

DEA de Mathématiques de l'Université Paris 7
2001-2002

GÉOMÉTRIE ALGÈBRE

JOSEPH LE POTIER

Université Denis Diderot-Paris 7

Chapitre 1 : Variétés algébriques	7
1. Faisceaux de groupes abéliens	7
1.1. Préfaisceaux abéliens	7
1.2. Faisceaux de groupes abéliens	10
2. Variétés algébriques	16
2.1. Espaces annelés	16
2.2. L'espace affine \mathbb{A}^n	17
2.3. Fonctions régulières	19
2.4. Variétés algébriques réduites	20
2.5. Morphismes et applications régulières	24
2.6. Variétés algébriques	31
2.7. Recollement de variétés algébriques	37
2.8. Produits	39
2.9. Séparation	42
2.10. Variétés projectives	48
2.11. Le plongement de Segre	50
2.12. La grassmannienne	51
3. Composantes irréductibles	55
4. Fonctions rationnelles	57
5. Dimension	60
5.1. Espace tangent de Zariski	60
5.2. Dimension et degré de transcendance	63
5.3. Dimension de Krull	66
6. Morphismes finis	67
7. Le lemme de Krull	76
8. Points lisses	78
9. Le théorème de Bertini	82
9.1. Dimension des fibres d'un morphisme	82
9.2. Valeurs critiques d'un morphisme	85
 Chapitre 2 : Fibrés vectoriels et faisceaux algébriques	 89
1. Fibrés vectoriels	89
1.1. Définitions	90
1.2. Fonctions de transition	93
1.3. Fibrés associés à des fibrés vectoriels donnés	94

1.4. Changement de base	95
1.5. Sous-fibrés vectoriels et fibrés quotients	96
1.6. Fibré vectoriel associé à une représentation	101
1.7. Sections transverses à la section nulle	104
2. Faisceaux localement libres	109
2.1. Faisceaux algébriques	109
2.2. Fibrés vectoriels et faisceaux localement libres	110
3. Diviseurs et fibrés inversibles	114
3.1. Fibré inversible associé à un diviseur	114
3.2. Le groupe de Picard	117
3.3. Sous-variétés de codimension ≥ 2	123
3.4. Systèmes linéaires	127
4. Faisceaux algébriques cohérents	130
4.1. Faisceau associé à un \mathbb{A} -module	130
4.2. Faisceaux algébriques cohérents	133
4.3. Image réciproque, image directe	138
4.4. Produit tensoriel et faisceaux d'homomorphismes	141
4.5. Faisceaux localement libres sur une variété affine	142
 Chapitre 3 : Cohomologie	 145
1. Foncteurs dérivés	145
1.1. Complexes de cochaînes	145
1.2. Résolutions injectives	147
1.3. Foncteurs dérivés droits	153
1.4. Foncteurs dérivés gauches	158
2. Le théorème de de Rham formel	158
2.1. Résolutions par des complexes d'objets acycliques	158
2.2. Résolutions flasques	161
2.3. Résolutions fines	163
3. Cohomologie des variétés affines	167
4. Cohomologie de Čech	170
4.1. Le théorème de Leray	170
4.2. Cohomologie de $\mathbb{A}^{n+1} - \{0\}$	175
5. Théorèmes fondamentaux	178
5.1. Annulation	178
5.2. Finitude	179
5.3. Théorèmes A et B	183
5.4. Cohérence des images directes	184

Géométrie algébrique

6. Dualité de Serre et Grothendieck	188
6.1. Le fibré canonique d'une sous-variété	189
6.2. Foncteurs cohomologiques	193
6.3. La dualité	194
6.4. Dualité de Serre	198
Chapitre 4 : La formule de Riemann-Roch	201
1. Degré des fibrés inversibles	201
2. Fibrés vectoriels de rang quelconque	207
3. Faisceaux algébriques cohérents sur les courbes	209

Joseph Le Potier

Chapitre 1

Variétés algébriques

Un corps algébriquement clos k étant donné, les variétés algébriques (réduites) sur k sont des espaces topologiques, munis d'un faisceau de fonctions dites régulières, localement isomorphes à des espaces annelés particuliers qu'on appelle les variétés algébriques affines : l'espace topologique sous-jacent est donné par le lieu des zéros communs à une famille de polynômes sur k en n variables, muni de la topologie de Zariski, et les fonctions régulières considérées sont les fonctions à valeurs dans k qui sont localement la restriction de fonctions rationnelles. On demande en outre aux variétés algébriques de satisfaire à certaines conditions de finitude et de séparation.

1. Faisceaux de groupes abéliens

On rencontre fréquemment des propriétés qui sont vraies localement, et non globalement. Par exemple, sur une variété différentielle M , une fonction différentiable f à valeurs complexes partout non nulle est localement l'exponentielle d'une fonction g ; globalement, il n'y a aucune raison. La notion de faisceau a été inventée pour rendre compte de ces propriétés locales, et retrouver à partir de ces propriétés locales des énoncés globaux.

1.1. Préfaisceaux abéliens

Soit X un espace topologique.

DÉFINITION 1.1. — *Un préfaisceau \mathcal{F} de groupes abéliens, ou préfaisceau abélien sur l'espace topologique X est la donnée*

— *pour tout ouvert $U \subset X$ d'un groupe abélien $\mathcal{F}(U)$ appelé groupe des sections du préfaisceau \mathcal{F} sur l'ouvert U ;*

— pour tout couple (U, V) d'ouverts de X tels que $V \subset U$ d'un homomorphisme dit homomorphisme de restriction

$$\rho_{V,U} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V).$$

Ces données sont astreintes aux conditions suivantes

- (i) $\mathcal{F}(\emptyset) = \{0\}$;
- (ii) pour tout triplet d'ouverts $W \subset V \subset U$ de X , on a $\rho_{W,U} = \rho_{W,V} \rho_{V,U}$;
- (iii) pour tout ouvert U de X , $\rho_{U,U} = \text{id}_{\mathcal{F}(U)}$.

Si on considère la catégorie \mathcal{U} des ouverts de X , dont les objets sont les ouverts et les flèches les morphismes d'inclusion, un préfaisceau abélien est un foncteur contravariant de \mathcal{U} à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens. Le morphisme de restriction $\rho_{V,U} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ sera souvent noté $s \mapsto s|_V$. Si \mathcal{C} est une sous-catégorie de la catégorie des ensembles, on définit plus généralement la notion de préfaisceau à valeurs dans \mathcal{C} ; il s'agit d'un foncteur contravariant à valeurs dans \mathcal{C} . Dans ce cadre, la condition (i) impose à $\mathcal{F}(\emptyset)$ d'être l'ensemble réduit à un point.

Exemples

(1) Soit G un groupe abélien ; le foncteur qui associe à tout ouvert non vide U le groupe abélien G et au vide le groupe abélien réduit à $\{0\}$ est un préfaisceau abélien, noté encore G , appelé préfaisceau constant.

(2) Soit G un groupe abélien. Le foncteur qui associe à tout ouvert U le groupe abélien $\mathcal{C}(U, G)$ des fonctions localement constantes est un préfaisceau abélien, noté \underline{G} .

(3) Si M est une variété différentiable, le foncteur $U \mapsto \mathcal{E}(U)$ qui associe à tout ouvert U de M l'algèbre fonctions différentiables à valeurs complexes est un préfaisceau en \mathbb{C} -algèbres \mathcal{E} .

(4) Si $F \rightarrow M$ est un fibré vectoriel différentiable de rang r sur une variété différentiable M , le foncteur $U \mapsto \Gamma(U, F)$ qui associe à tout ouvert U de M l'espace vectoriel des sections différentiables de F sur l'ouvert U de M est un préfaisceau de modules sur le préfaisceau \mathcal{E}_M des fonctions différentiables.

(5) Soit M une variété différentiable. Le foncteur qui associe à l'ouvert U l'espace vectoriel $H^q(U, \mathbb{R})$ est un préfaisceau en espaces vectoriels réels.

DÉFINITION 1.2. — Soient \mathcal{F} et \mathcal{G} deux préfaisceaux à valeurs dans une catégorie \mathcal{C} . Un morphisme de préfaisceaux est la donnée pour tout ouvert U d'une flèche

$$f_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$$

telle que tout couple d'ouverts (U, V) tels que $V \subset U$ le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{f_U} & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{f_V} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

dans lequel les flèches verticales sont les morphismes de restriction soit commutatif.

Dans le langage des catégories, un morphisme de préfaisceaux est simplement une transformation naturelle. Par exemple, si G est un groupe abélien, on a un morphisme canonique de préfaisceaux $G \mapsto \underline{G}$. Ce morphisme n'est pas en général un isomorphisme ; il l'est toutefois si tout ouvert non vide est connexe : on verra que c'est vrai par exemple sur une variété algébrique irréductible, pour la topologie de Zariski. Les préfaisceaux de groupes abéliens constituent une catégorie additive : ceci signifie que si \mathcal{F} et \mathcal{G} sont deux préfaisceaux abéliens, sur l'ensemble $\text{Mor}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ des morphismes de préfaisceaux on a une structure de groupe abélien et que les propriétés suivantes sont satisfaites

(i) Si \mathcal{F}, \mathcal{G} et \mathcal{H} sont trois préfaisceaux, la composition des morphismes

$$\text{Mor}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \times \text{Mor}(\mathcal{G}, \mathcal{H}) \rightarrow \text{Mor}(\mathcal{F}, \mathcal{H})$$

est bilinéaire ;

(ii) Notons 0 le préfaisceau qui associe à tout ouvert le groupe abélien réduit à $\{0\}$; alors pour tout préfaisceau \mathcal{F} , on a $\text{Mor}(\mathcal{F}, 0) = \text{Mor}(0, \mathcal{F}) = 0$.

(iii) Il existe des produits finis, ou ce qui revient au même, des sommes directes finies.

Etant donné un préfaisceau abélien \mathcal{F} , un sous-préfaisceau abélien $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ est la donnée pour tout ouvert U d'un sous-groupe abélien $\mathcal{F}'(U) \subset \mathcal{F}(U)$ tel que $\rho_{V,U}(\mathcal{F}'(U)) \subset \mathcal{F}'(V)$. Etant donné un sous-préfaisceau $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ on définit le préfaisceau quotient \mathcal{F}'' par

$$\mathcal{F}''(U) = \mathcal{F}(U)/\mathcal{F}'(U).$$

Ce préfaisceau satisfait à la propriété de quotient au sens des catégories. Etant donné un morphisme $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ de préfaisceaux, on définit de manière évidente les préfaisceaux $\ker f$, $\text{coker } f$: le noyau $\ker f$ est un sous-préfaisceau de \mathcal{F} , le conoyau est un quotient de \mathcal{G} ; ils sont caractérisés par les suite exactes, pour tout faisceau \mathcal{H} de groupes abéliens

$$0 \longrightarrow \text{Mor}(\mathcal{H}, \ker f) \longrightarrow \text{Mor}(\mathcal{H}, \mathcal{F}) \longrightarrow \text{Mor}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$$

$$0 \longrightarrow \text{Mor}(\text{coker } f, \mathcal{H}) \longrightarrow \text{Mor}(\mathcal{G}, \mathcal{H}) \longrightarrow \text{Mor}(\mathcal{F}, \mathcal{H})$$

L'image $\text{Im } f$ du morphisme f est le préfaisceau noyau du morphisme canonique $\mathcal{F} \longrightarrow \text{coker } f$. Le morphisme f induit un isomorphisme

$$\mathcal{F}/\ker f \simeq \text{Im } f.$$

On dit que la catégorie des préfaisceaux de groupes abéliens est une catégorie abélienne. La notion de suite exacte a un sens dans une telle catégorie.

1.2. Faisceaux de groupes abéliens

Les faisceaux sont des préfaisceaux particuliers : on exige que des sections locales s_i sur des ouverts U_i d'un recouvrement ouvert d'un ouvert U qui coïncident sur les intersections $U_{i,j}$ se recollent de manière unique pour donner une section s sur l'ouvert U . En d'autres termes :

DÉFINITION 1.3. — *Un préfaisceau de groupes abéliens \mathcal{F} est appelé un faisceau si pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ d'un ouvert U la 0-suite de groupes abéliens*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\alpha} \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \xrightarrow{\beta} \prod_{(i,j) \in I^2} \mathcal{F}(U_{i,j})$$

où les flèches sont définies par $\alpha(s) = s|_{U_i}$ et $\beta((s_i)_{i \in I}) = s_i|_{U_{i,j}} - s_j|_{U_{i,j}}$ est exacte.

Souvent, l'espace des sections d'un faisceau \mathcal{F} sur l'espace topologique X est noté $\Gamma(X, \mathcal{F})$. Etant donnés deux faisceaux \mathcal{F} et \mathcal{G} de groupes abéliens, un morphisme de faisceaux $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ est par définition un morphisme des préfaisceaux sous-jacents.

Exemples

Parmi les exemples de préfaisceaux donnés ci-dessus, (2),(3), (4) sont des faisceaux ; (1) et (5) ne le sont pas en général. Si $f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ est un morphisme de faisceaux abéliens, le préfaisceau $\ker f$ est un faisceau, mais le conoyau et l'image ne le sont pas en général. Considérons par exemple sur une variété topologique X le faisceau \mathcal{C} des fonctions continues $U \mapsto \mathcal{C}(U)$ à valeurs complexes et le faisceau \mathcal{C}^* des fonctions continues $U \mapsto \mathcal{C}(U)^*$ des fonctions continues inversibles. Considérons le morphisme de faisceaux de groupes abéliens donné par l'application exponentielle $\exp : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^*$. Le préfaisceau conoyau $\mathcal{Q} = \text{coker } \exp$ est nul pour les ouverts simplement connexes ; par contre, en général, l'application $\mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathcal{C}^*(X)$ n'est surjective. Par suite, \mathcal{Q} n'est pas un faisceau.

Faisceau associé à un préfaisceau.

Soit \mathcal{F} un préfaisceau de groupes abéliens. On va construire un faisceau \mathcal{F}^+ et un morphisme de préfaisceaux abéliens $j : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^+$ satisfaisant à la propriété suivante : pour faisceau \mathcal{G} , tout morphisme de préfaisceaux abéliens $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G}$ se factorise de manière unique suivant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & & \\ \downarrow & \searrow f & \\ \mathcal{F}^+ & \xrightarrow{f^+} & \mathcal{G} \end{array}$$

Pour construire \mathcal{F}^+ , on considère pour tout point $x \in X$ le groupe abélien \mathcal{F}_x des germes de sections de \mathcal{F} au point x : il est défini par la limite inductive

$$\mathcal{F}_x = \varinjlim_{U, x \in U} \mathcal{F}(U)$$

Ce groupe est le quotient de $\coprod_{U, x \in U} \mathcal{F}(U)$ par la relation d'équivalence qui identifie $a \in \mathcal{F}(U)$ et $b \in \mathcal{F}(V)$ s'il existe un voisinage ouvert $W \subset U \cap V$ de x tel que $a|_W = b|_W$. Si U est un voisinage ouvert du point x , et $s \in \mathcal{F}(U)$, on désigne par s_x sa classe dans \mathcal{F}_x : c'est le germe de s au point x .

On considère pour tout ouvert U de X le groupe $\mathcal{F}^+(U)$ des familles de germes $(s_x)_{x \in U}$ satisfaisant à la condition suivante : pour tout $x \in U$, il existe un voisinage ouvert $V \subset U$ de x et une section $t \in \mathcal{F}(V)$ tels que $t_y = s_y$ pour tout point $y \in V$.

LEMME 1.4. — *Le préfaisceau $U \mapsto \mathcal{F}^+(U)$ est un faisceau abélien.*

Démonstration. Considérons la projection naturelle

$$p : \text{Et}(\mathcal{F}) = \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \longrightarrow X$$

Une section $s \in \mathcal{F}(U)$ définit une section \underline{s} de $\text{Et}(\mathcal{F})$ au-dessus de l'ouvert U . Les ensembles $\underline{s}(U)$ constituent une base d'ouverts d'une topologie sur $\text{Et}(\mathcal{F})$; pour cette topologie, les sections \underline{s} deviennent des homéomorphismes. On dit que $\text{Et}(\mathcal{F})$ est l'espace étalé associé à \mathcal{F} . L'ensemble $\mathcal{F}^+(U)$ est exactement l'ensemble des sections continues sur l'ouvert U de $p : \text{Et}(\mathcal{F}) \longrightarrow X$. Par suite, c'est un faisceau de groupes abéliens. \square

On dispose maintenant d'un morphisme $j : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^+$ qui associe à la section s au-dessus de l'ouvert U la section \underline{s} . La construction est fonctorielle : un morphisme $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$

de préfaisceaux de groupes abéliens fournit un morphisme de faisceaux $f^+ : \mathcal{F}^+ \longrightarrow \mathcal{G}^+$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{f} & \mathcal{G} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}^+ & \xrightarrow{f^+} & \mathcal{G}^+ \end{array}$$

Pour obtenir la propriété universelle, il suffit de constater que si \mathcal{G} est déjà un faisceau, alors $\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}^+$ est un isomorphisme. Montrons d'abord que $\mathcal{G}(U) \longrightarrow \mathcal{G}^+(U)$ est injective. Si $s \in \mathcal{G}(U)$ s'annule dans $\mathcal{G}^+(U)$, il existe un recouvrement de U par des ouverts U_i tels que $s|_{U_i} = 0$. Alors d'après la définition des faisceaux $s = 0$. Montrons maintenant la surjectivité : si $s \in \mathcal{G}^+(U)$, il existe un recouvrement ouvert de U par des ouverts U_i et des sections $s_i \in \mathcal{G}(U_i)$ telles que $s|_{U_i} = \underline{s}_i$. Alors sur $U_{i,j}$ on a $\underline{s}_i|_{U_{i,j}} = \underline{s}_j|_{U_{i,j}}$. D'après l'unicité, $s_i|_{U_{i,j}} = s_j|_{U_{i,j}}$. Donc les sections s_i se recollent en section $t \in \mathcal{G}(U)$ et on a évidemment $\underline{t} = s$ puisque c'est vrai sur les ouverts U_i . Reste à vérifier l'unicité de f^+ . Si s est une section de $\mathcal{F}^+(U)$, et U_i un recouvrement ouvert sur lequel on dispose de sections locales $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ telles que $s|_{U_i} = \underline{s}_i$ la commutativité du diagramme implique $f^+(s)|_{U_i} = f(s_i)$ ce qui détermine $f^+(s)$.

Exercice 1.1

Vérifier que pour tout $x \in X$, $\mathcal{F}_x^+ = \mathcal{F}_x$.

Exemples

1. Soit G un groupe abélien. Le faisceau associé au préfaisceau constant G est le faisceau \underline{G} qui sera appelé faisceau constant.

2. Sur une variété différentiable M , pour $q > 0$ le faisceau associé au préfaisceau $U \mapsto H_{\text{DR}}^q(U)$ est le faisceau nul.

3. Un sous-faisceau \mathcal{F}' d'un faisceau abélien \mathcal{F} est un sous-préfaisceau abélien qui est un faisceau. Le faisceau quotient \mathcal{F}/\mathcal{F}' est défini par le faisceau associé au préfaisceau $U \mapsto \mathcal{F}(U)/\mathcal{F}'(U)$.

3. Plus généralement, si $f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ est un morphisme de faisceaux abéliens, le faisceau $\mathcal{Q} = (\text{coker } f)^+$ est appelé conoyau dans la catégorie des faisceaux abéliens. Pour tout faisceau de groupes abéliens \mathcal{H} on a une suite exacte de groupes abéliens

$$0 \longrightarrow \text{Mor}(\mathcal{Q}, \mathcal{H}) \longrightarrow \text{Mor}(\mathcal{G}, \mathcal{H}) \longrightarrow \text{Mor}(\mathcal{F}, \mathcal{H})$$

Le faisceau image de f , noté $\text{Im } f$, est le noyau du morphisme canonique $\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{Q}$ et on a encore un isomorphisme de faisceaux

$$\mathcal{F}/\ker f \simeq \text{Im } f;$$

ceci résulte du lemme suivant :

LEMME 1.5. — *Soit $f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ un morphisme de faisceaux abéliens. On suppose que pour tout $x \in X$ le morphisme induit*

$$f_x : \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x$$

est un isomorphisme. Alors f est un isomorphisme.

Démonstration. Il s'agit de montrer que pour tout ouvert U de X , l'homomorphisme de groupes abéliens $\mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ est un isomorphisme.

1. Injectivité : soit $s \in \mathcal{F}(U)$ une section sur U dont l'image dans $\mathcal{G}(U)$ est nulle. Alors pour tout $x \in X$ le germe $f_x(s_x)$ est nul et donc $s_x = 0$. Ceci entraîne qu'il existe un recouvrement ouvert U_i de X tel que $s|_{U_i}$; d'après la définition des faisceaux ceci implique $s = 0$.

