Dans cette feuille, $\mathcal{A}$ désignera une catégorie abélienne et $\mathcal{T}$ une catégorie triangulée.

Suites exactes

Exercice 1. (*Lemme du serpent*) Montrer que le morphisme de suites exactes de $\mathcal{A}$ suivant :

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r] \arrow[d, "u"] & B \arrow[r] \arrow[d, "v"] & C \arrow[r] \arrow[d, "w"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' & \end{tikzcd}$$

induit une suite exacte

$$\ker u \to \ker v \to \ker w \to \operatorname{coker} u \to \operatorname{coker} v \to \operatorname{coker} w.$$

Exercice 2. (*Lemme des cinq*) On considère le diagramme suivant, où les lignes sont des suites exactes dans $\mathcal{A}$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, two heads] & B \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & C \arrow[r] \arrow[d, "f"] & D \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & E \arrow[d, hook] \\ A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & D' \arrow[r] & E' \end{tikzcd}$$

Montrer que f est un isomorphisme.

Objets injectifs

Exercice 3. Soit I un objet de $\mathcal{A}$. Montrer qu'il y a équivalence entre

- le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, I)$ est exact
- toute suite exacte courte

$$0 \to I \to X \to Y \to 0$$

  est scindée.

On dit que I est *injectif*.

Exercice 4. Soit $I \in C^+(\mathcal{A})$ un complexe d'objets injectifs, borné à gauche. Montrer que si I est acyclique, alors I est homotope à zéro. Est-ce que cela reste vrai si I n'est pas borné ?

Exercice 5. Soit $X \in C^+(\mathcal{A})$. Une *résolution injective* de X est un quasi-isomorphisme $s : X \to I$. Montrer que si $t : X \to J$ est une autre résolution injective alors $I \simeq J$ dans $K(\mathcal{A})$.

Catégorie homotopique

Exercice 6. Soient M, N, P des objets de $\mathcal{A}$. Caractérisez les complexes

$$0 \to M \xrightarrow{f} N \to 0 \tag{1}$$

homotopes à zéro. Même question avec

$$0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0.$$

Plus généralement, montrer qu'un complexe homotope à 0 est somme directe de décalés de complexes de la forme (1) avec f un isomorphisme.

Exercice 7. Soit $I \in C^+(\mathcal{A})$ un complexe d'objets injectifs.

(i) Si $X \in C(\mathcal{A})$ est acyclique, montrer que tout morphisme de complexes $f : X \to I$ est homotope à zéro.

(ii) Si $Y \in C(\mathcal{A})$, montrer que tout quasi-isomorphisme $I \longrightarrow Y$ est scindé dans $K(\mathcal{A})$.

En déduire que si $\mathcal{A}$ a assez d'objets injectifs, alors le foncteur naturel $K^+(\mathrm{inj}\,\mathcal{A}) \to D^+(\mathcal{A})$ est une équivalence de catégories.

Exercice 8. Montrer que $\mathrm{H}^n(\mathrm{Hom}^\bullet_{\mathcal{A}}(X, Y)) \simeq \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X, Y[n])$.

Catégories triangulées

Exercice 9. Montrer que pour tout objet X de $\mathcal{T}$, les foncteurs $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X,-)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(-,X)$ (à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens) sont cohomologiques.

Exercice 10. Soit $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \overset{h}{\rightsquigarrow}$ un triangle distingué de $\mathcal{T}$. Montrer que le triangle est scindé (*i.e.* isomorphe à $X \to X \oplus Z \to Z \overset{0}{\rightsquigarrow}$) dans les cas suivants :

(i) $h = 0$

(ii) f se rétracte, c'est-à-dire qu'il existe $k : Y \to X$ telle que $kf = \mathrm{id}_X$.

Exercice 11. Soit $X \xrightarrow{f} Y \to Z \rightsquigarrow$ un triangle distingué de $\mathcal{T}$. Montrer que f est un isomorphisme si et seulement si $Z \simeq 0$.

Exercice 12. Soit $f : X \to Y$ un morphisme dans $\mathcal{T}$. Montrer que si f est un monomorphisme, alors il existe $Z \in \mathcal{T}$ tel que $Y \simeq X \oplus Z$, et que via cet isomorphisme, f est l'inclusion canonique.

Exercice 13. Soit $\mathcal{C}$ une sous-catégorie épaisse de $\mathcal{T}$. Soit $X \in \mathcal{T}$ tel que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathcal{C}, X) = 0$. Montrer que pour tout Y dans $\mathcal{T}$, le foncteur quotient $\mathcal{T} \to \mathcal{T}/\mathcal{C}$ induit un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y,X) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}/\mathcal{C}}(Y,X).$$

Adjonction

Exercice 14. Soient $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ et $G : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ deux foncteurs entre les catégories $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- pour $X \in \mathcal{X}$ et $Y \in \mathcal{Y}$, on a un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{Y}}(F(X), Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(X, G(Y))$$

  naturel en X et en Y.

- il existe des transformations naturelles $\epsilon : FG \to 1$ (counité) et $\eta : 1 \to GF$ (unité) telle que les compositions

$$F \xrightarrow{F\eta} FGF \xrightarrow{\epsilon F} F$$

$$G \xrightarrow{\eta G} GFG \xrightarrow{G\epsilon} G$$

  soient les transformations identité.

