Cohomologie

Pour un faisceau $\mathcal{F}$ sur un espace localement compact X,[1] on définit

$$\Gamma_c(X, \mathcal{F}) := \{s \in \Gamma(X, \mathcal{F}) \mid \mathrm{supp}(s) \text{ est compact}\}$$

On rappelle que le support $\mathrm{supp}(s)$ de s est l'ensemble des points $x \in X$ tels que le germe s_x soit non nul ; c'est toujours un fermé. Noter que $\Gamma_c(X, -)$ est un sous-foncteur de $\Gamma(X, -)$, avec égalité si X est compact.[2] Ce foncteur est exact à gauche, et la cohomologie à support compact est définie comme les foncteurs dérivés à droite :

$$\mathrm{H}^i_c(X, \mathcal{F}) := R^i\Gamma_c(X, \mathcal{F}).$$

Si X est une variété différentielle, on peut calculer $\mathrm{H}^\bullet(X, \mathbb{R})$ (resp. $\mathrm{H}^\bullet_c(X, \mathbb{R})$) comme la cohomologie du complexe $\Omega^\bullet(X)$ des formes différentielles globales (resp. $\Omega^\bullet_c(X)$, formes différentielles globales à support compact). Cela utilise que : le complexe de de Rham $\Omega^\bullet_X$ (dont le terme de degré i est égal au faisceau des formes différentielles de degré i surt X) est une résolution molle donc $\Gamma(X, -)$ et $\Gamma_c(X, -)$-acyclique.

Exercice 1. (*Cohomologie à support compact*) Calculer la cohomologie (resp. la cohomologie à support compact) de $\mathbb{R}$ à coefficients réels en utilisant le complexe de de Rham.

Exercice 2. Soient A et B des sous-espaces fermés de l'espace topologique X, et soient $h : A \cup B \to X$, $i : A \to X$, $j : B \to X$ and $k : A \cap B \to X$ les inclusions. Pour $\mathcal{F}$ faisceau abélien sur X, montrer qu'on a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow h_*h^*\mathcal{F} \longrightarrow i_*i^*\mathcal{F} \oplus j_*j^*\mathcal{F} \longrightarrow k_*k^*\mathcal{F} \longrightarrow 0$$

1. Au sens français, donc en particulier séparé (Hausdorff).
2. Un fermé d'un compact est compact, cf note précédente.

(quels sont les morphismes ?). En déduire la suite exacte longue

$$\cdots \to \mathrm{H}^p(A \cup B, h^*\mathcal{F}) \to \mathrm{H}^p(A, \mathcal{F}) \oplus \mathrm{H}^p(B, \mathcal{F}) \to \mathrm{H}^p(A \cap B, k^*\mathcal{F}) \to \cdots$$

C'est la suite de Mayer-Vietoris pour les sous-espaces fermés.

Exercice 3. Calculer la cohomologie de la sphère $\mathrm{H}^*(S^n, \mathbb{Z})$. Indication : considérer la suite de Mayer-Vietoris pour les deux hémispheres et raisonner par récurrence.

Exercice 4. (*Extension par zéro*) On considère un espace topologique X, un ouvert $j : U \to X$ et le fermé complémentaire $i : Z \to X$. On définit comme suit le foncteur "extension par zéro" $j_!$ de la catégorie des faisceaux abéliens sur U vers la catégorie des faisceaux abéliens sur X (sur les objets) : $j_!\mathcal{F}$ est le faisceau associé au préfaisceau

$$V \mapsto \begin{cases} \mathcal{F}(V) & \text{si } V \subseteq U \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Définir $j_!$ sur les morphismes.
2. Montrer que pour $x \in X$, la tige $(j_!\mathcal{F})_x$ est égale à $\mathcal{F}_x$ si $x \in U$, et 0 sinon (d'où le nom "extension par zéro").
3. Montrer que le foncteur image directe i_* vérifie une propriété similaire, avec Z au lieu de U.
4. Montrer que $j_!$ est adjoint à gauche de j^*.[3]
5. Montrer qu'on a une suite exacte courte fonctorielle

$$0 \longrightarrow j_!j^*\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow i_*i^*\mathcal{F} \longrightarrow 0.$$

(Quels sont les morphismes ? Pour l'exactitude, considérer les fibres.)

3. Il s'agit du j^* pour les faisceaux abéliens, souvent noté j^{-1}.

6. On a donc un triangle distingué

$$j_! j^* \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow i_* i^* \mathcal{F} \xrightarrow{+1}$$

   Appliquer le foncteur triangulé $Ra_!$, où $a : X \to \mathrm{pt}$, pour obtenir le triangle distingué

$$R\Gamma_c(U, j^*\mathcal{F}) \longrightarrow R\Gamma_c(X, \mathcal{F}) \longrightarrow R\Gamma_c(Z, i^*\mathcal{F}) \xrightarrow{+1}$$

7. En déduire la suite exacte longue

$$\cdots \to \mathrm{H}^p_c(U, j^*\mathcal{F}) \to \mathrm{H}^p_c(X, \mathcal{F}) \to \mathrm{H}^p_c(Z, i^*\mathcal{F}) \to \mathrm{H}^{p+1}_c(U, j^*\mathcal{F}) \to \cdots$$

Exercice 5. Utiliser la décomposition $S^n = \mathbb{R}^n \cup \{\mathrm{pt}\}$ pour déduire la cohomologie à support compact de $\mathbb{R}^n$ de la cohomologie de S^n et de celle du point. (Une autre façon de calculer $\mathrm{H}^*_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{Z})$ serait la déduire de $\mathrm{H}^*_c(\mathbb{R}, \mathbb{Z})$ par la formule de Künneth.)

Exercice 6. Utiliser la décomposition $\mathbb{CP}^n = \mathbb{C}^n \sqcup \mathbb{C}^{n-1} \sqcup \cdots \sqcup \mathbb{C}^0$ pour calculer $\mathrm{H}^*(\mathbb{CP}^n, \mathbb{Z})$.

Exercice 7. Calculer l'homologie et la cohomologie cellulaires de $\mathbb{RP}^n$.

Exercice 8. On fixe un anneau de coefficients k et on considère un faisceau $\mathcal{F}$ de k-modules.

1. Montrer que $\mathrm{Hom}(k_X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$ et $\underline{\mathrm{Hom}}(k_X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}$.
2. Montrer que $H^p(X, \mathcal{F}) = \mathrm{Ext}^p(k_X, \mathcal{F})$.
3. Définir une structure de k-algèbre sur $\mathrm{H}^\bullet(X, k)$.
4. Définir une structure de $\mathrm{H}^\bullet(X, k)$-module sur $\mathrm{H}^\bullet(X, \mathcal{F})$.

Exercice 9. Étant donnée una application continue $f : X \to Y$, utiliser l'adjonction (f^*, f_*) pour définir un morphisme $R\Gamma(Y, -) \to R\Gamma(X, f^*-)$.