2. Surjectivité : considérons une section $t \in \mathcal{G}(U)$. Il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (U_i)$ de l'ouvert U et des sections locales $s_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{F})$ telles que $f(s_i) = t|_{U_i}$. Sur l'intersection $U_{i,j}$ on a d'après l'injectivité, on a $s_i|_{U_{i,j}} = s_j|_{U_{i,j}}$. D'après la définition des faisceaux, on peut alors trouver une section $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ telle que $s|_{U_i} = s_i$. On a alors $f(s)|_{U_i} = t|_{U_i}$ sur chaque ouvert U_i ce qui entraîne $f(s) = t$. \square

Ainsi, les faisceaux de groupes abéliens constituent encore une catégorie abélienne. Il en est de même de la catégorie des faisceaux de modules sur un faisceau d'algèbres donné.

DÉFINITION 1.6. — *Soit $\mathcal{F}' \xrightarrow{f} \mathcal{F} \xrightarrow{g} \mathcal{F}''$ deux morphismes de faisceaux de groupes abéliens. On dit que cette suite est exacte si les faisceaux $\text{Im } f$ et $\ker f$ coïncident.*

Il revient au même de demander que pour tout $x \in X$ la suite de groupes abéliens

$$\mathcal{F}'_x \xrightarrow{f_x} \mathcal{F}_x \xrightarrow{g_x} \mathcal{F}''_x$$

est exacte.

Exemple

Soit X une variété analytique complexe, Ω_X^p le faisceau (d'espaces vectoriels) des p -formes différentielles holomorphes sur X : il s'agit du faisceau des sections holomorphes du fibré $\wedge^p T^*(X)$ des p -covecteurs. La différentielle extérieure

$$d : \Omega_X^p \longrightarrow \Omega_X^{p+1}$$

est un morphisme \mathbb{C} -linéaire caractérisé par les propriétés suivantes :

- (1) $d^2 = 0$
- (2) Pour $\alpha \in \Omega_U^p$ et $\beta \in \Omega^q(U)$ on a $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$
- (3) Si f est une fonction holomorphe sur un ouvert U , la forme différentielle df est la différentielle au sens habituel.

Soit \mathcal{O}_X le faisceau des fonctions holomorphes sur X .

LEMME 1.7. — (Poincaré) On a une suite exacte de faisceaux d'espaces vectoriels sur X

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{d} \Omega_X^1 \xrightarrow{d} \dots \longrightarrow \Omega_X^n \longrightarrow 0$$

En fait, le lemme de Poincaré est un peu plus fort : il affirme que si U est un ouvert isomorphe à une boule de \mathbb{C}^n , le complexe $\Gamma(U, \Omega_X^i)$ des sections sur l'ouvert U est exact en degré > 0 . Le noyau de la première différentielle est évidemment l'espace vectoriel des fonctions constantes sur U , isomorphe à \mathbb{C} .

REMARQUE 1.8. — Il arrive souvent qu'on dispose d'une base \mathcal{B} d'ouverts de X . La donnée d'un foncteur contravariant de \mathcal{B} à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens satisfaisant, pour les ouverts de la base, aux conditions de recollement demandées aux faisceaux dans la définition 1.3 suffit pour reconstruire, de manière unique un faisceau abélien.

DÉFINITION 1.9. — Si \mathcal{F} est un faisceau abélien, l'ensemble des points $x \in X$ tels que $\mathcal{F}_x \neq 0$ s'appelle le support de \mathcal{F} .

Images directes, image réciproques

Soient X et Y deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. Etant donné un faisceau abélien \mathcal{F} sur X , le préfaisceau qui associe à un ouvert V de Y le groupe abélien $\mathcal{F}(f^{-1}(V))$ est un faisceau abélien. Ce faisceau est appelé l'image

directe de \mathcal{F} par l'application continue f . Si x est un point de X , et $y = f(x)$, on a un homomorphisme des groupes de germes de sections

$$f_*(\mathcal{F})_y \longrightarrow \mathcal{F}_x$$

Ce morphisme n'a aucune raison d'être un isomorphisme.

Considérons maintenant un faisceau abélien \mathcal{G} sur Y ; on considère le préfaisceau abélien sur X défini de la manière suivante : à l'ouvert U de X on associe le groupe abélien

$$\varinjlim_{V, f(U) \subset V} \mathcal{G}(V)$$

Avec les morphismes de restriction évidents, on obtient ainsi un préfaisceau abélien sur X n'est pas en général un faisceau abélien. Le faisceau abélien associé s'appelle le faisceau abélien image réciproque de \mathcal{G} . Il est noté $f^{-1}(\mathcal{G})$. L'homomorphisme canonique de groupes abéliens

$$(f^{-1}(\mathcal{G}))_x \longrightarrow \mathcal{G}_{f(x)}$$

est un isomorphisme.

Dans le cas particulier d'une inclusion d'un sous-espace topologique $X \subset Y$, le faisceau abélien image réciproque $i^{-1}(\mathcal{G})$ par l'inclusion canonique $i : X \hookrightarrow Y$ est appelé la restriction de \mathcal{G} à X , et noté $\mathcal{G}|_X$. Dans le cas où X est un ouvert de Y , c'est le préfaisceau abélien qui associe à tout ouvert $U \subset X$ le groupe abélien $\mathcal{G}(U)$.

Exercice 1.2

Trouver un exemple montrant que le préfaisceau qu'on vient de définir n'est pas toujours un faisceau (prendre pour Y un point!).

Exercice 1.3

Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue, \mathcal{F} et \mathcal{G} des faisceaux abéliens sur Y et X respectivement.

- (1) Montrer que l'on a un isomorphisme canonique de groupes abéliens

$$\mathrm{Hom}(f^{-1}(\mathcal{F}), \mathcal{G}) \simeq \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, f_*(\mathcal{G})).$$

- (2) En déduire des morphismes canoniques $\mathcal{G} \longrightarrow f_*(f^{-1}(\mathcal{G}))$ et $f^{-1}(f_*(\mathcal{F})) \longrightarrow \mathcal{F}$.

Exemple : On peut faire la même chose pour des faisceaux en algèbres. Considérons par exemples deux espaces topologiques X et Y et désignons par \mathcal{C}_X (resp. \mathcal{C}_Y) le faisceau sur X (resp. Y) des fonctions continues à valeurs complexes. Ces faisceaux sont des faisceaux en \mathbb{C} -algèbres. A toute application continue $f : X \longrightarrow Y$ est associé un morphisme de faisceaux en algèbres $f^* : \mathcal{C}_Y \longrightarrow f_*(\mathcal{C}_X)$ qui associe à la fonction continue u sur l'ouvert V de Y la fonction continue $f^*(u) = u \circ f$. Ce morphisme peut se voir aussi comme un morphisme de faisceaux en \mathbb{C} -algèbres $f^{-1}(\mathcal{C}_Y) \longrightarrow \mathcal{C}_X$.

Exercice 1.4

Soient $X \longrightarrow Y$ un sous-espace topologique fermé d'un espace topologique Y et $i : X \hookrightarrow Y$ l'inclusion canonique. Soient \mathcal{F} et \mathcal{G} des faisceaux abéliens sur X et Y respectivement. Montrer que le morphisme $f^{-1}f_*\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ est un isomorphisme. Montrer que le morphisme $\mathcal{G} \longrightarrow f_*(f^{-1}(\mathcal{G}))$ n'est pas en général un isomorphisme.

2. Variétés algébriques

Sur une variété différentiable, on définit l'algèbre des fonctions différentiables à valeurs réelles. Cette algèbre détermine en fait la variété différentiable. En géométrie algébrique, ce qui joue le rôle de fonctions différentiables, au moins pour les variétés algébriques réduites, ce sont les fonctions régulières. On obtient ainsi une algèbre. Cette algèbre ne permet pas de caractériser une variété algébrique en général car il n'y en a pas assez ; par exemple, sur l'espace projectif, les seules fonctions régulières sont les constantes. On se doit d'introduire le faisceau des fonctions régulières. Pourtant dans le cas des variétés algébriques affines l'algèbre des fonctions régulières globales suffit pour les caractériser. Dans tout le cours, k désigne un corps algébriquement clos.

2.1. Espaces annelés

DÉFINITION 2.1. — *Un espace annelé en k -algèbres est un couple (X, \mathcal{O}_X) formé d'un espace topologique X et d'un faisceau en k -algèbres (commutatives et unitaires) sur X , appelé faisceau structural.*

Un morphisme d'espaces annelés en k -algèbres $(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ est un couple (f, ϕ) formé d'une application continue f et d'un homomorphisme de faisceaux de k -algèbres

$$\phi : \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*(\mathcal{O}_X)$$

On peut composer les morphismes d'espaces annelés ; on obtient ainsi une catégorie ; la notion d'isomorphisme d'espaces annelés en k -algèbres a donc un sens. Si U est un ouvert de X , il sera muni obligatoirement du faisceau en algèbres $\mathcal{O}_U = \mathcal{O}_X|_U$, ce qui permet de le considérer comme un espace annelé. Etant donné un espace annelé (X, \mathcal{O}_X) un \mathcal{O}_X -module \mathcal{F} est la donnée d'un faisceau de k -espaces vectoriels \mathcal{F} et pour chaque ouvert U de X d'une structure de $\mathcal{O}_X(U)$ -module sur $\mathcal{F}(U)$ tel que pour $V \subset U$ les homomorphismes de restriction

$$\mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$$

soient compatibles avec ces structures de modules.

Un homomorphisme de \mathcal{O}_X -modules $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ est un morphisme de faisceaux de k -espaces vectoriels tel que pour tout ouvert U l'application $\mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ soit $\mathcal{O}_X(U)$ -linéaire. Les morphismes de \mathcal{O}_X -modules se composent : on obtient ainsi une catégorie abélienne. Le groupe abélien des homomorphismes de \mathcal{O}_X -modules, souvent noté $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ ou $\text{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ s'il n'y a pas risque de confusion, est alors muni d'une structure de $\mathcal{O}(X)$ -module.

Les sous-modules de \mathcal{O}_X s'appellent des idéaux.

Images directes et images réciproques

Soit $(f, \phi) : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ un morphisme d'espaces annelés. Si \mathcal{F} est un \mathcal{O}_X -module, l'image directe est muni d'une structure de \mathcal{O}_Y -module. Si \mathcal{G} est un \mathcal{O}_Y -module, le faisceau $f^*(\mathcal{G}) = f^{-1}(\mathcal{G}) \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}_Y)} \mathcal{O}_X$ est un \mathcal{O}_X -module appelé image réciproque de \mathcal{G} . On a encore un isomorphisme

$$\text{Hom}_Y(\mathcal{G}, f_*(\mathcal{F})) = \text{Hom}_X(f^*(\mathcal{G}), \mathcal{F})$$

fonctoriel en \mathcal{F} et \mathcal{G} , ce qu'on énonce en disant que le foncteur f_* est l'adjoint à droite du foncteur f^* . Il en résulte en particulier des morphismes naturels $\mathcal{G} \longrightarrow f_*f^*(\mathcal{G})$ et $f^*f_*(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{F}$ qui en général ne sont pas des isomorphismes.

2.2. L'espace affine \mathbb{A}^n

On va munir k^n d'une topologie, appelée topologie de Zariski, et d'un faisceau en k -algèbres, appelé l'algèbre des fonctions régulières. L'espace annelé ainsi obtenu s'appellera l'espace affine ; il est noté habituellement \mathbb{A}^n . On note $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ l'algèbre des polynômes sur k^n .

DÉFINITION 2.2. — On appelle fermé algébrique de \mathbb{A}^n une partie de l'espace affine \mathbb{A}^n définie par l'annulation d'une famille de polynômes.

Si $S \subset \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ est une telle famille l'ensemble des zéros communs à ces polynômes est aussi l'ensemble des zéros de l'idéal engendré par S : l'anneau des polynômes étant noethérien, un tel fermé est toujours défini par un nombre fini de telles équations. Etant donné un idéal $I \subset \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ on note $V(I)$ le lieu des zéros communs aux éléments de I . L'application $I \mapsto V(I)$ de l'ensemble des idéaux de $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ dans l'ensemble des fermés algébriques est décroissante.

Les fermés algébriques définissent sur \mathbb{A}^n une topologie qu'on appelle la topologie de Zariski ; ceci résulte des remarques suivantes :

- si I_α est une famille d'idéaux, $V(\sum_\alpha I_\alpha) = \cap_\alpha V(I_\alpha)$;
- Si I et J sont deux idéaux, $V(I) \cup V(J) = V(IJ)$
- $V(1) = \emptyset$; $V(0) = k^n$

La topologie de Zariski sur \mathbb{A}^n est une topologie non séparée.

DÉFINITION 2.3. — *Un espace topologique est noethérien si toute suite décroissante de fermés est stationnaire.*

PROPOSITION 2.4. — *L'espace topologique \mathbb{A}^n muni de la topologie de Zariski, est noethérien.*

Démonstration. Ceci résulte de la remarque suivante : si Y est un fermé de \mathbb{A}^n et $I(Y)$ l'idéal des polynômes qui s'annulent sur Y , on a $V(I(Y)) = Y$.

Soit Y_m une suite décroissante de fermés. Alors la suite d'idéaux de $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ est croissante, et comme l'anneau $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ est noethérien, cette suite est stationnaire. Il en résulte que la suite Y_m est elle-même stationnaire. \square

PROPOSITION 2.5. — *Toute partie de \mathbb{A}^n est quasi-compacte pour la topologie de Zariski.*

Ceci signifie que de tout recouvrement ouvert, on peut extraire un recouvrement fini. Cet énoncé résulte en fait d'un énoncé plus général :

PROPOSITION 2.6. — *Soit X un espace topologique noethérien. Alors*

- (i) *Toute partie $Y \subset X$ est un espace topologique noethérien.*
- (ii) *Tout espace topologique noethérien est quasi-compact.*

Démonstration. Commençons par un lemme souvent utile dont nous laissons la démonstration au lecteur.

LEMME 2.7. — *Soit X un ensemble ordonné. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Toute partie non vide de E a un élément maximal ;*
- (ii) *Toute suite croissante d'éléments de E est stationnaire.*

Démonstration de la proposition 2.6 : l'assertion (i) est évidente. Montrons (ii). Il s'agit de montrer qu'étant donnée une famille $(F_i)_{i \in I}$ de fermés de X non vides l'intersection $F = \cap_i F_i$ est non vide. On peut évidemment supposer que cette famille est stable par intersection finie. Puisque X est noethérien, dans cette famille il existe un élément minimal F_m , et on a alors pour tout $i \in I$

$$F_i \cap F_m = F_m$$

par suite $F_m \subset F_i$. Mais alors $F = F_m$ et cette intersection est non vide par hypothèse. \square

2.3. Fonctions régulières

Une partie $X \subset \mathbb{A}^n$ est dite localement fermée si elle est l'intersection d'un ouvert et d'un fermé. Une telle partie sera munie de la topologie induite.

DÉFINITION 2.8. — Soient $X \subset \mathbb{A}^n$ une partie localement fermée. Une fonction $f : X \longrightarrow k$ est dite régulière si pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert $V \subset X$ et une fonction rationnelle $\frac{P}{Q}$ partout définie sur V telle que

$$f|_V = \frac{P}{Q}|_V$$

Les fonctions régulières sur X constituent une sous-algèbre, notée $\mathcal{O}(X)$, de l'algèbre des fonctions continues sur X . En particulier, en associant à chaque ouvert U de X l'algèbre $\mathcal{O}(U)$ des fonctions régulières sur U , on obtient un faisceau en k -algèbres commutatives et unitaires sur X , noté \mathcal{O}_X , qu'on appelle le faisceau des fonctions régulières sur X ; c'est un sous-faisceau du faisceau (en algèbres) des fonctions continues à valeurs dans k . Dans le cas des fermés algébriques de \mathbb{A}^n , les fonctions régulières sont particulièrement simples :

PROPOSITION 2.9. — Soit X un fermé algébrique de \mathbb{A}^n . Toute fonction régulière $f : X \longrightarrow k$ est la restriction à X d'un polynôme. En particulier, l'algèbre des fonctions régulières sur X est isomorphe à l'algèbre quotient $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)/I$ de l'algèbre des polynômes par l'idéal I des polynômes qui s'annulent sur X .

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{O}(X)$. Pour tout point $x \in X$, on peut trouver un voisinage ouvert V_x de x dans X et des polynômes P_x et Q_x tels que Q_x soit non nul en x et tels que sur V_x on ait

$$fQ_x|_{V_x} = P_x|_{V_x}. \quad (1)$$

D'autre part, on peut trouver un polynôme non nul en x et qui s'annule sur le fermé $X \setminus V_x$, de sorte qu'en multipliant (1) par cette fonction, on peut toujours supposer que l'égalité

$$fQ_x|_X = P_x|_X \quad (2)$$

est vraie sur X . Soit I l'idéal de $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ des polynômes qui s'annulent sur X . Considérons l'idéal J engendré par les polynômes Q_x . Ces polynômes n'ont pas de zéros en communs sur X . Par suite, l'idéal $I + J$ n'a pas de zéro sur \mathbb{A}^n . Or, on dispose du "petit" théorème des zéros de Hilbert :

THÉORÈME 2.10. — Soit \mathfrak{m} un idéal maximal de $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$. Alors \mathfrak{m} est l'idéal des polynômes qui s'annulent en un point $x \in \mathbb{A}^n$.

Il en résulte que $I + J = (1)$. Ceci signifie qu'il existe des points $x_1, \dots, x_\ell \in X$ et des polynômes R_1, \dots, R_ℓ tels que

$$\sum_{i=1}^{\ell} R_i Q_{x_i} \equiv 1 \pmod{I}.$$

Il en résulte que dans $\mathcal{O}(X)$

$$f = \sum_{i=1}^{\ell} R_i P_{x_i}|_X$$

ce qui prouve que f est la restriction à X d'un polynôme. \square

2.4. Variétés algébriques réduites

Dans cette section et la suivante, les variétés considérées seront supposées réduites. Les variétés algébriques non obligatoirement réduites seront introduites dans la section 2.6.

DÉFINITION 2.11. — Une variété algébrique affine réduite sur k est un espace annelé en k -algèbres (X, \mathcal{O}_X) isomorphe à l'espace annelé défini par un fermé algébrique d'un espace affine, muni du faisceau des fonctions régulières.

On oubliera souvent dans les notations le faisceau structural. Comme dans le cas des fermés algébriques de l'espace affine \mathbb{A}^n , ce faisceau structural peut être vu comme sous-faisceau du faisceau sur X des fonctions continues à valeurs dans k . Une telle fonction $U \rightarrow k$ sera encore dite régulière. L'algèbre $\mathcal{O}_{X,x}$ des germes au point $x \in X$ de fonctions régulières est un anneau local, dont l'idéal maximal en x est l'idéal des germes de fonctions régulières qui s'annulent en x . En effet, le complémentaire de cet idéal est formé de germes de fonctions régulières non nulles en x , et ces fonctions régulières sont inversibles au voisinage de x ; donc leur germe est inversible en x . Cette propriété n'est pas en général satisfaite pour les espaces annelés en k -algèbres quelconques.

DÉFINITION 2.12. — Une variété algébrique réduite sur k est un espace annelé (X, \mathcal{O}_X) satisfaisant aux conditions suivantes

- tout point $x \in X$ a un voisinage ouvert affine ;
- l'espace topologique sous-jacent X est noethérien.

Dans la pratique on ajoutera une condition dite de séparation qui sera décrite plus tard. L'espace topologique X est noethérien si et seulement si on peut recouvrir X par un nombre fini d'ouverts affines. On dit aussi que X est de type fini. Ici encore, le faisceau \mathcal{O}_X se plonge dans le faisceau des fonctions continues à valeurs dans k . Les fonctions ainsi obtenues s'appellent des fonctions régulières.

DÉFINITION 2.13. — *Un morphisme de variétés algébriques est un morphisme des espaces annelés sous-jacents.*

Soient X et Y deux variétés algébriques. Une application continue $f : X \longrightarrow Y$ est appelée régulière si pour toute fonction régulière $u : V \longrightarrow k$ sur un ouvert V de Y l'application $f^*(u) = u \circ f$ définie sur $f^{-1}(V)$ est régulière. Si Y est un fermé algébrique d'un espace affine \mathbb{A}^p , cela signifie simplement que les composantes f_i ($i = 1, \dots, p$) de f sont des fonctions régulières sur X .

Une telle application régulière définit un morphisme de faisceaux en k -algèbres $f^* : \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*(\mathcal{O}_X)$ et par suite un morphisme d'espaces annelés

$$(f, f^*) : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y).$$

On verra dans la section 2.5 qu'en fait, dans les cas de variétés algébriques réduites, tout morphisme d'espaces annelés $(f, \phi) : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ est de cette forme. Une application régulière $f : X \longrightarrow Y$ est un isomorphisme si f est inversible et si f et f^{-1} sont des applications régulières. Il revient au même de dire que le morphisme d'espaces annelés associés est un isomorphisme. On dit aussi que f est birégulière.

