Faisceaux constructibles

Exercice 1. Soit $j : \mathbb{C}^\times \hookrightarrow \mathbb{C}$. Calculer $(Rj_*(\underline{k}_{\mathbb{C}^\times}))_0$.

Exercice 2. Soit X une sous-variété algébrique fermée de $\mathbb{C}^n$, stable par multiplication par un scalaire (donc conique). On note $j : U = X - \{0\} \to X$ l'immersion ouverte. Calculer $(Rj_*(\underline{k}_{\mathbb{C}^\times}))_0$.

Exemple : le cône nilpotent de $\mathfrak{sl}_2$ peut être décrit comme la quadrique $x^2 + yz = 0 \subset \mathbb{C}^3$, ou encore comme $\mathbb{C}^2/\{\pm 1\}$. Si k est un corps, discuter selon la caractéristique de k.

Exercice 3. Pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, on note $\mathcal{L}_\lambda$ le système local de fibre $\mathbb{C}$ et de monodromie λ sur $X = \mathbb{C}^*$. Identifier $\mathcal{L}_1$. Calculer $\mathcal{L}_\lambda \otimes \mathcal{L}_\mu$ et $\mathcal{L}_\lambda^\vee := \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{L}_\lambda, \mathcal{L}_1)$.

Pour $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto z^n$, calculer $f^*\mathcal{L}_\lambda$ et $f_*\mathcal{L}_\lambda$.

Exercice 4. Soit $\mathcal{L}$ un système local sur $\mathbb{C}^\times$ associé à un espace vectoriel de dimension finie V et une monodromie $\rho \in \mathrm{GL}(V)$. Montrer que $H^0(\mathbb{C}^\times, \mathcal{L}) = V^\rho$ et $H^1(\mathbb{C}^\times, \mathcal{L}) = V_\rho$ (coinvariants).

Calculer $(Rj_*(\mathcal{L}))_0$, où $j : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ est l'immersion ouverte. Donner un critère sur la monodromie pour que $j_!\mathcal{L} \to Rj_*\mathcal{L}$ soit un isomorphisme.

Exercice 5. Si $f : X \to Y$ est une fibration (topologiquement localement triviale, i.e. localement c'est une projection $V \times F \to V$ où V est un ouvert de Y et F est la fibre), montrer que $R^if_*\mathcal{L}$ est un système local. (En particulier, quelle est la fibre de ce système local ?) Cela s'applique aux morphismes lisses de variétés algébriques complexes.

Dans l'exemple où X est l'adhérence dans $\mathbb{P}^2 \times (\mathbb{A}^1 - \{0, 1\})$ de la variété affine définie par

$$y^2 = x(x-1)(x-\lambda),$$

et $f : X \to (\mathbb{A}^1 - \{0, 1\})$ est la projection, montrer que f est projective (donc propre) et lisse. Déterminer $R^1f_*(\underline{\mathbb{Z}})$.

Exercice 6. Si $f : X \to Y$ est un revêtement topologique, expliciter les foncteurs $f_!$, f_*, $f^!$ et f^*. On pourra supposer que X et Y sont connexes, et considérer le morphisme induit sur les groupes fondamentaux $\pi_1(f) : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, y)$.

Exercice 7. Soit $X = \mathbb{P}^1 \smallsetminus \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Soit $\mathcal{L}$ le système local de rang 1 et monodromie -1 autour de chaque x_i. Montrer que

$$H^0(X, \mathcal{L}) = H^2(X, \mathcal{L}) = 0 \quad \text{et} \quad H^1(X, \mathcal{L}) = \mathbb{Q}^2.$$

Exercice 8. Ici, k est un corps de caractéristique quelconque (voire $\mathbb{Z}$). Soit G un groupe (disons fini) agissant sur X. Expliquer pourquoi l'application $X \longrightarrow X/G$ induit un quasi-isomorphisme

$$R\Gamma(X/G, k) \simeq R\,\mathrm{inv}_G \circ R\Gamma(X, k).$$

où $R\Gamma(X, k)$ est vu comme un complexe de kG-modules (on pourra s'en convaincre avec un modèle simplicial muni d'une action de G), et $\mathrm{inv}_G : kG\text{-mod} \to k\text{-mod}$ est le foncteur des points fixes.

Montrer que si l'action est libre, alors $R\Gamma(X, k)$ est un complexe parfait : il est quasi-isomorphe à un complexe borné de kG-modules projectifs de type fini.

Utiliser ce résultat pour retrouver la cohomologie de l'espace projectif réel.

Structures de troncation

Exercice 9. Si $\mathcal{C}$ est le cœur de la t-catégorie $\mathcal{T}$, montrer que

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(A, B[1])$$

C'est vrai même si $\mathcal{T}$ n'est pas équivalente à $D^b(\mathcal{C})$.

Par contre c'est faux en général pour les Ext^i avec $i \geq 2$. Par exemple, considérer pour $\mathcal{T}$ la catégorie dérivée constructible sur $\mathbb{P}^1$ avec une seule strate, et pour $\mathcal{C}$ le cœur de la t-structure perverse (dans ce cas, uniquement des faisceaux constants de rang fini placés en degré -1 : pourquoi ?) ; puis comparer $\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{C}}(\underline{k}_{\mathbb{P}^1}, \underline{k}_{\mathbb{P}^1})$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\underline{k}_{\mathbb{P}^1}, \underline{k}_{\mathbb{P}^1}[2])$.

Exercice 10. Pour $X = \mathbb{P}^1$ muni de la stratification $\mathbb{A}^1 \sqcup \{\infty\}$, exhiber cinq objets indécomposables dans la catégorie des faisceaux pervers pour cette stratification et pour la perversité auto-duale. On pourra utiliser l'exercice précédent et une adjonction pour calculer $\mathrm{Ext}^1(Rj_*\underline{k}_U[1], i_*\underline{k}_\infty)$, où $j : U := \mathbb{A}^1 \to \mathbb{P}^1$ et $i : \{\infty\} \to \mathbb{P}^1$ sont les inclusions ouverte et fermée.