p}$ faces de dimension $p$ de $\mathbb{R}^n$.*

*Preuve* : soit $X = (x_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} \in Mat_{n,p}$ la matrice représentant le $p$-uplet $(v_1, .., v_p)$ relativement à la base orthonormée usuelle $\mathbf{e}$ de $\mathbb{R}^n = V$. On a $(b(v_i, v_j))_{1 \leq i,j \leq p} = {}^tX.X$, et la formule de Lagrange, qu'on appelle alors formule de Cauchy-Binet, donne:

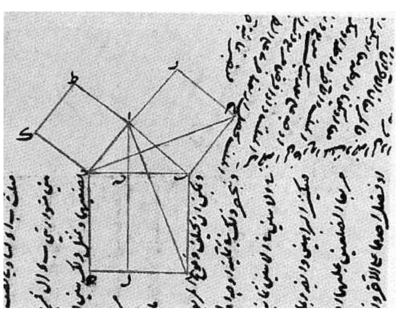
$$det({}^tX.X) = \Sigma_{H \in S(p,n)} \ ({}^tX)_{[1,...,p],H} X_{H,[1,..,p]} = \Sigma_{H \in S(p,n)} (X_{H,[1,..,p]})^2.$$

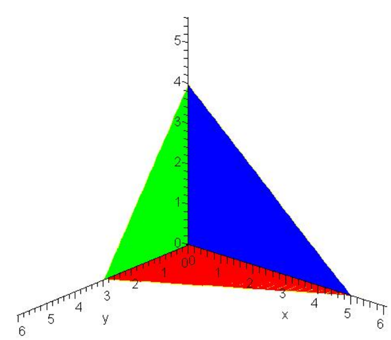
On conclut en notant que $X_{[h_1,...,h_p],[1,...,p]}$ est la matrice représentative des projections de $v_1, ..., v_p$ sur la face $\{0\} \times \mathbb{R}_{h_1} \times \{0\} \times ... \times \{0\} \times \mathbb{R}_{h_p} \times \{0\}$ de $\mathbb{R}^n$.

On peut présenter cette preuve de la façon équivalente suivante. Pour toute forme bilinéaire $b$ sur $E$, il existe sur $\wedge^p V$ une forme bilinéaire canonique $\wedge^p b$ telle que

$$(\wedge^p b)(v_1 \wedge ... \wedge v_p, w_1 \wedge ... \wedge w_p) = det(b(v_i, w_j))_{1 \leq i,j \leq p}$$

pour tous $v_i, w_j$ dans $V$. Si $b$ est un produit scalaire, il en est de même pour $\wedge^p b$, et si $\mathbf{e} = (e_1, ..., e_n)$ est orthormée pour ce produit scalaire, la base $\{e_I, I \in S(p,n)\}$ de $\wedge^p V$ est orthormée pour $\wedge^p b$. Les coordonnées de $v_1 \wedge ... \wedge v_p$ dans cette base étant données par les mineurs $X_{H,[1,...,p]}$, le théorème de Pythagore usuel (avec "$p$" $= 1$, "$n$" $= \binom{n}{p}$) permet de conclure.






. Le cas $p = 1, n = 2$

Un corollaire du cas $p = 2, n = 3$