PROPOSITION 2.14. — *Les ouverts et les fermés d'une variété algébrique héritent d'une structure de variété algébrique.*

Démonstration. Commençons par les ouverts. Cela résulte du lemme suivant :

LEMME 2.15. — *Toute variété algébrique X a une base d'ouverts affines.*

Démonstration. Il suffit de le démontrer pour un fermé algébrique de \mathbb{A}^n . On doit se convaincre que tout ouvert U d'un fermé algébrique Y de \mathbb{A}^n peut être recouvert par des ouverts affines. Or, le complémentaire de U est défini dans le fermé Y par l'annulation d'un nombre fini de polynômes (P_1, \dots, P_k) . Considérons l'ouvert U_i de Y défini par $P_i \neq 0$. On a

$$U = \cup_{i=1}^k U_i.$$

Il suffit donc de vérifier que si f est une fonction régulière sur Y , l'ouvert Y_f des points de Y où f ne s'annule pas est isomorphe à un fermé algébrique affine. Mais l'application $Y_f \longrightarrow Y \times \mathbb{A}^1$ définie par

$$x \mapsto \left(x, \frac{1}{f(x)}\right)$$

est un isomorphisme de Y_f sur le fermé algébrique de $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^1$ défini par les couples (x, y) tels que $f(x)y = 1$. Ainsi, Y_f est isomorphe à un fermé algébrique de \mathbb{A}^{n+1} . \square

D'après la proposition 2.6 tout sous-espace de X est noethérien, ce qui démontre que l'espace annelé (U, \mathcal{O}_U) est une variété algébrique.

Venons-en aux fermés. Si Y est un fermé de la variété algébrique X , on le munit du faisceau structural \mathcal{O}_Y obtenu comme image de $\mathcal{O}_X|_Y$ dans le faisceau des fonctions continues \mathcal{C}_Y sur Y par le morphisme de restriction $\mathcal{O}_X|_Y \longrightarrow \mathcal{C}_Y$. On peut aussi le décrire en introduisant le faisceaux d'idéaux $\mathcal{J}_Y \subset \mathcal{O}_X$ des fonctions régulières s'annulant sur Y : ce faisceau est canoniquement isomorphe au faisceau quotient $\mathcal{O}_X/\mathcal{J}_Y|_Y$. Si U un voisinage ouvert affine de $x \in Y$ dans X , l'intersection $Y \cap U$ est un fermé d'une variété algébrique affine, sur lequel le faisceau des fonctions régulières a déjà un sens. De plus, il résulte de la proposition 2.21 que si le morphisme de restriction

$$\mathcal{O}_X(U') \longrightarrow \mathcal{O}_{Y \cap U}(Y \cap U')$$

est surjectif pour tout ouvert affine $U' \subset U$. Il en résulte le faisceau $\mathcal{O}_Y|_U$ coïncide avec le faisceau des fonctions régulières sur $Y \cap U$, vu comme fermé algébrique de la variété affine U . Ainsi, tout fermé Y d'une variété algébrique X hérite d'une structure de variété algébrique. \square

Un ouvert d'une variété algébrique affine n'est pas en général affine. Nous allons par exemple montrer que l'ouvert $U = \mathbb{A}^2 - \{0\}$ n'est pas affine.

PROPOSITION 2.16. — *Soient X une variété algébrique affine réduite, et $A = \mathcal{O}(X)$ l'algèbre des fonctions régulières sur X . Soit $\text{Spec}(A)$ l'ensemble des idéaux maximaux de A . L'application $X \longrightarrow \text{Spec } A$ qui associe au point $x \in X$ l'idéal \mathfrak{m}_x des fonctions régulières s'annulant en x est bijective.*

Cet énoncé est évident pour un fermé algébrique de \mathbb{A}^n : la seule difficulté est la surjectivité ; on a déjà vu que c'est une conséquence du théorème des zéros de Hilbert (cf. proposition 2.10).

Variétés algébriques

Considérons l'ouvert $U = \mathbb{A}^2 - \{0\}$ et l'algèbre $\mathcal{O}(U)$ des fonctions régulières sur U .
Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \text{Spec}(\mathcal{O}(U)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{A}^2 & \longrightarrow & \text{Spec}(\mathcal{O}(\mathbb{A}^2)) \end{array}$$

dans lequel les flèches horizontales associent à un point l'idéal maximal des fonctions régulières s'annulant en ce point. La première flèche horizontale est bien injective. Mais elle n'est pas surjective : en effet, il est facile de constater que le morphisme de restriction $\mathcal{O}(\mathbb{A}^2) \longrightarrow \mathcal{O}(U)$ est un isomorphisme. Puisque $U \longrightarrow \mathbb{A}^2$ n'est pas surjective, il en est de même de la flèche $U \longrightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}(U))$. Donc U n'est pas une variété algébrique affine.

L'espace projectif \mathbb{P}_n

Considérons le quotient $\mathbb{P}_n = \mathbb{A}^{n+1} - \{0\}/k^*$. Ce quotient, appelé espace projectif de dimension n , s'identifie à l'ensemble des droites vectorielles de k^{n+1} ; on le munit de la topologie quotient de la topologie de Zariski par la projection canonique

$$\pi : \mathbb{A}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}_n.$$

Traditionnellement, on note $[x]$ la classe d'un point $x \in k^{n+1} \setminus \{0\}$. On équipe \mathbb{P}_n du sous-faisceau en k -algèbres $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n} = \pi_*(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n+1}-\{0\}})^{k^*}$ des fonctions régulières k^* -invariantes.

LEMME 2.17. — *L'espace annelé $(\mathbb{P}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n})$ est une variété algébrique.*

Démonstration. Montrons qu'on peut recouvrir \mathbb{P}_n par des ouverts affines. Désignons par A_i le sous-espace affine de \mathbb{A}^{n+1} des points $x = (x_0, \dots, x_n)$ tels que $x_i = 1$, et considérons l'ouvert U_i de \mathbb{P}_n défini par les points $[x]$ tels que $x_i \neq 0$. On considère les homéomorphismes $\alpha_i : U_i \longrightarrow A_i$ définis par $\varphi_i([x]) = \frac{x}{x_i}$. Si f est une fonction régulière sur un ouvert V de A_i , la fonction $\alpha_i^*(f)$ est une fonction régulière sur l'ouvert $\alpha_i^{-1}(V)$; on obtient ainsi un morphisme de faisceaux en k -algèbres $\mathcal{O}_{A_i} \longrightarrow \alpha_{i*}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}|_{U_i})$ qui est un isomorphisme. On obtient ainsi un isomorphisme d'espaces annelés

$$(\alpha_i, \alpha_i^*) : (U_i, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}|_{U_i}) \xrightarrow{\sim} (A_i, \mathcal{O}_{A_i})$$

Ainsi, l'espace annelé $(\mathbb{P}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n})$ est recouvert par les ouverts affines U_i . Ces ouverts étant en nombre fini, l'espace projectif \mathbb{P}_n est trivialement noethérien. \square

Exercice 2.1 Montrer que cette variété algébrique réduite n'est pas affine.

2.5. Morphismes et applications régulières

On a vu que les faisceaux structuraux des variétés réduites étaient des faisceaux de fonctions continues. On se propose de montrer que tout morphisme de variétés algébriques réduites $(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ est de la forme (f, f^*) , où f^* désigne le morphisme qui associe à la fonction régulière u sur l'ouvert V de Y la fonction régulière $f^*(u) = u \circ f$ sur l'ouvert $f^{-1}(V)$. En particulier, un tel morphisme est déterminé par l'application continue $f : X \longrightarrow Y$ sous-jacente à un tel morphisme.

THÉORÈME 2.18. — *Soient X et Y deux variétés algébriques réduites et*

$$(f, \phi) : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$$

un morphisme de variétés algébriques. Alors f est régulière et $\phi = f^$.*

LEMME 2.19. — *Soit $\phi : B \longrightarrow A$ un morphisme d'algèbres de type fini sur k . L'image réciproque d'un idéal maximal \mathfrak{m} de A est un idéal maximal de B .*

Démonstration. D'après le théorème des zéros de Hilbert, l'homomorphisme de corps $k \longrightarrow A/\mathfrak{m}$ est un isomorphisme. Considérons le morphisme de k -algèbres $\phi : B \longrightarrow A/\mathfrak{m}$. Alors l'image réciproque $\phi^{-1}(\mathfrak{m})$ est un idéal premier et le plongement induit par ϕ

$$B/\phi^{-1}(\mathfrak{m}) \hookrightarrow A/\mathfrak{m} = k$$

montre que l'algèbre quotient de gauche est un k -espace vectoriel de dimension 1. Donc $\phi^{-1}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{n}$ est un idéal maximal de B . \square

Démonstration du théorème 2.18

La question est locale sur Y . On peut donc supposer que Y est une variété affine. De plus si on recouvre X par un nombre fini d'ouverts affines X_i , on obtient un plongement

$$f_*(\mathcal{O}_X) \longrightarrow \bigoplus_i f_{i*}(\mathcal{O}_{X_i})$$

où f_i est la restriction de f à X_i qui associe à la fonction régulière $u \in \mathcal{O}(V)$ la famille $(u|_{f_i^{-1}(V)})$. Ceci nous ramène au cas où X et Y sont des variétés affines.

On suppose désormais que X et Y sont affines, et on désigne par $A = \mathcal{O}(X)$ et $B = \mathcal{O}(Y)$ les algèbres de fonctions régulières sur X et Y respectivement. Considérons un point $x \in X$; désignons par \mathfrak{m} l'idéal maximal de A associé à x ; d'après le lemme ci-dessus, $\phi^{-1}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{n}$ est un idéal maximal de B . Montrons que cet idéal maximal est l'idéal des

fonctions régulières qui s'annulent en $y = f(x)$. Considérons le morphisme induit par ϕ sur les algèbres locales ; on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\phi} & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_{Y,y} & \xrightarrow{\phi_x} & \mathcal{O}_{X,x} \end{array}$$

Il en résulte que l'image réciproque par ϕ_x de l'idéal maximal \mathfrak{m}_x de $\mathcal{O}_{X,x}$ est un idéal premier contenant $\mathfrak{n}\mathcal{O}_{Y,y}$. L'idéal $\mathfrak{n}\mathcal{O}_{Y,y}$ est donc propre, et par suite \mathfrak{n} est contenu dans l'idéal maximal \mathfrak{m}_y de B des fonctions régulières sur Y qui s'annulent en y . Il est donc égal à cet idéal maximal. Il y a alors factorisation

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & A \\ \text{ev}_y \downarrow & & \downarrow \text{ev}_x \\ k & \longrightarrow & k \end{array}$$

où les morphismes ev_x et ev_y sont les morphismes d'évaluation en x et y respectivement. Le morphisme d'algèbres unitaires $k \longrightarrow k$ obtenu par passage au quotient est obligatoirement l'identité. On a donc pour $u \in B = \mathcal{O}(Y)$ et tout point $x \in X$

$$\phi(u)(x) = u(f(x)).$$

Autrement dit, $\phi = f^*$. Si V est un ouvert affine de Y , on en déduit que cette égalité reste vraie pour le morphisme $\mathcal{O}(V) \longrightarrow \mathcal{O}(f^{-1}(V))$ induit par ϕ (en recouvrant $f^{-1}(V)$ par un nombre fini d'ouverts affines). Il en résulte qu'en tant que morphismes de faisceaux $\mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*(\mathcal{O}_X)$ on a $\phi = f^*$. Que f soit régulière résulte de la définition d'une application régulière. \square

PROPOSITION 2.20. — *Soient X et Y deux variétés algébriques affines et réduites.*

(i) *L'application $f \mapsto f^*$*

$$\text{Mor}(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\text{alg}}(\mathcal{O}(Y), \mathcal{O}(X))$$

est bijective.

(ii) *Un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ est un isomorphisme si et seulement si f^* est un isomorphisme.*

L'assertion (ii) est une conséquence de (i). Si $f : X \longrightarrow Y$ est un isomorphisme, les égalités $f^* \circ (f^{-1})^* = \text{id}_{\mathcal{O}(Y)}$ et $(f^{-1})^* \circ f^* = \text{id}_{\mathcal{O}(X)}$ montrent que f^* est un isomorphisme d'algèbre. Réciproquement, si f^* est un isomorphisme, l'inverse $(f^*)^{-1}$ provient d'un morphisme $g : Y \longrightarrow X$. Il est immédiat de vérifier que ce morphisme est alors l'inverse de f .

Nous démontrerons l'assertion (i) en même temps que la proposition ci-dessous. Le foncteur $X \mapsto \mathcal{O}(X)$ associe à une variété affine X une k -algèbre $\mathcal{O}(X)$. Cette algèbre n'est pas quelconque : elle est de type fini et réduite, c'est-à-dire qu'elle n'a pas d'élément nilpotent non nul. La proposition suivante dit toutes les algèbres de type fini réduites sont de cette forme :

PROPOSITION 2.21. — *Une k -algèbre de type fini réduite A est isomorphe à l'algèbre des fonctions régulières sur une variété algébrique affine.*

On rassemble les deux propositions ci-dessus dans l'énoncé suivant :

THÉORÈME 2.22. — *Soit $\text{Aff}_{k,\text{red}}$ la catégorie des variétés algébriques sur k , affines et réduites, et $\text{Alg}_{k,\text{red}}$ celle des k -algèbres de type fini réduites. Le foncteur*

$$\text{Aff}_{k,\text{red}} \longrightarrow \text{Alg}_{k,\text{red}}$$

qui associe à une variété algébrique affine réduite X l'algèbre $\mathcal{O}(X)$ des fonctions régulières sur X et à tout morphisme f de telles variétés algébriques l'homomorphisme f^ est une équivalence de catégories.*

On va en fait associer canoniquement à toute k -algèbre de type fini A un espace annelé (X, \mathcal{O}_X) , et ceci de manière fonctorielle. Pour vérifier que cet espace annelé est une variété algébrique affine et réduite si A est réduite, le théorème des zéros de Hilbert intervient de manière essentielle. Nous en donnons deux versions. La première version est vraie sur un corps quelconque. Rappelons d'abord que si I un idéal d'un anneau A , le radical de I est l'idéal de A des éléments $x \in A$ dont une puissance appartient à I .

THÉORÈME 2.23. — *Soit k un corps et A une k -algèbre de type fini. Soit I un idéal de A . Le radical de I est l'intersection des idéaux maximaux¹ contenant I .*

¹ Sur un anneau commutatif et unitaire quelconque, le radical d'un idéal est l'intersection de tous les idéaux premiers qui le contiennent. C'est une des raisons pour lesquelles la théorie des schémas fait intervenir tous les idéaux premiers, et non seulement les idéaux maximaux.

Cet énoncé est vrai même si k n'est pas algébriquement clos, et c'est ce qui permet de remplacer dans ce cadre le théorème des zéros classique, valable si k est algébriquement clos et que nous énonçons maintenant :

THÉORÈME 2.24. — (*Théorème des zéros de Hilbert*) On suppose que k est un corps algébriquement clos. Soit I un idéal de $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ et $Z = V(I)$ le fermé des zéros de I dans \mathbb{A}^n . L'idéal des polynômes qui s'annulent sur Z est le radical de I .

Le deuxième énoncé résulte du premier : en effet, si \mathfrak{m}_x est l'idéal maximal de l'algèbre $A = \mathcal{O}(k^n)$ des polynômes s'annulant en $x \in V(I)$ l'application $Z \longrightarrow \text{Spec}(A)$ définie par $x \mapsto \mathfrak{m}_x$ est injective et a pour image l'ensemble des idéaux maximaux contenant I d'après le théorème 2.10. L'intersection de ces idéaux maximaux est exactement l'ensemble des polynômes s'annulant sur $V(I)$ qui est donc le radical de I d'après l'énoncé 2.24.

Construction de l'espace annelé associé à A .

Soit A une algèbre de type fini. On considère l'ensemble² $X = \text{Spec}(A)$ des idéaux maximaux de A , équipé de la topologie suivante : les fermés sont les ensembles de la forme $V(J) \subset \text{Spec}(A)$ des idéaux maximaux de A contenant un idéal J donné. Si $f \in A$, les ouverts X_f des idéaux maximaux \mathfrak{m} qui ne contiennent pas f constituent encore une base d'ouverts de $X = \text{Spec}(A)$.

Exercice 2.2

Vérifier que les parties $V(J)$ sont bien les fermés d'une topologie sur $\text{Spec}(A)$.

On pose

$$\mathcal{O}(X_f) = A_f$$

où A_f désigne l'algèbre des fractions $\frac{u}{f^n}$ où $u \in A$ relative à la partie multiplicative $\{f^n, n \geq 0\}$ de A . On se propose de montrer que ceci définit un faisceau en k -algèbres sur $\text{Spec}(A)$. Pour ceci, nous devons définir les morphisme de restriction.

LEMME 2.25. — Soient f et f' deux éléments de A . Alors $X_{f'} \subset X_f$ si et seulement si l'élément f' appartient au radical de l'idéal (f) , c'est-à-dire qu'il existe un entier $n \geq 0$ tel que f divise f'^n .

Démonstration. La version 2.23 du théorème des zéros de Hilbert dit que l'application qui associe à un idéal I de A égal à son radical le fermé $V(I)$ est inversible : elle a pour inverse l'application qui associe à un fermé F de $\text{Spec}(A)$ l'idéal $I = \bigcap_{\mathfrak{m} \in F} \mathfrak{m}$; cette

² La tradition désigne par $\text{Spec}(A)$ le schéma des idéaux premiers d'un anneau A . Dans le cadre des algèbres de type fini, on peut se limiter au spectre maximal.

application renverse les inclusions. L'inclusion $X_{f'} \subset X_f$ est équivalente à l'inclusion des fermés $V(f) \subset V(f')$ de $\text{Spec}(A)$ ce qui est équivalent au fait que f' appartient au radical de (f) . \square

On en déduit que si $X_{f'} \subset X_f$, f devient inversible dans l'algèbre des fractions $A_{f'}$. La propriété de l'anneau des fractions fournit alors un homomorphisme d'algèbres

$$A_f \longrightarrow A_{f'}$$

qui sera dit homomorphisme de restriction satisfaisant, sur les ouverts de la base considérée aux conditions demandée dans la définition 1.1. Montrons que ceci définit un faisceau d'algèbres sur $X = \text{Spec}(A)$. Considérons un recouvrement $X_f = \cup_{i \in I} X_{f_i}$ par des ouverts distingués. Alors $V(f)$ est l'intersection des fermés $V(f_i)$. Il s'agit de montrer

1) l'application $A_f \longrightarrow \prod_i A_{f_i}$ est injective.

L'espace topologique $\text{Spec}(A)$ est évidemment noethérien ; il en résulte que l'on peut supposer que le recouvrement est fini. Si $\frac{u}{f^n}$ s'annule dans A_{f_i} , il existe un entier $m \geq 0$ tel que $f_i^m u = 0$. Or dans l'algèbre de type fini A_f , il n'y a pas d'idéal maximal contenant (f_i^m) . Donc l'idéal engendré par les f_i^m est l'anneau tout entier ; par suite, il existe $v_i \in A_f$ tel que dans A_f

$$\sum_i v_i f_i^m = 1.$$

Il en résulte évidemment que $u = 0$.

2) L'intersection $X_{f_i} \cap X_{f_j}$ coïncide avec l'ouvert $X_{f_i f_j}$; on doit montrer qu'étant donnée une famille s_i d'éléments de A_{f_i} tels que $s_i = s_j$ dans $A_{f_i f_j}$ provient d'une section $s \in A_f$. Commençons par extraire un recouvrement fini $(X_{f_i})_{i \in F}$ de X_f . On écrit dans A_{f_i}

$$s_i = \frac{u_i}{f_i^{n_i}}$$

Il existe alors un entier m tel que pour tout i et $j \in F$ on ait

$$(f_i f_j)^m (u_i f_j^{n_j} - u_j f_i^{n_i}) = 0$$

Comme ci-dessus, on peut trouver des éléments $\alpha_j \in A_f$ tels que

$$\sum_{j \in F} \alpha_j f_j^{n_j + m} = 1$$

dans A_f . L'égalité ci-dessus entraîne alors $s_i = \sum_{j \in F} \alpha_j u_j f_j^m$ dans A_{f_i} pour $i \in F$ ce qui prouve que la fraction $s = \sum_j \alpha_j u_j f_j^m$ de A_f a pour image s_i dans A_{f_i} . Maintenant, pour les autres i , on considère le recouvrement $X_{f_i f_j}$ de $U_i = X_{f_i}$. Les sections $s|_{U_i}$ et s_i doivent coïncider parce qu'elles coïncident sur chacun de ces ouverts. \square

PROPOSITION 2.26. — Si A est une algèbre de type fini réduite, l'espace annelé $X = \text{Spec}(A)$ ci-dessus est une variété algébrique affine réduite.

Démonstration. Considérons une présentation

$$\alpha : \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)/I \xrightarrow{\sim} A$$

de A comme quotient d'une algèbre de polynômes par un idéal I . Soit $Y = V(I)$ le fermé algébrique de \mathbb{A}^n défini par les zéros communs aux éléments de I . Puisque A est réduite, d'après le théorème des zéros l'idéal I est égal à son radical ; l'algèbre quotient est l'algèbre des fonctions régulières sur Y . L'isomorphisme α ci-dessus peut donc être vu comme un isomorphisme de l'algèbre des fonctions régulières sur Y sur l'algèbre A . On a alors une bijection

$$\phi : Y \longrightarrow X = \text{Spec}(A)$$

qui associe à un point $x \in X$ l'idéal maximal de A correspondant aux fonctions régulières qui s'annulent en x . Considérons un ouvert principal X_f défini par un élément $f \in A$, auquel correspond une fonction régulière $g \in \mathcal{O}(Y)$ et un ouvert principal Y_g de Y . Alors $\phi(Y_g) = X_f$ ce qui prouve que ϕ est un homéomorphisme. Il reste à identifier les faisceaux structuraux des deux espaces annelés. Il suffit de construire un isomorphisme d'algèbre $\mathcal{O}(Y_g) \simeq A_f$ compatible avec la restriction à des ouverts principaux plus petit.