Dans ce cas on dit que (F, G) forment une *paire adjointe*.

Exercice 15. Soit (F, G) une paire adjointe de foncteurs. Montrer que $FG \to 1$ (resp. $1 \to GF$) est un isomorphisme si est seulement si G (resp. F) est pleinement fidèle.

Exercice 16. Soient (F, G) une paire adjointe de foncteurs entre catégories abéliennes. Montrer que G (resp. F) est exact à gauche (resp. à droite).

Exercice 17. Soient (F, G) une paire adjointe de foncteurs entre catégories triangulées. Montrer que F est triangulé si et seulement si G l'est.

Troncation

Exercice 18. Pour un complexe $X \in C(\mathcal{A})$, on définit les opération de truncation suivantes :

$$\tau_{\geq n}(X) = \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \operatorname{coker} d_{n-1} \longrightarrow X_{n+1} \longrightarrow X_{n+2} \longrightarrow \cdots$$

$$\widetilde{\tau}_{\geq n}(X) = \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \operatorname{im} d_{n-1} \longrightarrow X_n \longrightarrow X_{n+1} \longrightarrow X_{n+2} \longrightarrow \cdots$$

$$\tau_{\leq n}(X) = \cdots \longrightarrow X_{n-2} \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow \ker d_n \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

$$\widetilde{\tau}_{\leq n}(X) = \cdots \longrightarrow X_{n-2} \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow X_n \longrightarrow \operatorname{im} d_n \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

(i) Montrer que la cohomologie des complexes tronqués est donnée par

$$\mathrm{H}^k(\tau_{\geq n}(X)) = \mathrm{H}^k(\widetilde{\tau}_{\geq n}(X)) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < n \\ \mathrm{H}^k(X) & \text{si } k \geq n \end{cases}$$

$$\mathrm{H}^k(\tau_{\leq n}(X)) = \mathrm{H}^k(\widetilde{\tau}_{\leq n}(X)) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n \\ \mathrm{H}^k(X) & \text{si } k \leq n \end{cases}$$

(ii) Montrer que les flèches naturelles $\widetilde{\tau}_{\geq n}(X) \to \tau_{\geq n}(X)$ et $\tau_{\leq n}(X) \to \widetilde{\tau}_{\leq n}(X)$ sont des quasi-isomorphismes.

(iii) Montrer que l'on a des suites exactes dans $\mathcal{A}$

$$0 \to \widetilde{\tau}_{<n}(X) \to \tau_{\leq n}(X) \to \mathrm{H}^n(X)[-n] \to 0$$

$$0 \to \tau_{\leq n}(X) \to X \to \widetilde{\tau}_{>n}(X) \to 0$$

En déduire les triangles distingués associés dans $D(\mathcal{A})$.

Exercice 19. Soit $D^{\geq 0}(\mathcal{A})$ la sous-catégorie pleine de $D(\mathcal{A})$ formé des complexes X tels que $\mathrm{H}^i(X) = 0$ pour $i < 0$. On note $\iota_{\geq 0} : D^{\geq 0}(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{A})$ le plongement naturel. Montrer que $(\tau_{\geq 0}, \iota_{\geq 0})$ est une paire adjointe.

Exercice 20. Soit $X \in C(\mathcal{A})$ tel que $\mathrm{H}^i(X) = 0$ pour $i < a$ et $i > b$, avec $a < b$ fixés. Montrer que X est quasi-isomorphe à un complexe concentré en degrés $a, a+1, \ldots, b$.

Catégories dérivées

Exercice 21. Montrer que $D(\mathcal{A})$ est abélienne si et seulement si $\mathcal{A}$ est semisimple.

Exercice 22. Montrer qu'un morphisme de complexe $s : X \longrightarrow Y$ est un quasi-isomorphisme si et seulement si son cône est acyclique.

Exercice 23. Pourquoi le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Z})$ ne donne pas une notion de dualité satisfaisante sur la catégorie $\mathbb{Z}$-mod des $\mathbb{Z}$-modules de type fini ? Montrer que $\mathbb{D} = R\mathrm{Hom}^\bullet_{\mathbb{Z}}(,\mathbb{Z})$ est une auto-équivalence de $D^b(\mathbb{Z}\text{-mod})$ et calculer $\mathbb{D}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

Pour les exercices suivants on supposera que $\mathcal{A}$ a assez d'objets injectifs.

Exercice 24. Montrer que pour $X \in D(\mathcal{A})$ et $Y \in D^+(\mathcal{A})$ on a

$$\mathrm{H}^n(R\mathrm{Hom}^\bullet_{\mathcal{A}}(X, Y)) \simeq \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(X, Y[n]).$$

En déduire que pour $A, B \in \mathcal{A}$, on a

$$\mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(A, B[n]) \simeq \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}(A, B).$$

Exercice 25. Montrer que la suite exacte courte dans $\mathcal{A}$

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

est scindée si $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(C, A) = 0$. Donner une condition nécessaire et suffisante.

Exercice 26. On suppose que $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(A, B) = 0$ pour tout $i > 1$ et tous $A, B \in \mathcal{A}$. Montrer que pour $X \in C^b(A)$, on a

$$X \simeq \bigoplus \mathrm{H}^i(X)[-i]$$

dans $D^b(\mathcal{A})$. L'isomorphisme est-il canonique ?