DM 1 : Foncteurs $\underline{\mathrm{Hom}}$ et $- \otimes_{\mathcal{O}_X} -$

1 Le faisceau des homomorphismes

Soient k un corps algébriquement clos et X une variété algébrique sur k, de faisceau strucutural $\mathcal{O}_X$. Un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules est appelé faisceau algébrique sur X.

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux faisceaux algébriques sur X. Le préfaisceau $U \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$ est un faisceau algébrique, noté $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ et qu'on appelle faisceau des homomorphismes de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{G}$.

Soient x un point de X et $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})_x$ le module des germes de sections de ce faisceau au point x.

(1) Construire un homomorphisme canonique

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})_x \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x)$$

(2) On se propose de démontrer qu'en général, cet homomorphisme n'est pas un isomorphisme. On choisit pour $\mathcal{F}$ le faisceau algébrique somme directe $\mathcal{O}_X^{(\mathbb{N})} = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_X$.

(a) Vérifier que $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{O}_X^{(\mathbb{N})}, \mathcal{G})$ est isomorphe à $\mathcal{G}^{\mathbb{N}} = \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{G}$.

(b) Montrer qu'en général l'homomorphisme

$$(\mathcal{G}^{\mathbb{N}})_x \longrightarrow (\mathcal{G}_x)^{\mathbb{N}}$$

n'est pas surjectif. On pourra prendre par exemple pour $\mathcal{G}$ le faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}$ des fonctions régulières sur les ouverts de $\mathbb{A}^1$. Si a_n est une suite infinie de points non nuls de $\mathbb{A}^1$, la suite des germes en 0 des fonctions rationnelles

$$z \longmapsto \frac{1}{z - a_n}$$

ne provient pas de ${\mathcal{G}^{\mathbb{N}}}_0$.

(3) Vérifier qu'en général, l'homomorphisme

$$(\mathcal{G}^{\mathbb{N}})_x \longrightarrow (\mathcal{G}_x)^{\mathbb{N}}$$

n'est pas injectif. Une suite (a_n) de points non nuls deux à deux disctincts de $\mathbb{A}^1$ étant choisie, on pourra prendre pour $\mathcal{G}$ la somme directe de faisceaux algébriques sur $\mathbb{A}^1$ dont le support est le point a_n.

(4) Conclure.

2 Le faisceau produit tensoriel

Pour deux faisceaux algébriques $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sur X, on note $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ le faisceau associé au préfaisceau $U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$.

(1) Montrer que pour $x \in X$ on a un isomorphisme canonique

$$(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})_x = \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{G}_x$$

fonctoriel en $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, faisceaux algébriques sur X.

(2) Si $\mathcal{F}$ est un faisceau algébrique sur X, montrer que les foncteurs $- \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$ et $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F}, -)$ sont adjoints.

(3) Si $\mathcal{F}$ est un faisceau algébrique sur X, montrer que le foncteur $- \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$ est exact à droite.

DM 1 : The functors $\underline{\mathrm{Hom}}$ and $- \otimes_{\mathcal{O}_X} -$

1 Sheaf of homomorphisms

Let k be an algebraically closed field and X an algebraic variety over k, with structure sheaf $\mathcal{O}_X$. A sheaf of $\mathcal{O}_X$-modules is called an algebraic sheaf on X.

Let $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ be two algebraic sheaves on X. The presheaf $U \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$ is an algebraic sheaf, denoted by $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ and called sheaf of homomorphisms from $\mathcal{F}$ to $\mathcal{G}$.

Let x be a point of X and $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})_x$ be the module of germs of sections (the stalk) of that sheaf at the point x.

(1) Construct a canonical homomorphism

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})_x \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x)$$

(2) We want to see that in general, this homomorphism is not an isomorphism. We choose for $\mathcal{F}$ the direct sum algebraic sheaf $\mathcal{O}_X^{(\mathbb{N})} = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_X$.

(a) Check that $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{O}_X^{(\mathbb{N})}, \mathcal{G})$ is isomorphic to $\mathcal{G}^{\mathbb{N}} = \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{G}$.

(b) Show that in general, the homomorphism

$$(\mathcal{G}^{\mathbb{N}})_x \longrightarrow (\mathcal{G}_x)^{\mathbb{N}}$$

is not surjective. One can take for example for $\mathcal{G}$ the sheaf $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}$ of regular functions on open subsets of $\mathbb{A}^1$. If a_n is an infinite sequence of distinct non-zero points in $\mathbb{A}^1$, the sequence of germs at 0 of the rational functions

$$z \longmapsto \frac{1}{z - a_n}$$

does not come from $(\mathcal{G}^{\mathbb{N}})_0$.

(3) Check that in general, the homomorphism

$$(\mathcal{G}^{\mathbb{N}})_x \longrightarrow (\mathcal{G}_x)^{\mathbb{N}}$$

is not injective. A sequence (a_n) of distinct non-zero points in $\mathbb{A}^1$ being chosen, one may take for $\mathcal{G}$ the direct sum of algebraic sheaves on $\mathbb{A}^1$ whose support is the point a_n.

(4) Conclude.

2 The tensor product sheaf

For two algebraic sheaves $\mathcal{F}$ and $\mathcal{G}$ on X, we denote by $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ the sheaf associated to the presheaf $U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$.

(1) Show that for $x \in X$, we have a canonical isomorphism

$$(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})_x = \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{G}_x,$$

fonctorial in $\mathcal{F}$ and $\mathcal{G}$, algebraic sheaves on X.

(2) If $\mathcal{F}$ is an algebraic sheaf on X, show that the functors $- \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$ and $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F}, -)$ are adjoint.

(3) If $\mathcal{F}$ is an algebraic sheaf on X, show that the functor $- \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$ is right exact.