LEMME 2.27. — Soit Y une variété algébrique affine réduite, et $g \in \mathcal{O}(Y)$ une fonction régulière. On a un isomorphisme canonique

$$\mathcal{O}(Y)_g \simeq \mathcal{O}(Y_g)$$

Démonstration. Sur l'ouvert Y_g la fonction régulière g est inversible. Il résulte de la propriété universelle de l'anneau des fractions relatif à la partie multiplicative $S = \{g^n, n \in \mathbb{N}\}$ que le morphisme de restriction $\mathcal{O}(Y) \longrightarrow \mathcal{O}(Y_g)$ se factorise suivant un morphisme $\mathcal{O}(Y)_g \longrightarrow \mathcal{O}(Y_g)$ qui associe à la fraction $\frac{u}{g^n}$ la fonction régulière $y \mapsto \frac{u(y)}{g(y)^n}$. Montrons l'injectivité : si la fonction régulière de droite s'annule, alors u s'annule sur l'ouvert $g \neq 0$. Donc $ug = 0$ et la fraction $\frac{u}{g^n} = \frac{ug}{g^{n+1}}$ est nulle. Montrons la surjectivité : pour ceci on identifie Y_g avec le fermé algébrique de $Y \times \mathbb{A}^1$ défini par les couples (y, t) tels que $g(y)t = 1$, par le morphisme $y \mapsto (y, \frac{1}{g(y)})$. Une fonction régulière sur $Y \times \mathbb{A}^1$ est induite par un polynôme (cf. proposition 2.9) s'écrit $\sum_{i \leq m} u_i t^i$, où $u_i \in \mathcal{O}(Y)$. Par suite, une fonction régulière sur Y_g s'écrit

$$y \mapsto \sum_{i \leq m} \frac{u_i(y)}{g(y)^i}$$

et donc provient d'une fraction de $\mathcal{O}(Y)_g$. \square

Ceci achève la démonstration de la proposition 2.26 et démontre en particulier la proposition 2.21, puisque A est isomorphe à l'algèbre des fonctions régulières sur $\text{Spec}(A)$. \square

Démonstration du théorème 2.22

On va définir un foncteur contravariant $\text{Alg}_{k,\text{red}} \longrightarrow \text{Aff}_{k,\text{red}}$. On sait déjà associer à une algèbre de type fini réduite A une variété algébrique affine réduite $\text{Spec}(A)$. Considérons maintenant un morphisme d'algèbres de type fini réduites $\phi : A \longrightarrow B$; on lui associe une application

$$f : Y = \text{Spec}(B) \longrightarrow X = \text{Spec}(A)$$

en posant $f^{-1}(\mathfrak{m}) = \phi^{-1}(\mathfrak{m})$: cet idéal premier est bien un idéal maximal d'après le lemme 2.19. Si $\alpha \in A$, l'image réciproque de l'ouvert X_α est formé des idéaux maximaux \mathfrak{m} de B tels que $\alpha \notin \phi^{-1}(\mathfrak{m})$ c'est-à-dire tels que $\phi(\alpha) \notin \mathfrak{m}$. Ainsi $f^{-1}(X_\alpha) = Y_{\phi(\alpha)}$. Ceci prouve que f est une application continue. De plus, d'après la propriété universelle de l'algèbre des fractions, l'homomorphisme d'algèbres $A \longrightarrow B_{\phi(\alpha)}$ se factorise suivant le diagramme

$$A_\alpha \longrightarrow B_{\phi(\alpha)}$$

ce qui fournit un morphisme de faisceaux en k -algèbres noté encore $\phi : \mathcal{O}_X \longrightarrow f_*(\mathcal{O}_Y)$.

On a donc associé à un morphisme d'algèbres de type fini réduites $\phi : A \longrightarrow B$ un morphisme de variétés algébriques réduites

$$(f, \phi) : \text{Spec}(B) \longrightarrow \text{Spec}(A)$$

souvent noté $\text{Spec } \phi$. Bien sûr, sur les sections globales on retrouve le morphisme d'algèbres ϕ initial. On a donc obtenu un foncteur $\Psi : A \mapsto \text{Spec } A$ et un isomorphisme $A \simeq \mathcal{O}(\text{Spec}(A))$ clairement fonctoriel en A .

Il reste à construire pour toute variété algébrique affine réduite X un isomorphisme

$$X \longrightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}(X))$$

fonctoriel en X . Il suffit de vérifier que l'isomorphisme déjà décrit qui associe à $x \in X$ l'idéal maximal \mathfrak{m}_x de $\mathcal{O}(X)$ des fonctions régulières s'annulant en x est fonctoriel en X .

Il s'agit donc de vérifier que $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \text{Spec } \mathcal{O}(X) \\ \downarrow f & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & \text{Spec } \mathcal{O}(Y) \end{array}$$

est commutatif. Puisque les variétés sont réduites, d'après le théorème 2.18 il suffit de vérifier que ce diagramme est commutatif au niveau des applications continues sous-jacentes. Mais si $x \in X$, on a $f^*(\mathfrak{m}_{f(x)}) \subset \mathfrak{m}_x$ et donc l'idéal maximal $\mathfrak{m}_{f(x)}$ est l'image réciproque de \mathfrak{m}_x par f^* , ce qui fournit la commutativité du diagramme.

Remarquons que le morphisme d'algèbres $\mathcal{O}(X) \longrightarrow \mathcal{O}(X)$ induit par l'isomorphisme $X \xrightarrow{\sim} \text{Spec}(\mathcal{O}(X))$ est l'identité de $\mathcal{O}(X)$. Ceci entraîne la proposition 2.20. En effet si $\varphi : \mathcal{O}(Y) \longrightarrow \mathcal{O}(X)$ est un morphisme d'algèbres, le morphisme associé $\text{Spec}(\mathcal{O}(X)) \longrightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}(Y))$ fournit un morphisme de variétés algébriques $f : X \longrightarrow Y$. Il n'y a aucune difficulté pour vérifier que l'application $\varphi \mapsto f$ ainsi obtenue est l'inverse de l'application $f \mapsto f^*$. \square

Exercice 2.3

On considère le morphisme $\mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}^2$ défini par $t \longrightarrow (t^2, t^3)$. Montrer que ce morphisme est une application bijective sur la sous-variété algébrique fermée réduite définie par les couples (x, y) tels que $x^3 = y^2$, mais que ce n'est pas un isomorphisme.

2.6. Variétés algébriques

La construction de l'espace annelé $\text{Spec}(A)$ donnée ci-dessus n'utilise pas le fait que l'algèbre de type fini A est réduite. Elle s'étend donc en fait à toute algèbre de type fini, même non réduite. Si $A = \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)/I$, cet espace annelé est isomorphe à l'espace annelé d'espace topologique sous-jacent $Y = V(I)$, et qui associe à l'ouvert principal Y_f de Y l'algèbre des fractions A_f . Par définition, l'algèbre des sections globales est A .

DÉFINITION 2.28. — *On appelle variété algébrique affine sur k un espace annelé (X, \mathcal{O}_X) en k -algèbres isomorphe au spectre (maximal) d'une k -algèbre de type fini. L'algèbre des sections globales est notée $\mathcal{O}(X)$.*

DÉFINITION 2.29. — On appelle variété algébrique³ sur k est un espace annelé en k -algèbres dont tout point possède un voisinage ouvert affine, et dont l'espace topologique sous-jacent est noethérien. Un morphisme de variétés algébriques est un morphisme des espaces annelés sous-jacents.

En général, le faisceau structural n'est plus un faisceau de fonctions. Toutefois l'algèbre des germes $\mathcal{O}_{X,x}$ en un point $x \in X$ est une algèbre locale (cf. lemme ci-dessous) dont le corps résiduel est canoniquement isomorphe à k . On pourra donc parler de la valeur en x d'une section définie au voisinage de x .

L'algèbre locale d'une variété algébrique

PROPOSITION 2.30. — Soit A une algèbre de type fini, et $X = \text{Spec } A$. Soit \mathfrak{m} un point de $\text{Spec } A$, correspondant à un idéal maximal \mathfrak{m} de A . L'algèbre $\mathcal{O}_{X,x}$ des germes de sections du faisceau structural est isomorphe à la localisée $A_{\mathfrak{m}}$ de A en l'idéal maximal \mathfrak{m} .

Démonstration. On considère les ouverts principaux X_f contenant x , définis par des éléments $f \in A$. On a donc $f \notin \mathfrak{m}$. Donc l'élément f est inversible dans $A_{\mathfrak{m}}$. On a donc un homomorphisme d'algèbres $\mathcal{O}(X_f) = A_f \longrightarrow A_{\mathfrak{m}}$ compatible avec la restriction à des ouverts principaux plus petits ; par conséquent, ce morphisme passe à la limite inductive : on obtient un homomorphisme d'algèbres

$$\mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow A_{\mathfrak{m}}$$

Montrons que cet homomorphisme est bijectif.

Injectivité : si $u \in \mathcal{O}(X_f)$ s'annule dans $A_{\mathfrak{m}}$, il existe un élément $s \notin \mathfrak{m}$ tel que $su = 0$. Alors dans A_{fs} on a $u = 0$. Donc la restriction de u à l'ouvert principal X_{fs} est nulle.

Surjectivité : Soit $v = \frac{u}{s}$ un élément de l'algèbre locale $A_{\mathfrak{m}}$, où $u \in A$ et $s \notin \mathfrak{m}$. On a donc par définition $\mathfrak{m} \in X_s$ et la fraction $\frac{u}{s}$ a un sens dans $\mathcal{O}(X_s)$. Son germe a pour image v dans $A_{\mathfrak{m}}$. D'où la surjectivité. \square

On peut donc associer à une section f de \mathcal{O}_X sur un ouvert U une fonction $U \longrightarrow k$.

³ La terminologie varie suivant les auteurs. Beaucoup d'auteurs réservent le nom de variété algébrique au cas des variétés intègres, c'est-à-dire irréductibles et réduites. La notion introduite ici est équivalente à celle de schéma affine de type fini sur k ; pourtant, les espaces topologiques sous-jacents ne sont pas exactement les mêmes : si A est une algèbre de type fini sur k , le schéma affine qu'on note aussi traditionnellement $\text{Spec}(A)$ a pour espace topologique sous-jacent l'ensemble de tous les idéaux premiers de A muni d'une topologie analogue à celle qu'on a définie.

LEMME 2.31. — Soit X une variété algébrique de faisceau structural \mathcal{O}_X . Soit \mathcal{C}_X le faisceau des fonctions continues sur X .

- (i) Les fonctions associées aux sections locales de \mathcal{O}_X sont continues.
- (ii) Le noyau de l'homomorphisme de faisceaux en k -algèbres ainsi obtenu

$$\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{C}_X$$

est l'idéal des éléments nilpotents.

Démonstration. La question est locale. On peut donc supposer que $X = \text{Spec } A$, et considérer les fonctions définies sur $\text{Spec } A$. Soit A_{red} l'algèbre quotient de A par l'idéal des éléments nilpotents. On a un homéomorphisme $\text{Spec } A_{\text{red}} \longrightarrow \text{Spec } A$ et par cet homéomorphisme, les fonctions associées aux éléments de A deviennent les fonctions régulières sur la variété algébrique affine réduite $\text{Spec } A_{\text{red}}$. Ce sont donc des fonctions continues (cf. proposition 2.26). L'algèbre des fonctions obtenues s'identifie à A_{red} et le noyau de $A \longrightarrow A_{\text{red}}$ est par définition l'idéal des éléments nilpotents de A . \square

Si (X, \mathcal{O}_X) est une variété algébrique, on dispose d'un faisceau en algèbres quotient de \mathcal{O}_X par l'idéal \mathcal{N} des éléments nilpotents. On obtient ainsi un espace annelé $(X_{\text{red}}, \mathcal{O}_{X_{\text{red}}})$; les espaces topologiques sous-jacents à X et X_{red} sont les mêmes; on a un morphisme canonique $(X_{\text{red}}, \mathcal{O}_{X_{\text{red}}}) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ qui n'est pas un isomorphisme en général. Si $X = \text{Spec}(A)$ l'espace annelé associé n'est autre que $\text{Spec}(A_{\text{red}})$, où A_{red} est le quotient de A par l'idéal de ses éléments nilpotents; ceci prouve que X_{red} est une variété algébrique réduite. L'énoncé 2.22 s'étend tel quel aux variétés algébriques :

THÉORÈME 2.32. — Soit Aff_k la catégorie des variétés algébriques affines, et Alg_k celle des algèbres de type fini sur k . Le foncteur contravariant

$$\Phi : \text{Aff}_k \longrightarrow \text{Alg}_k$$

qui associe à la variété affine (X, \mathcal{O}_X) l'algèbre $\mathcal{O}(X)$ et à tout morphisme $(f, \phi) : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ le morphisme d'algèbres $\phi : \mathcal{O}(Y) \longrightarrow \mathcal{O}(X)$ est une équivalence de catégories.

Démonstration. On a un foncteur $\Psi : A \mapsto \text{Spec } A$ et un isomorphisme $A \simeq \mathcal{O}(\text{Spec}(A))$ clairement fonctoriel en A : la construction donnée dans le cas réduit s'étend sans changement aux cas des algèbres de type fini sur k quelconques. Il reste à construire pour toute variété affine X un isomorphisme

$$X \longrightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}(X))$$

fonctoriel en X . Ici nous ne pouvons plus invoquer le théorème 2.18 qui est spécifique au cas des variétés réduites.

LEMME 2.33. — Soit Var_k la catégorie des variétés algébriques sur k . Considérons une k -algèbre A de type fini et le foncteur contravariant $\text{Var}_k \longrightarrow \text{Ens}$ qui associe à la variété algébrique X l'ensemble des homomorphismes de k -algèbres $\text{Hom}_{\text{alg}}(A, \mathcal{O}(X))$, et à un morphisme $g : X \longrightarrow Y$ de Var_k l'application $\text{Hom}_{\text{alg}}(A, \mathcal{O}(Y)) \longrightarrow \text{Hom}_k(A, \mathcal{O}(X))$ définie par $v \mapsto g^*v$. Ce foncteur est représentable par la variété affine $\text{Spec } A$, munie du morphisme canonique $\phi : A \longrightarrow \mathcal{O}(\text{Spec } A)$.

Dans cet énoncé, g^* est l'homomorphisme d'algèbres $\mathcal{O}(Y) \longrightarrow \mathcal{O}(X)$ associé au morphisme de variétés algébriques g . Dans le cas où les variétés seraient réduites, les algèbres sont des algèbres de fonctions continues, et g^* est la composition par g . L'énoncé signifie que pour tout homomorphisme d'algèbres $\varphi : A \longrightarrow \mathcal{O}(X)$ il existe un morphisme de variétés algébriques $g : X \longrightarrow \text{Spec } A$ unique tel que $g^*\phi = \varphi$.

Démonstration. Considérons un homomorphisme de k -algèbres $\varphi : A \longrightarrow \mathcal{O}(X)$.

Montrons d'abord l'existence d'un morphisme $g : X \longrightarrow \text{Spec } A$ tel que $g^*\phi = \varphi$.

Un point $x \in X$ définit un idéal maximal \mathfrak{m}_x de $\mathcal{O}(X)$ et par suite une application $g : X \longrightarrow \text{Spec } A$ définie par $x \mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{m}_x)$. Cette application est continue : en effet, considérons l'ouvert Y_f de $Y = \text{Spec } A$ défini par un élément $f \in A$. L'image réciproque de Y_f est exactement l'ensemble $X_{\varphi(f)}$ des points où la section $\varphi(f)$ de $\mathcal{O}(X)$ ne s'annule pas. D'après le lemme 2.31 cette section est continue : $X_{\varphi(f)}$ est donc un ouvert de X . La section $\varphi(f)$ est inversible sur l'ouvert $X_{\varphi(f)}$ et la propriété universelle de l'algèbre des fractions A_f fournit un homomorphisme d'algèbres $A_f \longrightarrow \mathcal{O}(X_{\varphi(f)})$ compatible avec la restriction à des ouverts principaux plus petits. On obtient donc un homomorphisme de faisceaux en k -algèbres

$$\psi : \mathcal{O}_{\text{Spec } A} \longrightarrow g_*(\mathcal{O}_X)$$

Ainsi, on a obtenu un morphisme de variétés algébrique $g : X \longrightarrow \text{Spec } A$. Sur les sections globales le morphisme $g^*\phi$ est par construction φ .

Montrons l'unicité du morphisme g . Soit $g : X \longrightarrow \text{Spec } A$ un morphisme de variétés algébriques. Il s'agit de montrer que g est déterminé par l'homomorphisme d'algèbres $\varphi = g^*\phi : A \longrightarrow \mathcal{O}(X)$. Considérons un point $x \in X$, et l'idéal maximal \mathfrak{m} de A défini par le point $g(x)$. La même démonstration que pour le théorème 2.18 montre que l'image réciproque de l'idéal maximal \mathfrak{m}_x des sections de $\mathcal{O}(X)$ s'annulant en x par

l'homomorphisme φ est l'idéal maximal \mathfrak{m} , ce qui montre que l'application continue sous-jacente à g est déterminée par φ . De plus, le diagramme commutatif en tout point $x \in X$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{O}(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_{\mathfrak{m}} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X,x} \end{array}$$

montre que le morphisme de faisceaux $\mathcal{O}_{\text{Spec } A} \longrightarrow g_*(\mathcal{O}_X)$ est déterminé par φ . Ceci prouve le lemme. \square

COROLLAIRE 2.34. — Soient A une algèbre de type fini sur k , et X une variété algébrique. L'application

$$\text{Mor}(X, \text{Spec } A) \longrightarrow \text{Hom}_{\text{alg}}(A, \mathcal{O}(X))$$

définie par $g \mapsto g^*\phi$ est bijective.

Cette application est fonctorielle en A et X . En particulier, si X est une variété algébrique affine, $\mathcal{O}(X)$ est une algèbre de type fini ; on obtient un morphisme de variétés algébriques $f : X \longrightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}(X))$ associé à l'identité de $\mathcal{O}(X)$. Ce morphisme est fonctoriel en X .

COROLLAIRE 2.35. — Sur la catégorie des variétés algébriques affines sur k , le morphisme fonctoriel

$$f : X \longrightarrow \text{Spec } \mathcal{O}(X)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Par construction, le morphisme f ci-dessus est le seul morphisme $X \longrightarrow \text{Spec } \mathcal{O}(X)$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(X) & & \\ \downarrow \phi & \searrow \text{id}_{\mathcal{O}(X)} & \\ \mathcal{O}(\text{Spec}(\mathcal{O}(X))) & \xrightarrow{f^*} & \mathcal{O}(X) \end{array}$$

Il suffit par functorialité de démontrer que le morphisme f est un isomorphisme quand $X = \text{Spec } A$, où A est une algèbre de type fini. On a alors un isomorphisme $\phi : A \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X)$. Dans l'isomorphisme du corollaire 2.34, le morphisme composé $f : X \xrightarrow{f} \text{Spec}(\mathcal{O}(X)) \xrightarrow{\text{Spec } \phi} \text{Spec } A$ correspond à ϕ , comme on le voit par functorialité sur la catégorie Aff_k . Il en résulte que ce morphisme composé n'est autre que l'identité de $\text{Spec } A$. Puisque ϕ est un isomorphisme, il en est de même du morphisme $\text{Spec } \phi$ et donc de f . \square

COROLLAIRE 2.36. — *Soient X et Y deux variétés algébriques affines. L'application naturelle $\text{Mor}(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\text{alg}}(\mathcal{O}(Y), \mathcal{O}(X))$ définie par $f \mapsto f^*$ est bijective.*

Démonstration. Il est clair que le corollaire ci-dessus montre l'injectivité de cette application. Montrons la surjectivité. Soit $v : \mathcal{O}(Y) \longrightarrow \mathcal{O}(X)$ un morphisme de k -algèbres. Le corollaire ci-dessus montre que le morphisme associé $\text{Spec } v : \text{Spec}(\mathcal{O}(X)) \longrightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}(Y))$ provient d'un morphisme de variétés algébriques $u : X \longrightarrow Y$. Dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}(Y) & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{O}(\text{Spec}(\mathcal{O}(Y))) & \xrightarrow{f^*} & \mathcal{O}(Y) \\ \downarrow v & & \downarrow & & \downarrow u^* \\ \mathcal{O}(X) & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{O}(\text{Spec}(\mathcal{O}(X))) & \xrightarrow{f^*} & \mathcal{O}(X) \end{array}$$

les composées des flèches horizontales coïncident avec l'identité. Ceci montre que $u^* = v$. D'où la surjectivité. \square

Le corollaire 2.36 achève la démonstration du théorème 2.32 \square

Exemple.

Considérons les algèbres $A = \mathcal{O}(\mathbb{A}^1)/(z)$ et

$$B = \mathcal{O}(\mathbb{A}^1)/(z^2).$$

Les variétés algébriques sous-jacentes à $\text{Spec } A$ et $\text{Spec } B$ ont un espace topologique sous-jacent réduit à un point. Pourtant, ces variétés ne sont pas isomorphes : en effet, les algèbres A et B ne sont pas isomorphes. L'algèbre A est isomorphe à k , tandis que B a des éléments nilpotents non nuls. En fait, $\text{Spec } A$ est la variété algébrique réduite associée à $\text{Spec } B$.

Exercice 2.4

Soit X une variété algébrique. Montrer que l'application canonique

$$\text{Mor}(X, \mathbb{A}^1) \longrightarrow \mathcal{O}(X)$$

est un isomorphisme, fonctoriel en X .

2.7. Recollement de variétés algébriques

Soit X un espace topologique. Etant donné un recouvrement ouvert (U_i) de X , on désigne par U_{ij} l'intersection $U_i \cap U_j$, par U_{ijk} l'intersection $U_i \cap U_j \cap U_k$.

THÉORÈME 2.37. — *Soit X un espace topologique. On se donne*

- 1) *un recouvrement ouvert U_i de X ;*
- 2) *pour chaque i un faisceau en k -algèbres \mathcal{A}_i ;*
- 3) *Pour chaque (i, j) un isomorphisme de faisceaux en algèbres*

$$\phi_{ji} : \mathcal{A}_i|_{U_{ij}} \longrightarrow \mathcal{A}_j|_{U_{ji}}$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

- *pour tout (i, j, k) on a $\phi_{ki} = \phi_{kj}\phi_{ji}$ sur U_{ijk}*
- *pour tout i , $\phi_{ii} = \text{id}$.*

Il existe un faisceau en k -algèbres \mathcal{A} sur X et des isomorphismes de faisceaux en k -algèbres

$$\phi_i : \mathcal{A}|_{U_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_i$$

tels que sur U_{ij} on ait $\phi_j\phi_i^{-1} = \phi_{ji}$. Le couple formé du faisceau \mathcal{A} et des isomorphismes ϕ_i est déterminé de manière unique par ces conditions.

Démonstration. Les ouverts U de X contenus dans un des ouverts U_i constituent une base d'ouverts. Pour un tel ouvert, on considère l'algèbre $\mathcal{A}(U)$ quotient de $\coprod_{i, U \subset U_i} \mathcal{A}_i(U)$ par la relation d'équivalence définie par $(i, s) \sim (j, t)$ (où $s \in \mathcal{A}_i(U)$ et $t \in \mathcal{A}_j(U)$) si $t = \phi_{ji}s$. Les relations imposées dans l'énoncé disent qu'il s'agit d'une relation d'équivalence ; sur le quotient on définit canoniquement une structure d'algèbre de sorte que le morphisme $\mathcal{A}_i(U) \longrightarrow \mathcal{A}(U)$ qui associe à s sa classe d'équivalence soit un isomorphisme d'algèbres. Il est clair que le préfaisceau \mathcal{A} ainsi défini est un faisceau puisqu'il suffit de vérifier la propriété de recollement imposée aux faisceaux sur les ouverts de la base. Le fait que \mathcal{A}_i soit un faisceau entraîne que \mathcal{A} est un faisceau. L'unicité est évidente. \square

Supposons que l'espace topologique X soit noethérien. Si on applique cet énoncé au cas où les espaces annelés (U_i, \mathcal{A}_i) sont des variétés algébriques, l'espace annelé (X, \mathcal{A}) ainsi construit est une variété algébrique. Souvent, la structure de variété algébrique sur les ouverts U_i est obtenue par image réciproque du faisceau structural par un homéomorphisme $\alpha_i : U_i \longrightarrow U'_i$. Par cet homéomorphisme, l'intersection U_{ij} correspond à un ouvert U'_{ij} de U_i et la donnée des isomorphismes ϕ_{ij} revient à se donner un isomorphisme de variétés algébriques $\phi'_{ji} : U'_{ij} \longrightarrow U'_{ji}$ dont l'application continue sous-jacente est $\alpha_j \alpha_i^{-1}$, satisfaisant aux conditions de cocycle :

- pour tout (i, j, k) on a $\phi'_{ki} = \phi'_{kj} \phi'_{ji}$ sur $U'_{ijk} = U'_{ij} \cap U'_{ik}$
- pour tout i , $\phi'_{ii} = \text{id}$.

Lorsque ces variétés algébriques sont réduites, les faisceaux \mathcal{A}_i sont des sous-faisceaux du faisceau des fonctions continues à valeurs scalaires ; d'après le théorème 2.18, l'existence des morphismes ϕ_{ij} signifie que la restriction des faisceaux \mathcal{A}_i et \mathcal{A}_j à l'ouvert U_{ij} coïncident, et les morphismes ϕ_{ij} se réduisent à l'identité. Par conséquent les conditions de cocycle imposées sur les ouverts U_{ijk} ou U'_{ijk} sont automatiquement satisfaites. L'existence des morphismes ϕ_{ji} équivalent au fait que les applications $\phi'_{ji} = \alpha_j \alpha_i^{-1} : U'_{ij} \longrightarrow U'_{ji}$ sont régulières pour tout (i, j) . On dit alors que les homéomorphismes α_i constituent un atlas algébrique sur X . Les homéomorphismes α_i sont appelés des cartes locales. Pour vérifier qu'une application $f : X \longrightarrow Y$ est régulière, il suffit de vérifier que sa restriction aux ouverts U_i est régulière, c'est-à-dire, si l'on préfère, que l'application $f \alpha_i^{-1}$ est régulière sur la variété U'_i .

Exemple 1

Considérons le quotient $\mathbb{P}_1 = (\mathbb{A}^2 - \{0\})/k^*$, muni de la topologie quotient de la topologie de Zariski par la projection canonique

$$\pi : \mathbb{A}^2 - \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}_1.$$

La classe de (x, y) est notée $[x, y]$. Les ouverts $U_0 = \{[x, y], y \neq 0\}$ et $U_\infty = \{[x, y], x \neq 0\}$ recouvrent \mathbb{P}_1 . Les cartes locales $\alpha_0 : U_0 \longrightarrow \mathbb{A}^1$ et $\alpha_\infty : U_\infty \longrightarrow \mathbb{A}^1$ définies respectivement par $\alpha_0([x, y]) = \frac{x}{y}$ et $\alpha_\infty([x, y]) = \frac{y}{x}$ sont compatibles : le changement de cartes $\phi_{0,\infty}$ est défini sur $\mathbb{A}^1 - \{0\}$ par $\phi_{\infty,0}(z) = \frac{1}{z}$: c'est donc un isomorphisme de $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ sur lui-même. Ainsi, les cartes locales α_0 et α_∞ définissent un atlas (algébrique) sur \mathbb{P}_1 . Puisque \mathbb{P}_1 est évidemment noethérien, cet atlas fournit sur \mathbb{P}_1 une structure de variété algébrique : en fait cette variété algébrique est la même que la droite projective

définie en équipant \mathbb{P}_1 du faisceau $\pi_*(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2 - \{0\}})^{k^*}$. Ceci résulte du fait que les faisceaux de fonctions régulières coïncident sur les ouverts U_i .

Exemple 2

Considérons plus généralement le quotient $\mathbb{P}_n = \mathbb{A}^{n+1} - \{0\}/k^*$, muni de la topologie quotient de la topologie de Zariski. On a vu dans la section 2.4 que cet espace topologique est noethérien. On note $[x]$ la classe d'un point $x \in k^{n+1} \setminus \{0\}$. Désignons par A_i le sous-espace affine de k^{n+1} des points $x = (x_0, \dots, x_n)$ tels que $x_i = 1$, et considérons l'ouvert U_i de \mathbb{P}_n défini par les points $[x]$ tels que $x_i \neq 0$. On prend pour cartes locales les homéomorphismes $\alpha_i : U_i \rightarrow A_i$ définis par $\varphi_i([x]) = \frac{x}{x_i}$; ces cartes locales sont bien compatibles : le changement de cartes ϕ'_{ji} est défini sur l'ouvert $U'_{i,j}$ des points $x \in A_i$ tels que $x_j \neq 0$, par la formule

$$\varphi'_{ji}(x) = \frac{x}{x_j}$$

Ainsi, ϕ'_{ji} est une application birégulière de $U'_{i,j}$ sur $U'_{j,i}$. On obtient ainsi un atlas sur l'espace projectif \mathbb{P}_n . Ici encore, la structure de variété algébrique associée sur \mathbb{P}_n est la même que celle qui est définie dans la section 2.4.

2.8. Produits

La construction du produit de deux variétés algébriques nécessite l'usage de la propriété de recollement qu'on vient de décrire.

Dans une catégorie le produit de deux objets X et Y est un objet Z muni de morphismes $Z \xrightarrow{p} X$ et $Z \xrightarrow{q} Y$ de sorte que la propriété universelle suivante soit satisfaite : l'application

$$\text{Mor}(S, Z) \longrightarrow \text{Mor}(S, X) \times \text{Mor}(S, Y)$$

définie par $f \mapsto (pf, qf)$ est bijective. Le triplet $(Z, (p, q))$ est alors déterminé à isomorphisme près par cette condition. On le note $Z = X \times Y$.

Par exemple, dans la catégorie des variétés algébriques, l'espace affine \mathbb{A}^{n+m} , muni des projections canoniques $\text{pr}_1 : \mathbb{A}^{n+m} \rightarrow \mathbb{A}^n$ et $\text{pr}_2 : \mathbb{A}^{n+m} \rightarrow \mathbb{A}^m$ est le produit de \mathbb{A}^n et \mathbb{A}^m .

PROPOSITION 2.38. — *Dans la catégorie des variétés algébriques affines réduites, il existe des produits finis.*

Démonstration. Il suffit de faire la démonstration pour deux fermés algébriques $X \subset \mathbb{A}^n$ et $Y \subset \mathbb{A}^m$. Alors le produit ordinaire $X \times Y$ est un fermé algébrique de $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m = \mathbb{A}^{n+m}$. Si $f_1, \dots, f_\ell \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ et g_1, \dots, g_s sont des générateurs pour les

idéaux de X et Y respectivement, le fermé $X \times Y$ de \mathbb{A}^{n+m} est défini par l'annulation simultanée des polynômes $\text{pr}_1^*(f_i)$ et $\text{pr}_2^*(g_j)$ de $\mathcal{O}(\mathbb{A}^{n+m})$. On le munit des projections $\text{pr}_1 : X \times Y \longrightarrow X$ et $\text{pr}_2 : X \times Y \longrightarrow Y$. Ces projections sont évidemment des applications régulières. La vérification de la propriété universelle ne pose aucune difficulté.

REMARQUE 2.39. — Il est important de remarquer que la topologie sous-jacente au produit n'est pas la topologie produit. Sauf dans des cas très particulier, elle est strictement plus fine que la topologie produit.

LEMME 2.40. — *Soient X et Y deux variétés algébriques affines réduites. Le morphisme canonique $\mathcal{O}(X) \otimes_k \mathcal{O}(Y) \longrightarrow \mathcal{O}(X \times Y)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Cet énoncé est évident pour $X = \mathbb{A}^n$ et $Y = \mathbb{A}^m$. Considérons des bases f_i et g_j pour $\mathcal{O}(X)$ et $\mathcal{O}(Y)$. Alors les tenseurs $f_i \otimes g_j$ forment une base de $X \times Y$. L'application

$$\mathcal{O}(X) \otimes_k \mathcal{O}(Y) \longrightarrow \mathcal{O}(X \times Y)$$

ci-dessus associe à l'élément $\sum_{i,j} a_{i,j} f_i \otimes g_j$ (où $a_{i,j} \in k$) la fonction régulière sur $X \times Y$ définie par $(x, y) \mapsto \sum_{i,j} a_{i,j} f_i(x) g_j(y)$. Montrons l'injectivité : si cette fonction régulière est identiquement nulle, alors pour tout j , $\sum_i a_{i,j} f_i(x) = 0$ et par suite $a_{i,j} = 0$. Elle est clairement surjective : si $h(x, y)$ est une fonction régulière sur $X \times Y$, elle est induite par un polynôme H sur \mathbb{A}^{n+m} ; ce polynôme provient d'un tenseur $\sum_{i,j} P_i \otimes Q_j$, où $P_i \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ et $Q_j \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^m)$. Par suite, si on pose $u_i = P_i|_X$ et $v_j = Q_j|_Y$, la fonction h provient de $\sum_{i,j} u_i \otimes v_j$. \square

REMARQUE 2.41. — Le lemme 2.40 prouve que le produit tensoriel de deux algèbres de type fini réduites est une algèbre réduite.

PROPOSITION 2.42. — *Dans la catégorie des variétés algébriques affines, il existe des produits finis.*

Démonstration. On considère $X = \text{Spec } A$ et $Y = \text{Spec } B$, où A et B sont des algèbres de type fini. Motivé par le cas des variétés algébriques affines réduites, nous considérons l'algèbre $A \otimes_k B$. Cette algèbre est encore de type fini. On peut considérer la variété algébrique $Z = \text{Spec}(A \otimes B)$, munie des morphismes $Z \xrightarrow{p} X$ et $Z \xrightarrow{q} Y$ associés aux morphismes d'algèbres $A \longrightarrow A \otimes B$ et $B \longrightarrow A \otimes B$ définis par $a \mapsto a \otimes 1$ et $b \mapsto 1 \otimes b$. Vérifions la propriété universelle ; soit $S = \text{Spec } C$ une variété algébrique affine : d'après

le théorème 2.32 et la propriété universelle du produit tensoriel des algèbres A et B on a

$$\begin{aligned} \text{Mor}(S, Z) &\simeq \text{Hom}_{\text{alg}}(A \otimes B, C) \\ &\simeq \text{Hom}_{\text{alg}}(A, C) \times \text{Hom}_{\text{alg}}(B, C) \\ &\simeq \text{Mor}(S, X) \times \text{Mor}(S, Y) \end{aligned}$$

Il est clair que cette bijection est donnée par $f \mapsto (pf, qf)$. Ceci démontre la proposition. \square

REMARQUE 2.43. — Si X est une variété algébrique, le préfaisceau sur S défini par $U \mapsto \text{Mor}(U, X)$ est un faisceau. Il en résulte que la variété $\text{Spec}(A \otimes B)$, munie des projections p et q est aussi le produit dans la catégorie de toutes les variétés algébriques. Remarquons par ailleurs que l'ensemble sous-jacent à $X \times Y$ est bien le produit au sens ordinaire. (Dans le cadre des schémas il y a bien des produits finis, mais cette propriété ne subsiste pas).

THÉORÈME 2.44. — *Il existe, dans la catégorie des variétés algébriques sur k , des produits finis.*

Démonstration. Il suffit de montrer que le produit de deux variétés algébriques existe. Soient X et Y deux variétés algébriques. On considère des recouvrement ouverts affines U_i et V_j de X et Y respectivement. Alors l'ensemble produit $Z = X \times Y$ est recouvert par les variétés algébriques affines $Z_{ij} = U_i \times V_j$ qu'on vient de définir. On munit le produit Z de la topologie finale pour les inclusions $Z_{ij} \hookrightarrow Z$: autrement dit une partie $V \subset Z$ est ouverte si $V \cap Z_{ij}$ est ouvert dans Z_{ij} . Pour cette topologie, les Z_{ij} sont des ouverts ; l'intersection $Z_{ij} \cap Z_{k\ell}$ s'identifie à l'ouvert produit $U_{ik} \times V_{j\ell}$. C'est un ouvert sur lequel les structures de variétés de Z_{ij} et $Z_{k\ell}$ coïncident : on peut en effet recouvrir les ouverts U_{ik} et $V_{j\ell}$ par des ouverts affines W_p et T_q respectivement, et les deux structures précédentes coïncident avec celle de la variété algébrique produit $W_p \times T_q$. Il résulte du théorème 2.37 qu'il existe un faisceau d'anneau \mathcal{O}_Z et des isomorphismes

$$\mathcal{O}_Z|_{Z_{ij}} = \mathcal{O}_{Z_{ij}}.$$

Les morphismes $Z_{ij} \longrightarrow U_i$ et $Z_{ij} \longrightarrow V_j$ se recollent également pour donner des morphismes $Z \longrightarrow X$ et $Z \longrightarrow Y$ (dont les applications sous-jacentes sont les projections canoniques). Vérifions la propriété universelle de produit. Soient $f : S \longrightarrow X$ et $g : S \longrightarrow Y$ un couple de morphismes ; on peut recouvrir S par des ouverts S_{ij} tels que $f(S_{ij}) \subset U_i$ et $g(S_{ij}) \subset V_j$. Les restrictions de f et g à S_{ij} fournissent un morphisme $S_{ij} \longrightarrow Z_{ij} \subset Z$; ces morphismes coïncident sur les intersection $S_{ij} \cap S_{k\ell}$. Ceci définit

un morphisme $S \longrightarrow Z$ qui se projette sur (f, g) . Montrons maintenant l'unicité. Si $h : S \longrightarrow Z$ est un morphisme qui se projette sur $(f, g) \in \text{Mor}(S, X) \times \text{Mor}(S, Y)$, on recouvre S ouvert S_{ij} tels que $h(S_{ij}) \subset U_i \times V_j$. Alors la projection de $h|_{S_{ij}}$ sur U_i (resp. V_j) est $f|_{S_{ij}}$ (resp. $g|_{S_{ij}}$). Ceci détermine $h|_{S_{ij}}$ et par suite h est déterminé de manière unique. \square

Exercice 2.5

Soient X et Y deux variétés algébriques, et $(x, y) \in X \times Y$. On a un morphisme d'algèbres

$$\mathcal{O}_{X,x} \otimes \mathcal{O}_{Y,y} \longrightarrow \mathcal{O}_{X \times Y, (x,y)}$$

Montrer que ce n'est pas en général un isomorphisme.

2.9. Séparation

Sous-variétés fermées d'une variété algébrique

LEMME 2.45. — *Soit X une variété algébrique, et $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_X$ un idéal de \mathcal{O}_X . Le support Y de $\mathcal{O}_X/\mathcal{J}$ est un fermé.*

Démonstration. Le support du faisceau $\mathcal{O}_X/\mathcal{J}$ est l'ensemble des points $x \in X$ où le germe 1_x n'est pas nul. Le complémentaire est trivialement un ouvert. \square

DÉFINITION 2.46. — *Soient X une variété algébrique, et $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_X$ un idéal de \mathcal{O}_X et Y le support de $\mathcal{O}_X/\mathcal{J}$. Si l'espace annelé $(Y, \mathcal{O}_X/\mathcal{J}|_Y)$ est une variété algébrique, on dit que c'est une sous-variété fermée⁴.*

Exemple.

Soit X une variété algébrique et x un point de X . L'idéal de \mathcal{O}_X des sections locales qui s'annulent en x définit une sous-variété fermée, dont le faisceau structural est le faisceau constant k .

Si (Y, \mathcal{O}_Y) est une sous-variété fermée de (X, \mathcal{O}_X) , on dispose d'un morphisme $i : (Y, \mathcal{O}_Y) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$. Le morphisme de faisceaux en algèbres $\mathcal{O}_X \longrightarrow i_*(\mathcal{O}_Y)$ est surjectif. Il en résulte qu'une sous-variété fermée est un sous-objet au sens des catégories : pour toute variété S , l'application $\text{Mor}(S, Y) \longrightarrow \text{Mor}(S, X)$ définie par $f \mapsto if$ est injective.

⁴ Souvent on dit que c'est un sous-schéma fermé.

DÉFINITION 2.47. — Soit $f : Z \longrightarrow X$ un morphisme de variétés algébriques. On dit que f est un plongement fermé ⁵ si f se factorise à travers une sous-variété fermée $Y \subset X$ par un isomorphisme $g : Z \longrightarrow Y$.

Exemple

Soit A une algèbre de type fini, et $X = \text{Spec}(A)$ la variété affine associée. Pour tout idéal $I \subset A$ le morphisme canonique $\text{Spec}(A/I) \longrightarrow \text{Spec}(A)$ est un plongement fermé sur une sous-variété fermée de X . On verra plus tard que toute sous-variété fermée de X est de cette forme. Cette propriété qui fait appel au théorème de structure des faisceaux algébriques cohérents sur les variétés affines sera utilisée sans démonstration pour l'instant. On obtient ainsi une correspondance bijective entre l'ensemble des idéaux de A et l'ensemble des sous-variétés fermées de X . Dans cette correspondance, aux idéaux égaux à leur radical correspondent les sous-variétés fermées réduites de X .

Exercice 2.6

Soit $P \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ un polynôme irréductible. Démontrer que l'idéal I engendré par P est premier. En déduire que l'anneau des fonctions régulières sur le fermé $X = V(P)$ est isomorphe au quotient $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)/I$.

Exemple

Soit $I \subset \mathcal{O}(\mathbb{A}^{n+1})$ un idéal homogène (c'est-à-dire engendré par des polynômes homogènes) de $\mathcal{O}(\mathbb{A}^{n+1})$. On considère la sous-variété fermée $Y = \text{Spec}(\mathcal{O}(\mathbb{A}^{n+1})/I)$ de \mathbb{A}^{n+1} définie par I . Cette variété est invariante par l'action du groupe multiplicatif k^* . On considère le quotient $X = Y - \{0\}/k^*$, muni de la projection $\pi : Y - \{0\} \longrightarrow X$ équipé de la topologie quotient et du faisceau en algèbres $\mathcal{O}_X = \pi_*(\mathcal{O}_{Y-\{0\}})^{k^*}$ des sections invariantes par l'action de k^* .

Exercice 2.7

1) L'espace annelé $X = W(I)$ ainsi construit est une sous-variété algébrique fermée de l'espace projectif \mathbb{P}_n .

2) Toute sous-variété de \mathbb{P}_n est de cette forme.

2) L'application de l'ensemble des idéaux homogènes I de $\mathcal{O}(\mathbb{A}^{n+1})$ dans l'ensemble des sous-variété fermées qui associe à I associe la sous-variété fermées $W(I)$ est surjective, mais n'est pas injective.

⁵ On dit aussi immersion fermée. Le mot immersion ayant un sens plus faible en géométrie différentielle, nous éviterons cette terminologie.

Séparation

Cette propriété n'a rien à voir avec la séparation de l'espace topologique sous-jacent, qui n'arrive presque jamais.

Soit X une variété algébrique. D'après la propriété universelle du produit $X \times X$, il existe un morphisme $X \longrightarrow X \times X$ qui se projette sur $(\text{id}_X, \text{id}_X)$. Ce morphisme est appelé le morphisme diagonal ; l'image de l'application continue sous-jacente au morphisme diagonal est la diagonale Δ de $X \times X$.

DÉFINITION 2.48. — *On dit que X est une variété séparée si la diagonale Δ est un fermé de $X \times X$.*

Exemple

Les variétés algébriques affines sont de variétés séparées ; en effet, soit X est une telle variété, et Δ la diagonale de $X \times X$. Si $(x, y) \notin \Delta$ il existe $f \in \mathcal{O}(X)$ telle que $f(x) \neq f(y)$. Alors $\text{pr}_1^*(f) - \text{pr}_2^*(f) \in \mathcal{O}(X \times X)$ s'annule sur la diagonale et ne s'annule pas en (x, y) . Donc le complémentaire de la diagonale est un ouvert. Bien entendu, l'espace topologique sous-jacent à $X \times X$ n'est pas en général séparé.

Exemple

Soit X la variété algébrique (réduite) obtenue en quotientant $\mathbb{A}^1 \times \{0, 1\}$ par la relation d'équivalence qui identifie $(x, 0)$ avec $(x, 1)$ quand $x \neq 0$. Désignons par 0 la classe de $(0, 0)$ et $0'$ celle de $(0, 1)$. Cette variété algébrique n'est pas séparée. Dans la fermeture de la diagonale, on trouve les points $(0', 0)$ et $(0, 0')$ qui ne font pas partie de la diagonale.

PROPOSITION 2.49. — *Si X est une variété algébrique séparée, le morphisme diagonal $\delta : X \longrightarrow X \times X$ est un plongement fermé.*

Démonstration. Considérons la projection $\text{pr}_1 : X \times X \longrightarrow X$. On a $\text{pr}_1 \delta = \text{id}_X$ ce qui prouve que δ est un homéomorphisme sur son image. Considérons le morphisme canonique⁶ $\delta^* : \mathcal{O}_{X \times X} \longrightarrow \delta_* \mathcal{O}_X$ dont on désigne par \mathcal{J} le noyau. Ce morphisme est surjectif : en effet, si $f \in \mathcal{O}_X(U)$, considérons la section $f_1 = \text{pr}_1^*(f)$ de $\mathcal{O}_{X \times X}(U \times X)$ image réciproque par la projection pr_1 . On a alors $\delta^*(f_1) = f$. Il en résulte que le morphisme δ est un isomorphisme de X sur la sous-variété définie par l'idéal \mathcal{J} .

⁶ Même si les variétés ne sont pas réduites, on utilisera désormais la notation f^* pour désigner le morphisme induit sur les faisceaux structuraux par le morphisme f . Bien sûr, f^* n'est pas dans le cas des variétés algébriques non réduites déterminée par l'application continue sous-jacente

Voyons comment se traduisent les conditions de séparation sur les variétés définies par recollement de variétés algébriques réduites et séparées. On reprend les notations de la section 2.7.

LEMME 2.50. — Soit (X, \mathcal{A}) une variété algébrique munie d'un atlas algébrique $\mathcal{A} = \{\alpha_i : U_i \longrightarrow U'_i\}$ de source des ouverts U_i de X et de but des variétés algébriques séparées U'_i . Alors la variété algébrique X est séparée si et seulement si pour tout couple de cartes locales distinctes α_i et α_j , le graphe du changement de cartes $\phi_{i,j} : U'_{i,j} \longrightarrow U'_{j,i}$ est fermé dans le produit $U'_i \times U'_j$ (muni de la topologie de Zariski).

Démonstration. Considérons les cartes locales $\alpha_i : U_i \longrightarrow U'_i$. Les ouverts $U_i \times U_j$ recouvrent $X \times X$. La diagonale Δ de $X \times X$ est fermée dans $X \times X$ si et seulement si $\Delta \cap (U_i \times U_j)$ est fermé dans le produit $U_i \times U_j$. Or par l'homéomorphisme $\alpha_i \times \alpha_j$, l'image de $\Delta \cap (U_i \times U_j)$ est le graphe du changement de cartes. Il revient donc au même de demander que pour tout couple de cartes locales α_i et α_j le graphe du changement de cartes soit fermé dans $U'_i \times U'_j$. Comme c'est bien sûr le cas si $i = j$ à cause de la séparation de U_i . D'où l'énoncé. \square

Exemple

Reprenons l'exemple 1 de la section 2.7 ; le graphe du changement de cartes est l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$ tels que $xy = 1$. C'est donc bien un fermé de Zariski. Donc la droite projective \mathbb{P}_1 est une variété algébrique séparée.

Exercice 2.8

Démontrer que l'espace projectif \mathbb{P}_n est une variété algébrique séparée.

Exercice 2.9

Un ouvert d'une variété algébrique séparée est séparé. Une sous-variété fermée d'une variété algébrique séparée est séparée.

Exercice 2.10

Dans une variété algébrique séparée, l'intersection de deux ouverts affines est un ouvert affine.

Désormais toutes les variétés algébriques considérées seront supposées séparées.

Image réciproque d'une sous-variété

PROPOSITION 2.51. — Soient $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de variété algébriques, et $Z \subset Y$ une sous-variété fermée. Il existe une unique sous-variété fermée de X , notée $f^{-1}(Z)$, caractérisée par la propriété suivante : le morphisme induit $f^{-1}(Z) \longrightarrow Y$ se factorise par Z , et le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(Z) & \hookrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \hookrightarrow & Y \end{array}$$

est cartésien.

La dernière propriété signifie que pour toute variété algébrique S et tout morphisme $u : S \longrightarrow X$ tel que le morphisme fu se factorise à travers Z le morphisme u se factorise (obligatoirement de manière unique) à travers $f^{-1}(Z)$.

Démonstration. Etant donné un morphisme de variétés algébriques $X \longrightarrow Y$, et une sous-variété fermée Z de Y définie par un idéal \mathcal{J} de \mathcal{O}_Y on considère l'espace annelé $f^{-1}(Z)$ définie par l'idéal $f^{-1}(\mathcal{J})\mathcal{O}_X$. Son support est l'ensemble des points x de X tels que $\mathcal{O}_{X,x} \neq \mathcal{J}_{f(x)}\mathcal{O}_{X,x}$, c'est-à-dire tels que $\mathcal{J}_{f(x)}\mathcal{O}_{X,x}$ soit contenu dans l'idéal maximal \mathfrak{m}_x de $\mathcal{O}_{X,x}$. Cette propriété signifie que l'idéal $\mathcal{J}_{f(x)}$ est contenu dans l'idéal image réciproque de \mathfrak{m}_x par l'homomorphisme local

$$f^* : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$$

c'est-à-dire l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$. Cela équivaut à $\mathcal{J}_{f(x)} \neq \mathcal{O}_{Y,f(x)}$. Ainsi, le support de $f^{-1}(Z)$ est, au moins ensemblistement, l'image réciproque de Z . Montrons que $f^{-1}(Z)$, muni du faisceau en algèbres $\mathcal{O}_X/f^{-1}(\mathcal{J})\mathcal{O}_X$, restreint à $f^{-1}(Z)$, est une variété algébrique. La question est locale. On peut supposer que $X = \text{Spec } A$, $Y = \text{Spec } B$, où A et B sont des algèbres de type fini, et que la sous-variété fermée Z est définie par un idéal $I \subset B$, de sorte que $Z = \text{Spec}(B/I) \subset \text{Spec}(B)$. Le morphisme f est donné par $\phi : B \longrightarrow A$. Alors

$$f^{-1}(Z) = \text{Spec}(A/IA)$$

En effet, il est clair que les espaces topologiques sous-jacents sont les mêmes : en effet, l'algèbre locale du faisceau $(\mathcal{O}_X/f^{-1}(\mathcal{J})\mathcal{O}_X|_{f^{-1}(Z)})$ est $(A/IA)_{\mathfrak{m}}$ au point de

$\text{Spec } A$ défini par l'idéal maximal \mathfrak{m} . Le support de ce faisceau est constitué des points correspondant aux idéaux maximaux \mathfrak{m} de A qui contiennent IA : c'est exactement le fermé $V(IA) = \text{Spec}(A/IA) \subset \text{Spec}(A)$. Il reste à prouver que les faisceaux en algèbres sont les mêmes : le faisceau $\mathcal{O}_X/f^{-1}(\mathcal{J})\mathcal{O}_X$ est associé au préfaisceau qui associe à l'ouvert principal X_α (pour $\alpha \in A$) l'algèbre quotient $A_\alpha/(IA)_\alpha$; cette algèbre s'identifie à l'algèbre des fractions $(A/IA)_\alpha$ où IA_α est l'idéal de A_α engendré par l'image de I par le morphisme d'algèbres $f^* : B \longrightarrow A_\alpha$. La restriction de ce faisceau au fermé $V(IA)$ n'est autre que le faisceau associé à l'algèbre de type fini A/IA . Ceci prouve que $f^{-1}(Z)$ est une variété algébrique. Il reste à prouver la propriété universelle. C'est une vérification sans difficultés. \square

Exemple.

Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de variétés algébriques. L'image réciproque d'un point $y \in Y$ est une sous-variété fermée de X , qu'on appelle la fibre de f en x . Même si X et Y sont réduites, il n'y a aucune raison pour que cette fibre soit réduite. Par exemple, si on prend $X = Y = \mathbb{A}^1$ et pour f l'application régulière $x \mapsto x^2$, la sous-variété de Y réduite au point $\eta \in Y$ est définie par l'idéal maximal $\mathfrak{n} = (y - \eta)$ de $k[y]$, et la fibre $X_\eta = f^{-1}(\eta)$ au dessus de η est $\text{Spec}(k[x]/(x^2 - \eta))$. L'algèbre $k[x]/(x^2 - \eta)$ est réduite si $\eta \neq 0$. Mais si $\eta = 0$, cette algèbre n'est pas réduite : c'est ce qu'on appelle le point double de support 0. La variété réduite associée est bien sûr $\text{Spec}(k[x]/(x))$: c'est la sous-variété algébrique de \mathbb{A}^1 réduite au point 0.

Noyau des doubles flèches

PROPOSITION 2.52. — *Soient $f : X \longrightarrow Y$ et $g : X \longrightarrow Y$ deux morphismes de variétés algébriques. Il existe une sous-variété algébrique fermée $N \subset X$ caractérisée par la propriété universelle suivante : pour toute variété algébrique S on a une suite exacte ensembliste*

$$\text{Mor}(S, N) \longrightarrow \text{Mor}(S, X) \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} \text{Mor}(S, Y)$$

Ceci signifie que tout morphisme $u : S \longrightarrow X$ tel que $fu = gu$ se factorise (de manière unique) à travers N .

Démonstration. Puisque Y est une variété séparée, le noyau N en question est l'image réciproque de la diagonale de $Y \times Y$ par le morphisme $(f, g) : X \longrightarrow Y \times Y$. La propriété universelle résulte de celle de l'image réciproque. \square

Exercice 2.11

Soient X une variété algébrique, et U et V deux ouverts affines de X . Démontrer que l'intersection $U \cap V$ est un ouvert affine.

Exercice 2.12

Soient $X \xrightarrow{f} S$ et $Y \xrightarrow{g} S$ deux morphismes de variétés algébriques. Montrer qu'il existe une variété algébrique notée $X \times_S Y$ munie de morphismes $\text{pr}_1 : X \times_S Y \longrightarrow X$ et $\text{pr}_2 : X \times_S Y \longrightarrow Y$ caractérisée par le fait que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X \times_S Y & \xrightarrow{\text{pr}_2} & Y \\ \text{pr}_1 \downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

est cartésien. Cette variété algébrique s'appelle le produit fibré de X et Y au-dessus de S .

2.10. Variétés projectives

DÉFINITION 2.53. — *On dit qu'une variété algébrique est projective si elle est isomorphe à une sous-variété fermée de l'espace projectif.*

PROPOSITION 2.54. — *Sur une variété projective et réduite, une fonction régulière ne prend qu'un nombre fini de valeurs.*

Il en résulte en particulier que $\dim_k \mathcal{O}(X) < \infty$. On verra plus tard que ce dernier résultat reste vrai même sur une variété projective non réduite. L'énoncé ci-dessus résulte du théorème de propreté.

THÉORÈME 2.55. — *(Théorème de propreté) Soit X une variété projective. Pour toute variété Y , la projection canonique $\text{pr}_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ est fermée.*

Démonstration de la proposition 2.54

Soit $f : X \longrightarrow k$ une fonction régulière. Considérons l'application composée

$$\bar{f} : X \longrightarrow k \hookrightarrow \mathbb{P}_1$$

L'image est d'après le théorème de propreté un fermé de \mathbb{P}_1 . Puisque ce n'est pas \mathbb{P}_1 , c'est un nombre fini de points. \square

Remarque préliminaire

La projection $\pi : \mathbb{A}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}_n$ identifie les fermés de \mathbb{P}_n aux fermés de $\mathbb{A}^{n+1} - \{0\}$ invariants par homothétie ; ils sont induits par les fermés de \mathbb{A}^{n+1} invariants par homothétie. Un tel fermé est défini par des équations homogènes

$$H_1 = \dots = H_\ell = 0$$

Il est réduit à $\{0\}$ si et seulement si la racine de l'idéal (H_1, \dots, H_ℓ) est égale à l'idéal maximal \mathfrak{m}_0 de $\mathcal{O}(\mathbb{A}^{n+1})$ des fonctions qui s'annulent en 0. Ceci résulte du théorème des zéros de Hilbert.

Démonstration du théorème 2.55

On se ramène de manière évidente au cas où $X = \mathbb{P}_n$ et $Y = \mathbb{A}^p$. Désignons par $\pi : \mathbb{A}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}_n$ la projection canonique. Soit $F \subset \mathbb{P}_n \times \mathbb{A}^p$ un fermé, $G = (\pi \times \text{id}_{\mathbb{A}^p})^{-1}(F)$ le fermé image réciproque de F dans $(\mathbb{A}^{n+1} - \{0\}) \times \mathbb{A}^p$, et \overline{G} son adhérence. Ce fermé est défini par F les points $(x, y) \in (\mathbb{A}^{n+1} - \{0\}) \times \mathbb{A}^p$ satisfaisant aux équations polynômiales

$$H_1(x, y) = 0, \dots, H_\ell(x, y) = 0$$

et on peut supposer que H_i est un polynôme homogène de degré $d_i \geq 0$ par rapport à x . On désigne par $H_{i,y}$ le polynôme homogène $x \mapsto H_i(x, y)$. On dispose ainsi d'une famille finie de polynômes homogènes qui dépendent du paramètre y .

Soit $y_0 \notin \text{pr}_2(F)$. Les polynômes homogènes H_{i,y_0} ($i = 1, \dots, \ell$) ont au plus l'origine comme zéro commun. Il résulte du théorème des zéros de Hilbert qu'il existe un entier r tel que

$$\mathfrak{m}_0^r \subset (H_{1,y_0}, \dots, H_{\ell,y_0})$$

Désignons par S_m l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré m sur \mathbb{A}^{n+1} . L'inclusion ci-dessus signifie que l'application linéaire canonique

$$\begin{aligned} \bigoplus_{i=1}^{\ell} S_{r-d_i} &\longrightarrow S_r \\ (Q_1, \dots, Q_\ell) &\longmapsto \sum_{i=1}^{\ell} Q_i H_{i,y_0} \end{aligned}$$

est surjective. Elle reste évidemment surjective quand on remplace y_0 par y , pourvu que y soit suffisamment voisin de y_0 . Ceci signifie que le fermé de \mathbb{P}_n défini par les polynômes homogènes $H_{1,y}, \dots, H_{\ell,y}$ est encore vide. Ainsi, le complémentaire de $\text{pr}_2(F)$ est un ouvert. Autrement dit, $\text{pr}_2(F)$ est un fermé. \square

2.11. Le plongement de Segre

Un produit de variétés projectives est une variété projective. Cela résulte de l'énoncé suivant :

PROPOSITION 2.56. — *La variété produit $\mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_m$ est isomorphe à un fermé de l'espace projectif \mathbb{P}_{nm+n+m} .*

Démonstration. Si E est un espace vectoriel de dimension n , on obtient sur $\mathbb{P}(E) = (E - \{0\})/k^*$ une structure de variété isomorphe à \mathbb{P}_n en choisissant une base. Cette structure est indépendante du choix de la base.

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension $n + 1$ et $m + 1$ respectivement. Considérons l'application

$$\begin{aligned} E - \{0\} \times F - \{0\} &\longrightarrow E \otimes F - \{0\} \\ (x, y) &\longmapsto x \otimes y \end{aligned}$$

Cette application est compatible avec l'action du groupe multiplicatif k^* et définit par passage au quotient une application

$$\phi : \mathbb{P}(E) \times \mathbb{P}(F) \longrightarrow \mathbb{P}(E \otimes F)$$

Montrons qu'elle est régulière ; considérons des bases $(e_i)_{i=0, \dots, n}$ et $(f_j)_{j=0, \dots, m}$ de E et F respectivement. On désigne par x_i (resp. y_j) les coordonnées d'un point $x \in E$ (resp. $y \in F$) dans ces bases. L'application ϕ est donnée par

$$([(x_i)_i], [(y_j)_j]) \mapsto [(x_i y_j)_{i,j}].$$

Considérons l'ouvert $W_{0,0} \subset \mathbb{P}(E \otimes F)$ des points $[u = \sum_{i,j} u_{i,j} e_i \otimes f_j]$ tels que $u_{0,0} \neq 0$. L'image réciproque $\phi^{-1}(W_{0,0})$ de cet ouvert est l'ouvert des couples $([x], [y])$ tels que $x_0 \neq 0$ et $y_0 \neq 0$. Soit $A_{n,m}$ le sous-espace affine de $k^{n+1} \otimes k^{m+1}$ des tenseurs donnés par les matrices $(u_{i,j})_{i,j}$ telles que $u_{0,0} = 1$. Dans les cartes usuelles associées aux structures de variétés algébriques sur les trois espaces projectifs ci-dessus, l'expression de ϕ est l'application $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m \longrightarrow A_{n,m} \subset k^{n+1} \otimes k^{m+1}$ définie par

$$((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_m)) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_n \\ y_1 & x_1 y_1 & \dots & x_n y_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_m & x_1 y_m & \dots & x_n y_m \end{pmatrix}$$

Cette application est évidemment régulière. De plus, il est clair que c'est un isomorphisme sur le fermé algébrique de $A_{n,m}$ défini par les matrices de rang ≤ 1 . On peut évidemment

permuter les coordonnées ; on obtient ainsi que ϕ est un isomorphisme de $\mathbb{P}(E) \times \mathbb{P}(F)$ sur le sous-espace fermé de $\mathbb{P}(E \otimes F)$ des classes $[u]$ de tenseurs $u \in E \otimes F$ de rang 1, c'est-à-dire définissant une application linéaire $E^* \longrightarrow F$ de rang un. \square

Le morphisme $\phi : \mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_m \longrightarrow \mathbb{P}_{nm+n+m}$ ainsi obtenu est appelé plongement de Segre.

Exemple

Par le plongement de Segre, $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ s'identifie à la sous-variété algébrique fermée de \mathbb{P}_3 des classes de matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ non nulles et telles que $ad - bc = 0$. On obtient ainsi une quadrique de \mathbb{P}_3 , définie par une forme quadratique non dégénérée sur l'espace vectoriel k^4 .

Exemple

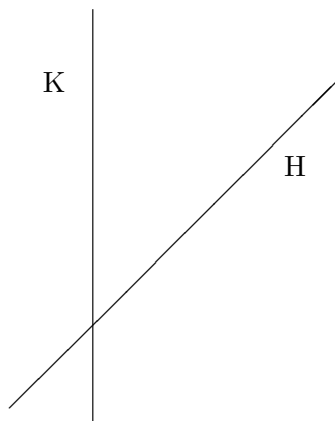
Par le plongement de Segre, $\mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2$ s'identifie à la sous-variété algébrique fermée de $\mathbb{P}(k^3 \otimes k^3) \simeq \mathbb{P}_9$ des classes d'équivalence d'applications linéaires de rang 1. Ce fermé est l'intersection de 9 quadriques.

COROLLAIRE 2.57. — *Un produit de variétés projectives est une variété projective.*

2.12. La grassmannienne

Soit E un espace vectoriel de dimension $n + m$. La grassmannienne $\text{Grass}(n, E)$ désigne l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension n de E . On va munir cet ensemble d'une structure de variété algébrique réduite.

Soit K un sous-espace vectoriel de dimension m de E . Considérons l'ensemble $U_K \subset \text{Grass}(n, E)$ des points H tels que $H \cap K = \{0\}$.

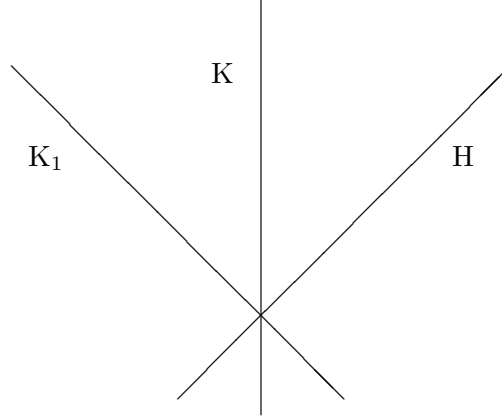


On peut identifier U_K à un fermé algébrique de l'espace vectoriel $L(E, K)$ des applications linéaires de E dans K en associant à H la projection $p_H : E \longrightarrow K$ de noyau H . Les

projections $E \longrightarrow K$ constituent un sous-espace affine A_K de $L(E, K)$: c'est l'ensemble des applications linéaires $f : E \longrightarrow K$ telles que $f|_K = \text{id}_K$, c'est-à-dire l'image réciproque de id_K par l'application linéaire $f \mapsto f|_K$. On munit l'ensemble $\text{Grass}(n, E)$ de la topologie la topologie finale relative aux inclusions $A_K \hookrightarrow \text{Grass}(n, E)$.

Changement de cartes

Considérons maintenant deux sous-espaces vectoriels K et K_1 de dimension m .



Soit $H \in U_K$, et $p = p_H$. Le point H appartient à U_{K_1} si et seulement si $\ker p \cap K_1 = \{0\}$, c'est-à-dire si $p|_{K_1} : K_1 \longrightarrow K$ est inversible. Cette condition détermine dans l'espace affine A_K un ouvert de Zariski U'_{K, K_1} . Il en résulte que U_K est un ouvert de $\text{Grass}(n, E)$.

Si p appartient à cet ouvert, le sous-espace H est aussi le noyau de la projection $p_1 : E \longrightarrow K_1$ définie par

$$p_1 = (p|_{K_1})^{-1} \circ p$$

L'application $A_K \longrightarrow A_{K_1}$ définie par $p \mapsto (p|_{K_1})^{-1} \circ p$ est induite par une application régulière, ce qui prouve qu'elle est régulière. Son image est l'ouvert $U'_{K_1, K}$ et le changement de cartes est évidemment un isomorphisme de variétés algébriques réduites. On obtient ainsi un atlas algébrique sur $\text{Grass}(m, E)$. Il reste à vérifier que $\text{Grass}(n, E)$ est noethérien et que la variété algébrique ainsi obtenue est séparée.

Condition de finitude

On montre que l'on peut recouvrir l'espace topologique $\text{Grass}(n, E)$ par un nombre fini d'ouverts U_K . Soit une base (e_1, \dots, e_{n+m}) de E . Tout sous-espace vectoriel $H \in \text{Grass}(n, E)$ est le noyau d'une application linéaire surjective $f : E \longrightarrow k^m$, dont on écrit la matrice (f_i^j) . Cette matrice a un mineur d'ordre m non nul, ce qui détermine une partie $S \subset \{1, \dots, n+m\}$ à m éléments. Soit K le sous-espace engendré par les vecteurs $(e_j)_{j \in S}$.

Le point H appartient à U_K , et comme il n'y a qu'un nombre fini de tels ouverts, ceci montre que l'espace topologique $\text{Grass}(n, E)$ est satisfaite.

Séparation

Il s'agit de vérifier que le graphe du changement de cartes est fermé dans $A_K \times A_{K_1}$. Il suffit de montrer que ce graphe coïncide dans $A_K \times A_{K_1}$ avec le fermé des couples (p, p_1) tels que

$$p|_{K_1} \circ p_1 = p.$$

Cette égalité est évidemment satisfaite pour les points du graphe. Dans l'autre sens, si (p, p_1) est un couple satisfaisant à cette relation, par restriction à K on obtient $p|_{K_1} \circ p_1|_K = \text{id}_K$; il en résulte que p appartient à l'ouvert U'_{K, K_1} , et par suite (p, p_1) appartient au graphe du changement de cartes. Ceci prouve la séparation.

PROPOSITION 2.58. — *La grassmannienne $\text{Grass}(n, E)$ est une variété algébrique projective.*

Démonstration. Il s'agit de trouver un isomorphisme de $\text{Grass}(n, E)$ sur un sous-variété fermée d'un espace projectif. On utilise pour ceci l'algèbre extérieure. Considérons l'application

$$\phi : \text{Grass}(n, E) \longrightarrow \mathbb{P}(\wedge^n E)$$

qui associe au sous-espace vectoriel H la droite vectorielle $\wedge^n H \subset \wedge^n E$.

Montrons que cette application est régulière. Il suffit de le vérifier dans l'ouvert U_K . On peut choisir une base $(e_i)_{i=1, \dots, n+m}$ de E de sorte que K soit le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $(e_j)_{n < j \leq n+m}$. Soit H_0 le sous-espace engendré par les n premiers vecteurs de base. Si $H \in U_K$, le sous-espace H est le graphe d'une application linéaire $u : H_0 \longrightarrow K$ et la projection $p : E \longrightarrow K$ de noyau H est donnée par $(-u \quad \text{id}_K)$ dans la somme directe $E = H_0 \oplus K$. La bijection $L(H_0, K) \longrightarrow U_K$ qui envoie u sur H est un isomorphisme de variétés algébriques affines réduites. Les composantes de $\wedge^n v$ où $v = \begin{pmatrix} 1 \\ u \end{pmatrix}$ sont les mineurs maximaux de cette application linéaire dans les bases ci-dessus, donc des polynômes en les coefficients de la matrice de u . Il en résulte que l'application ϕ est régulière.

Pour toute suite croissante $i_1 < \dots < i_n$, on pose $e_{i_1, \dots, i_n} = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n}$. On obtient ainsi une base de $\wedge^n E$. Pour $w \in \wedge^n E$ on écrit

$$w = \sum_{i_1, \dots, i_n} w_{i_1, \dots, i_n} e_{i_1, \dots, i_n}$$

L'ouvert U_K est exactement l'image réciproque par ϕ de l'ouvert $W_{1, \dots, n}$ de $\mathbb{P}(\wedge^n E)$ des points $[w]$ tels que $w_{1, \dots, n}$ soit non nul. D'autre part, si $H \in U_K$ est le graphe de u , si on

écrit

$$u(e_i) = \sum_{j=1, \dots, m} u_i^j e_{n+j}$$

la formule

$$(\wedge^n v)_{1, \dots, \hat{i}, \dots, n, n+j} = (-1)^{n-i} u_i^j$$

(où le chapeau indique qu'on a enlevé l'élément correspondant) permet de calculer u à partir de son image $[w] \in W_{1, \dots, n}$, et plus précisément des mineurs $w_{1, \dots, \hat{i}, \dots, n, n+j}$. Les autres mineurs sont alors des polynômes en les u_i^j . Ces polynômes déterminent un fermé dans l'ouvert affine $W_{1, \dots, n}$; ce fermé est exactement l'image de U_K . On a donc vérifié que ϕ est un isomorphisme sur une sous-variété fermée de $\mathbb{P}(\wedge^n E)$. Ce plongement s'appelle le plongement de Plücker. \square

Exercice 2.13

Soit E un espace vectoriel de dimension 4. Démontrer que la grassmannienne $\text{Grass}(2, E)$ est isomorphe à la quadrique de $\mathbb{P}(\wedge^2 E)$ définie par la forme quadratique

$$\begin{aligned} \wedge^2 E &\longrightarrow \wedge^4 E \simeq k \\ w &\longmapsto w \wedge w \end{aligned}$$

Exercice 2.14

Soient E un espace vectoriel de dimension n , et $S_r(E)$ l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré r sur E .

a) Démontrer l'application $E^* \longrightarrow S_r(E)$ définie par $u \mapsto u^r$ induit un isomorphisme (dit de Veronese)

$$\mathbb{P}(E^*) \hookrightarrow \mathbb{P}(S_r E)$$

sur une sous-variété fermée de $\mathbb{P}(S_r E)$.

b) Montrer que l'image réciproque d'un hyperplan de $\mathbb{P}(S_r E)$ est une hypersurface de degré n de $\mathbb{P}(E^*)$.

c) En déduire que le complémentaire d'une hypersurface dans un espace projectif est un ouvert affine.

Exercice 2.15

a) Soit $\text{GL}(n, k)$ le groupe des matrices inversibles à coefficients dans k . Montrer que c'est une variété algébrique affine.

b) Soit $\text{PGL}(n, k) = \text{GL}(n, k)/k^*$. Montrer que ce groupe peut être muni d'une structure de variété affine, compatible avec la structure de groupe.

3. Composantes irréductibles

DÉFINITION 3.1. — *Un espace topologique X non vide est dit réductible s'il peut s'écrire comme réunion de deux fermés distincts de X . Dans le cas contraire, on dit que X est irréductible.*

PROPOSITION 3.2. — *Soit X un espace topologique. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *l'espace X est irréductible ;*
- (ii) *tout ouvert non vide de X est partout dense ;*
- (iii) *deux ouverts non vides de X se rencontrent.*

PROPOSITION 3.3. — *Soit X une variété algébrique affine réduite, non vide, et $\mathcal{O}(X)$ l'algèbre des fonctions régulières sur X . Alors X est irréductible si et seulement si l'algèbre $\mathcal{O}(X)$ est intègre.*

Démonstration. Supposons que $X \subset \mathbb{A}^n$ soit réductible : il s'écrit $X = X_1 \cup X_2$, où X_1 et X_2 sont deux fermés distincts de X . Il existe alors pour $i = 1$ et 2 des fonctions régulières $f_i \in \mathcal{O}(X)$ s'annulant sur X_i et non identiquement nulles sur X . Alors $f_1 f_2$ est identiquement nulle. Ainsi, $\mathcal{O}(X)$ n'est pas intègre. Réciproquement si l'algèbre $\mathcal{O}(X)$ n'est pas intègre, elle contient deux éléments non nuls f, g non nuls et dont le produit est nul. Alors $X = V(f) \cup V(g)$ et les fermés $V(f)$ et $V(g)$ sont distincts de X ; donc X est réductible. \square

Exemple : L'espace topologique \mathbb{A}^n , muni de la topologie de Zariski, est irréductible.

Propriétés

1. L'adhérence d'une partie irréductible d'un espace topologique X est irréductible.
2. La réunion de deux ouverts irréductibles qui se rencontrent est irréductible.
3. L'image d'un espace topologique irréductible par une application continue est irréductible.
4. Le produit de deux variétés algébriques irréductibles est irréductible.

Démonstration. Soient X et Y deux variétés algébriques irréductibles, il s'agit de montrer que $X \times Y$ est irréductible. Soit $X \times Y = Z_1 \cup Z_2$ un recouvrement par deux fermés. Alors l'ensemble Y_i des points $y \in Y$ tels que $X \times \{y\} \subset Z_i$ est un fermé de Y , et ces deux fermés recouvrent Y . Donc l'un des deux, par exemple Y_1 est Y . Mais on a alors $Z_1 = X \times Y$. \square

5. Soit \mathfrak{p} un idéal premier de $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$. Alors $V(\mathfrak{p})$ est un fermé irréductible, puisque d'après le théorème des zéros de Hilbert l'algèbre des fonctions régulières sur $V(\mathfrak{p})$ est $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)/\mathfrak{p}$ et est intègre par définition. Alors l'application

$$\mathfrak{p} \longmapsto V(\mathfrak{p})$$

est une bijection décroissante de l'ensemble des idéaux premiers de $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ sur l'ensemble des fermés irréductibles de \mathbb{A}^n . En particulier, si P est un polynôme irréductible, le fermé $V(P)$ est irréductible.

DÉFINITION 3.4. — *Soit X un espace topologique noethérien. Une composante irréductible de X est un fermé irréductible $Y \subset X$ maximal.*

THÉORÈME 3.5. — *Soit X un espace topologique noethérien.*

- (i) *L'ensemble des composantes irréductibles de X est fini.*
- (ii) *Soient X_1, \dots, X_m ces composantes irréductibles. Alors*

$$X = X_1 \cup \dots \cup X_m$$

et tout fermé irréductible de X est contenu dans une des composantes irréductibles.

Démonstration. On va montrer d'abord que tout fermé $Y \subset X$ non vide s'écrit comme réunion finie de fermés irréductibles. Sinon, l'espace topologique X étant noethérien, l'ensemble \mathcal{F} des fermés non vides qui ne satisfont pas à cette condition aurait un élément minimal Y ; alors Y ne serait pas irréductible : il pourrait donc s'écrire $Y = Y_1 \cup Y_2$, où Y_1 et Y_2 sont deux fermés irréductibles distincts de Y . Mais alors soit $Y_1 \in \mathcal{F}$, soit $Y_2 \in \mathcal{F}$, ce qui contredit la minimalité de Y .

En particulier, $X = X_1 \cup \dots \cup X_m$, avec X_i irréductible, et on peut supposer de plus que X_i n'est pas contenu dans X_j pour $i \neq j$. Si Y est un fermé irréductible, on a alors

$$Y = \cup_{i=1}^m (Y \cap X_i)$$

et il résulte de la définition de l'irréductibilité qu'il existe un indice i tel que $Y \subset X_i$. Ceci entraîne que les X_i sont exactement les composantes irréductibles de X . \square

Exercice 3.1

1. L'espace projectif \mathbb{P}_n est irréductible.
2. La grassmannienne $\text{Grass}(n, k^{n+m})$ est irréductible.
3. La courbe de \mathbb{A}^2 des points (x, y) satisfaisant à l'équation $y^2 = x^3$ est irréductible.
4. Le fermé de $L(k^n, k^m)$ des matrices f de rang $\leq p$ est irréductible.

4. Fonctions rationnelles

Soit X une variété algébrique réduite. Considérons, sur l'ensemble des couples (U, f) , où U est un ouvert partout dense de X et $f : U \rightarrow k$ une application régulière, la relation d'équivalence définie par

$$(U, f) \sim (U', f') \text{ si } f|_{U \cap U'} = f'|_{U \cap U'}.$$

On désigne par $\text{Rat}(X)$ l'ensemble des classes d'équivalence : on le munit de manière évidente d'une structure d'algèbre. Quand X est irréductible et réduite, si f est une fonction régulière définie sur un ouvert non vide U , l'ensemble des points $x \in X$ tels que $f(x) \neq 0$ est partout dense, et sur cet ouvert la fonction $\frac{1}{f}$ définit un inverse pour f . Donc $\text{Rat}(X)$ est un corps.

Dans le cas général, remarquons que si U est un ouvert partout dense, on a $\text{Rat}(X) = \text{Rat}(U)$. Il en résulte que si $(X_i)_{i=1, \dots, k}$ sont les composantes irréductibles de X , on a un isomorphisme d'anneaux

$$\text{Rat}(X) \simeq \prod_{i=1}^k \text{Rat}(X_i).$$

DÉFINITION 4.1. — *Une variété algébrique est dite intègre si elle est irréductible et réduite.*

Exercice 4.1

Soit X une variété algébrique. Montrer l'équivalence des assertions suivantes

- (1) la variété X est irréductible et réduite ;
- (2) pour tout ouvert non vide $U \subset X$, l'algèbre $\mathcal{O}(U)$ des sections du faisceau structural est intègre ;
- (3) l'espace topologique sous-jacent à X est connexe, et pour tout $x \in X$, l'algèbre locale $\mathcal{O}_{X,x}$ est intègre.

PROPOSITION 4.2. — *Soit X une variété algébrique affine intègre, et $\mathcal{O}(X)$ l'algèbre des fonctions régulières sur X . Le corps des fractions $K(\mathcal{O}(X))$ de l'algèbre intègre $\mathcal{O}(X)$ est isomorphe à $\text{Rat}(X)$.*

Démonstration. A toute fraction $\frac{P}{Q}$ on associe la fonction régulière $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ définie sur l'ouvert des points $x \in X$ tels que $Q(x) \neq 0$. On obtient ainsi un homomorphisme de corps

$$K(\mathcal{O}(X)) \longrightarrow \text{Rat}(X).$$

Il reste à montrer que cet homomorphisme est surjectif. Soit (U, f) une fonction régulière définie sur un ouvert non vide U ; quitte à diminuer U , on peut supposer que U est défini par $Q \neq 0$, où Q est une fonction régulière non nulle sur X . Mais les fonctions régulières sur U sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)^k}$. En effet, on a déjà vu que U est isomorphe au fermé Y de $X \times k$ définie par les couples (x, y) tels que $Q(x)y = 1$. Les fonctions régulières sur $X \times k$ sont de la forme $(x, y) \mapsto \sum_{i=1}^k a_i(x)y^i$, où a_i est une fonction régulière sur U . Par l'isomorphisme $U \simeq Y$ défini par

$$x \mapsto (Q(x), \frac{1}{Q(x)})$$

ces fonctions régulières deviennent les applications

$$x \mapsto \sum_{i=1}^k \frac{a_i(x)}{Q(x)^i}.$$

Une telle fonction rationnelle provient donc de la fraction $\sum_{i=1}^k \frac{a_i}{Q^i}$. D'où l'énoncé. \square

Exemple : $\text{Rat}(\mathbb{P}_n) = \text{Rat}(\mathbb{A}^n) = k(X_1, \dots, X_n)$.

Soient X et Y deux variétés algébriques intègres. Sur l'ensemble des couples (U, f) , où $f : U \longrightarrow Y$ est une application régulière $f : U \longrightarrow Y$ sur un ouvert U partout dense de X , la relation

$$(U, f) \sim (U', f') \text{ si } f|_{U \cap U'} = f'|_{U \cap U'}.$$

est une relation d'équivalence; les classes d'équivalence s'appellent applications rationnelles.

Soit $f : X \rightsquigarrow Y$ une telle application rationnelle, d'image dense. Elle induit un homomorphisme de corps $f^* : \text{Rat}(Y) \longrightarrow \text{Rat}(X)$.

PROPOSITION 4.3. — *Soient X et Y deux variétés intègres. Tout homomorphisme d'extensions de k*

$$\varphi : \text{Rat}(Y) \longrightarrow \text{Rat}(X)$$

est induit par une et une seule application rationnelle $f : X \rightsquigarrow Y$ d'image dense.

Démonstration. On peut supposer que $Y = \text{Spec } B$, où B est une algèbre de type fini intègre. Soit $\varphi : \text{Rat}(Y) \longrightarrow \text{Rat}(X)$ un homomorphisme de corps, k -linéaire. Soient y_1, \dots, y_p des générateurs de B . Les fonctions rationnelles $f_i = \varphi(y_i)$ sur X sont régulières

sur un ouvert partout dense U de X et le morphisme d'algèbres induit $B \longrightarrow \text{Rat}(X)$ se factorise par $\mathcal{O}(U)$. D'après l'exercice 2.2, conséquence facile du théorème 2.32, le morphisme d'algèbres $B \longrightarrow \mathcal{O}(U)$ obtenu définit une application régulière $f : U \longrightarrow Y$. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f^*} & \mathcal{O}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K(B) & \xrightarrow{\varphi} & \text{Rat}(X) \end{array}$$

L'homomorphisme $f^* : B = \mathcal{O}(Y) \longrightarrow \mathcal{O}(U)$ est alors injectif : ceci signifie exactement que f est d'image dense. L'homomorphisme induit sur le corps des fractions rationnelles $f^* : \text{Rat}(Y) \longrightarrow \text{Rat}(X)$ coïncide alors avec φ . Reste à voir l'unicité : si $f' : X \rightsquigarrow Y$ est une autre application rationnelle d'image dense telle que $f'^* = \varphi$, on a $f^*(y_i) = f'^*(y_i)$ dans $\text{Rat}(X)$ ce qui signifie que f et f' coïncident sur un ouvert dense. \square

COROLLAIRE 4.4. — *Soient X et Y deux variétés algébriques irréductibles telles que les extensions $\text{Rat}(X)$ et $\text{Rat}(Y)$ soient k -isomorphes. Alors il existe des ouverts denses $U \subset X$ et $V \subset Y$ tels que U soit isomorphe à V .*

Démonstration. Soit $\varphi : \text{Rat}(Y) \longrightarrow \text{Rat}(X)$ un k -isomorphisme. Alors il existe une fonction rationnelle d'image dense $f : X \rightsquigarrow Y$, telle que $f^* = \varphi$, et une fonction rationnelle d'image dense $g : Y \rightsquigarrow X$ telle que $g^* = \varphi^{-1}$. On peut supposer que f est donnée par une fonction régulière $f : U \longrightarrow Y$ sur un ouvert dense U , et g par une fonction régulière $g : V \longrightarrow Y$ sur un ouvert dense V . Quitte à diminuer U , on peut supposer que $f(U) \subset V$. Alors pour tout $x \in U$, on a $g(f(x)) = x$. Soit W l'image réciproque de U par $g : V \longrightarrow X$. Cet ouvert est non vide, et on a encore $f \circ g(y) = y$ pour tout $y \in W$. En plus, $f(U) \subset W$. Alors $f : U \longrightarrow W$ et $g : W \longrightarrow U$ sont inverses l'une de l'autre. D'où l'énoncé. \square

DÉFINITION 4.5. — *Soient X et Y deux variétés algébriques intègres. On dit que X et Y sont birationnellement équivalentes si les corps de fonctions rationnelles $\text{Rat}(X)$ et $\text{Rat}(Y)$ sont k -isomorphes.*

Exercice 4.2

Démontrer que le fermé de \mathbb{A}^2 des couples (x, y) tels que $x^3 = y^2$ est birationnellement équivalent à \mathbb{A}^1 .

Exercice 4.3

Démontrer que la quadrique de \mathbb{P}_3 définie par les points $[x, y, z, t]$ satisfaisant à l'équation $xt - yz = 0$ est birationnellement équivalente au plan projectif \mathbb{P}_2 .

5. Dimension

Il y a trois façons de définir la notion de dimension d'une variété algébrique : la première fait intervenir l'espace tangent de Zariski en un point ; la dimension de cet espace vectoriel varie quand on fait varier le point. La seconde se définit d'abord pour les variétés algébriques intègres en termes de degré de transcendance sur k du corps des fonctions rationnelles, et on l'étend à toute variété en introduisant les composantes irréductibles. La dernière fait intervenir la longueur maximale des suites croissantes de fermés irréductibles. Il n'est pas clair sur la troisième définition qu'elle fournit un entier. L'objet de cette section et de la suivante est de montrer que ces deux dernières définitions coïncident, et de décrire les relations entre dimension tangentielle et dimension en un point ; la dimension tangentielle est en général plus grande, et ce n'est qu'aux points lisses qu'elles coïncident.

5.1. Espace tangent de Zariski

Soit X une variété algébrique, et a un point de X . Soit $\mathcal{O}_{X,a}$ l'algèbre locale de X en a . Rappelons que l'on désigne par $\mathcal{O}_{X,a}$ l'algèbre des germes de sections du faisceau structural au point a ; on a vu que c'est une algèbre locale : si $X = \text{Spec}(A)$, où A est une algèbre de type fini, et \mathfrak{m} l'idéal maximal de A correspondant au point a , l'algèbre $\mathcal{O}_{X,a}$ est isomorphe à la localisée $A_{\mathfrak{m}}$ (cf. section 2.6).

DÉFINITION 5.1. — *On appelle vecteur tangent à X au point a une application k -linéaire $D : \mathcal{O}_{X,a} \longrightarrow k$ satisfaisant à la condition de Leibniz*

$$D(fg) = g(a)Df + f(a)Dg$$

Autrement dit, quand on munit k de la structure de $\mathcal{O}_{X,a}$ -module définie par le morphisme d'évaluation $\mathcal{O}_{X,a} \longrightarrow k$ qui associe à f sa valeur $f(a)$, c'est une dérivation de $\mathcal{O}_{X,a}$ à valeurs dans k . Si $X = \text{Spec } A$, une telle dérivation définit une dérivation $A \longrightarrow k$ à valeurs dans k et réciproquement, une dérivation $A \longrightarrow k$ se factorise de manière unique en une dérivation $A_{\mathfrak{m}} \longrightarrow k$. L'ensemble des vecteurs tangents en a est un k -espace vectoriel noté $T_a X$ et appelé espace tangent de Zariski.

PROPOSITION 5.2. — Soit \mathfrak{m}_a l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,a}$. On a un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$T_a X \simeq (\mathfrak{m}_a/\mathfrak{m}_a^2)^*$$

En particulier $T_a X$ est un k -espace vectoriel de dimension finie.

Démonstration. Soit $D \in T_a X$. Alors $D(1) = 0$. D'autre part si f et $g \in \mathfrak{m}_a$, on a $D(fg) = 0$ d'après la formule de dérivation. Ainsi, $D|_{\mathfrak{m}_a}$ induit par passage au quotient une application linéaire

$$\bar{D} : \mathfrak{m}_a/\mathfrak{m}_a^2 \longrightarrow k$$

qui détermine $D|_{\mathfrak{m}_a}$. On a ainsi obtenu une application linéaire $D \mapsto \bar{D}$

$$T_a X \longrightarrow (\mathfrak{m}_a/\mathfrak{m}_a^2)^*$$

qui est injective car tout élément de $\mathcal{O}_{X,a}$ s'écrit $f = f(a) + g$ avec $g \in \mathfrak{m}_a$. Montrons maintenant la surjectivité ; soit $\nabla : \mathfrak{m}_a/\mathfrak{m}_a^2 \longrightarrow k$ une forme linéaire. On pose $D(f) = \nabla([f - f(a)])$ où $[f - f(a)]$ désigne la classe dans $\mathfrak{m}_a/\mathfrak{m}_a^2$ de l'élément $f - f(a)$ de \mathfrak{m}_a . On vérifie sans difficulté que la condition de dérivation est satisfaite : ainsi D définit un vecteur tangent à X en a . La finitude résulte du fait que \mathfrak{m}_a est un idéal de type fini puisque $\mathcal{O}_{X,a}$ est un anneau noethérien, comme localisé d'un anneau noethérien. Alors $\mathfrak{m}_a/\mathfrak{m}_a^2$ est un $\mathcal{O}_{X,a}/\mathfrak{m}_a$ -espace vectoriel de dimension finie. \square

Fonctorialité

Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de variétés algébriques, et $b = f(a)$. Alors f induit un morphisme d'algèbres locales $f^* : \mathcal{O}_{Y,b} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,a}$. Si $D : \mathcal{O}_{X,a} \longrightarrow k$ est un vecteur tangent à X en a , l'application Df^* est aussi une dérivation. On obtient ainsi une application k -linéaire $T_a X \longrightarrow T_b Y$ appelée l'application linéaire tangente en a à f , ou la différentielle de f en a . On la note $d_a f$, ou parfois $T_a f$.

Si U est un ouvert de \mathbb{A}^n , rapporté aux coordonnées x_1, \dots, x_n et a un point de U ; l'application linéaire $T_a \mathbb{A}^n \longrightarrow k^n$ définie par $D \mapsto (Dx_i)_{i=1, \dots, n}$ est un isomorphisme. Par cet isomorphisme, on obtient une base de $T_a U$ notée

$$(\partial_{x_i, a})_{i=1, \dots, n}.$$

Si $f = (f_1, \dots, f_m) : U \longrightarrow V \subset \mathbb{A}^m$ est une application régulière à valeurs dans un ouvert V de \mathbb{A}^m la différentielle $d_a f$ au point a est alors donnée dans les bases canoniques de $T_a U$ et $T_b V$ par la matrice jacobienne $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a))$.

Exercice 5.1

Soit X et Y deux variétés algébriques et $(a, b) \in X \times Y$. Montrer que les projections sur X et Y induisent un isomorphisme

$$T_{(a,b)}(X \times Y) \xrightarrow{\sim} T_a X \times T_b Y$$

LEMME 5.3. — Soit $X = \text{Spec } A$ une variété algébrique affine, définie par une algèbre de type fini A , et $Y \subset X$ une sous-variété fermée, définie par un idéal $I \subset A$ de générateurs (g_1, \dots, g_m) . L'espace tangent de Zariski $T_a Y$ en un point $a \in Y$ est le noyau de la différentielle $d_a g : T_a X \longrightarrow k^m$ du morphisme $g : X \longrightarrow \mathbb{A}^m$ défini par $g = (g_1, \dots, g_m)$.

Démonstration. Soit \mathfrak{m} l'idéal maximal de A correspondant au point a . On a

$$\mathcal{O}_{Y,a} = A_{\mathfrak{m}} / (g_1, \dots, g_m)$$

Il en résulte que l'application linéaire $T_a Y \longrightarrow T_a X$ est injective. De plus, pour qu'un vecteur tangent $D \in T_a X$ appartienne à l'image il faut et il suffit que cette dérivation s'annule sur l'idéal (g_1, \dots, g_m) , autrement dit que $Dg_i = 0$ pour $i = 1, \dots, m$. L'identification $T_0 \mathbb{A}^1 \xrightarrow{\sim} k$ est donnée par $D \mapsto Dz$, où z est une coordonnée sur \mathbb{A}^1 . Par définition, l'application linéaire $T_a X \longrightarrow T_0 \mathbb{A}^1 = k$ définie par $D \mapsto Dg_i$ est la différentielle $d_a g_i$. Il en résulte que l'image de $T_a Y$ est l'intersection $\bigcap_i \ker d_a g_i$. En d'autres termes l'image de $T_a Y$ est le noyau de l'application linéaire tangente $d_a g$. \square

COROLLAIRE 5.4. — Soit X une variété algébrique. La fonction $x \mapsto \dim T_x X$ est semi-continue supérieurement.

Démonstration. La question est locale. On peut donc supposer que X est une sous-variété fermée de \mathbb{A}^n , définie par un idéal (f_1, \dots, f_m) . Le résultat est une conséquence du fait que le rang de la matrice jacobienne $a \mapsto \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)$ est une fonction semi-continue inférieurement. \square

COROLLAIRE 5.5. — Soit $d = \inf_{x \in X} \dim T_x X$. L'ensemble des points $x \in X$ où $\dim T_x X = d$ est un ouvert de Zariski de X .

Exemple.

On considère la sous-variété X de $\mathbb{A}^1 = \text{Spec}(k[x])$ définie par l'idéal (x^2) . L'espace topologique sous-jacent est réduit à un point. L'espace tangent de Zariski en ce point est de dimension 1.

5.2. Dimension et degré de transcendance

Bases de transcendance

DÉFINITION 5.6. — Soit L un corps, et $K \subset L$ un sous-corps de L . On dit qu'une partie $B \subset L$ est une base de transcendance de L sur K si

- (i) les éléments de B sont algébriquement indépendants sur K ;
- (ii) le corps L est une extension algébrique du sous-corps engendré par K et B .

LEMME 5.7. — Soit $L = K(x_1, \dots, x_r)$ une extension de K engendrée par un nombre fini d'éléments.

- (i) Le corps L a une base de transcendance finie.
- (ii) Deux bases de transcendance ont le même nombre d'éléments. Ce nombre d'éléments s'appelle le degré de transcendance de L sur K .

Démonstration. (i) Un système maximal $B \subset \{x_1, \dots, x_r\}$ d'éléments algébriquement indépendants sur K est une base de transcendance de L sur K .

(ii) Soient B et B' deux bases de transcendance de L sur K , dont l'une au moins est supposée finie. Montrons par récurrence descendante sur le nombre d'éléments $k = \#B \cap B'$ que B et B' ont le même nombre d'éléments. Supposons par exemple B' finie. Si $\#B \cap B' = \#B'$, on a $B' \subset B$ et par définition des bases de transcendance $B = B'$. Supposons $B \neq B'$. Alors B n'est pas contenu dans B' ; soit $b \in B - B'$. Alors $B' \cup \{b\}$ n'est plus une base de transcendance. Donc il existe un système maximal B'' d'éléments algébriquement indépendants tel que

$$(B \cap B') \cup \{b\} \subset B'' \subsetneq \{b\} \cup B'.$$

Par définition B'' est une base de transcendance. On a $\#B \cap B'' > k$ et donc d'après l'hypothèse de récurrence, B est finie et a même nombre d'éléments que B'' ; ainsi $\#B \leq \#B'$. Si on échange les rôles de B et B' , on obtient que ces bases ont le même nombre d'éléments. \square

DÉFINITION 5.8. — Soit $K \subset L$ une extension algébrique de K . Un élément de L est dit séparable sur K si son polynôme minimal P n'a pas de racine multiple dans le corps de décomposition de P . Une telle extension est dite séparable si tout élément de L est séparable sur K .

Evidemment, en caractéristique 0, toute extension est séparable.

PROPOSITION 5.9. — Soit k un corps algébriquement clos, et $k \subset K$ une extension engendrée par un nombre fini d'éléments. Le corps K a une base de transcendance B tel que l'extension finie $k(B) \subset K$ soit séparable.

Démonstration. On suppose que k est de caractéristique $p > 0$, sinon il n'y a rien à démontrer. On va montrer qu'on peut extraire d'un système de générateurs une base de transcendance satisfaisant à la condition de l'énoncé. On fait une récurrence sur le nombre de générateurs de K sur k . Considérons des générateurs x_1, \dots, x_n de K sur k . Si n est le degré de transcendance de l'extension $k \hookrightarrow K$, $\{x_1, \dots, x_n\}$ est une base de transcendance qui convient. Sinon, il existerait un polynôme f en n variables, tel que $f(x_1, \dots, x_n) = 0$. On choisit f de degré minimum parmi ces polynômes. Ce polynôme f est alors irréductible sur k . Puisque k est de caractéristique p , l'une des dérivées partielles, par exemple $\frac{\partial f}{\partial X_1}$ n'est pas identiquement nulle : sinon f serait la puissance p -ième d'un autre polynôme, ce qui contredit l'irréductibilité. Alors le polynôme $f(X_1, x_2, \dots, x_n)$ n'est pas nul, ce qui prouve que x_1 est algébrique et séparable sur $k(x_2, \dots, x_n)$. Par hypothèse de récurrence, il existe une base de transcendance $B \subset \{x_2, \dots, x_n\}$ de $k(x_2, \dots, x_n)$ telle que tout élément de ce corps soit algébrique et séparable sur $k(B)$. Alors x_1 est encore algébrique et séparable (*cf.* Lang, page 285) sur $k(B)$. Par suite l'extension finie $k(B) \subset K$ est séparable. \square

Dimension d'une variété algébrique

Soit X une variété algébrique intègre sur k . Le corps $\text{Rat}(X)$ des fonctions rationnelles est engendré sur k par un nombre fini d'éléments : en effet, on peut supposer que X est une variété algébrique affine $X = \text{Spec}(A)$, où A est une k -algèbre de type fini, et on sait alors que $\text{Rat}(X)$ est le corps des fractions de A . Il est donc engendré par les générateurs de A . En particulier, il a une base de transcendance finie, B ; on peut exiger de plus (dans le cas où k serait de caractéristique p) que l'extension finie $k(B) \subset \text{Rat}(X)$ soit séparable.

DÉFINITION 5.10. —

- (i) Soit X une variété algébrique intègre. La dimension de X est le degré de transcendance sur k du corps $\text{Rat}(X)$ des fonctions rationnelles sur X . On note $\dim X$ cette dimension.
- (ii) Soit X une variété algébrique quelconque de composantes irréductibles X_1, \dots, X_ℓ . On appelle dimension de X le nombre

$$\dim X = \max_{i=1, \dots, \ell} \dim X_i$$

On appelle dimension de X au point x le nombre

$$\dim_x X = \max_{x \in X_i} \dim X_i$$

Si toutes les composantes irréductibles de X sont de même dimension, on dit que X est équidimensionnelle.

Exemple.

L'espace affine \mathbb{A}^n est de dimension n .

THÉORÈME 5.11. — Soit X une variété algébrique. Pour tout point $x \in X$, on a

$$\dim_x X \leq \dim T_x X$$

Si X est réduite, l'égalité est satisfaite sur un ouvert partout dense de X .

Démonstration du théorème 5.11

Supposons d'abord X intègre. Par semi-continuité, on est ramené à prouver qu'il existe un ouvert non vide pour lequel le théorème est vrai. Si $m = \dim X$, l'énoncé suivant nous ramène à prouver l'énoncé dans le cas d'une hypersurface intègre de \mathbb{A}^{m+1} .

LEMME 5.12. — Une variété algébrique intègre X de dimension m est birationnellement équivalente à une hypersurface de \mathbb{A}^{m+1} définie par un polynôme irréductible.

Démonstration. On peut évidemment supposer que X est une variété algébrique affine intègre. Soit A une algèbre de type fini, intègre et $X = \text{Spec } A$; soit K le corps des fractions de A . Considérons une base de transcendance de K sur laquelle tout élément de K est séparable. Une telle base définit un homomorphisme de corps

$$\text{Rat}(\mathbb{A}^m) \hookrightarrow K$$

et cette extension est une extension algébrique finie et séparable. Le théorème de l'élément primitif montre qu'il existe $b \in \text{Rat}(X)$ tel que

$$\text{Rat}(\mathbb{A}^m)[b] = K$$

Considérons le polynôme minimal $P(T) = T^r + a_1 T^{r-1} + \dots + a_r$ de b ; on l'écrit sous la forme $P = \frac{P_1}{Q}$, avec $P_1 \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^m)[T]$, et Q élément non nul de $\mathcal{O}(\mathbb{A}^m)$. On peut supposer P_1 primitif; le polynôme $P_1 \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^1)$ est alors irréductible et définit une hypersurface intègre $Z \subset \mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^1$. Le morphisme défini par $\text{pr}_1 : Z \rightarrow \mathbb{A}^m$ est d'image dense : cette image contient en effet l'ouvert défini par $Q \neq 0$. Par suite, cette projection fournit un homomorphisme

$$\text{Rat}(\mathbb{A}^m) \hookrightarrow \text{Rat}(Z)$$

La dernière coordonnée t satisfait sur Z à l'équation $P(t) = 0$. Par suite, on obtient un isomorphisme

$$\text{Rat}(\mathbb{A}^m)[T]/(P) \simeq K \hookrightarrow \text{Rat}(Z)$$

Donc on obtient un isomorphisme d'extensions $\text{Rat}(X) \simeq \text{Rat}(Z)$. Compte-tenu de la proposition 4.3 ceci démontre le lemme. \square

Soit $X \subset \mathbb{A}^{m+1}$ la sous-variété algébrique intègre défini par un polynôme irréductible F de degré > 0 . Alors, en un point $x \in X$, on a $\dim T_x X = m$ ou $m + 1$ ce qui démontre l'inégalité $\dim X \leq \dim T_x X$ pour tout $x \in X$. Pour terminer la démonstration il faut voir que la différentielle $d_x F$ n'est pas nulle sur un ouvert partout dense. Il s'agit de montrer que cet ouvert n'est pas vide. Mais puisque F est irréductible, si $x \mapsto d_x F$ s'annulait le long de X , pour tout i , le polynôme F diviserait les dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial x_i}$. Mais ceci impliquerait que F est ou constant si k est de caractéristique nulle, ou, dans le cas où le corps k est de caractéristique p une puissance p -ième d'un polynôme G ce qui est contraire au fait que F est irréductible.

Supposons maintenant X quelconque. Soient X_1, \dots, X_k les composantes irréductibles de X passant par x , munies de la structure de variété algébrique réduite. On a d'après l'énoncé ci-dessus dans le cas intègre,

$$\dim X_i \leq \dim T_x X_i \leq \dim T_x X$$

et par suite $\dim_x X \leq \dim T_x X$. Supposons X réduite. Alors $X_i \setminus \bigcap_{j \neq i} X_j$ est un ouvert intègre de X et d'après l'énoncé ci-dessus, on peut trouver ouvert non vide $U_i \subset X_i$ sur lequel la dimension tangentielle coïncide avec la dimension de X_i . Sur l'ouvert partout dense $U = \bigcup_i U_i$ on a $\dim_x X = \dim T_x X$. \square

5.3. Dimension de Krull

DÉFINITION 5.13. — *Un espace topologique noethérien X est dit de dimension de Krull finie si la longueur des suites strictement croissante de fermés irréductibles*

$$X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \dots \subsetneq X_\ell$$

de X est bornée. Le plus grand de ces entiers ℓ est la dimension de Krull et notée $\dim_{\text{Krull}}(X)$.

THÉORÈME 5.14. — *Soit X une variété algébrique. La dimension de Krull de X est finie et coïncide avec $\dim X$.*

Soient X_1, \dots, X_ℓ les composantes irréductibles de X . On a évidemment pour toute variété algébrique X

$$\dim_{\text{Krull}}(X) = \max_i \dim_{\text{Krull}}(X_i)$$

de sorte qu'on est ramené à prouver l'énoncé dans le cas des variétés intègres. Si X est une telle variété intègre, et U un ouvert non vide de X , la dimension de Krull de X coïncide avec celle de U . On est donc ramené à prouver le résultat pour les variétés algébriques affines intègres.

La démonstration sera donnée dans ce cas dans la prochaine section. Elle repose sur la notion de morphisme fini.

Exercice 5.2

Soient X et Y deux variétés algébriques. Prouver que $\dim X \times Y = \dim X + \dim Y$.

6. Morphismes finis

Soit $\varphi : A \longrightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux (commutatifs et unitaires). Alors B peut être considéré comme un module sur A , en posant $ab = \varphi(a)b$ pour $a \in A$ et $b \in B$.

DÉFINITION 6.1. — *On dit que φ est entier si tout élément $x \in B$ est entier sur A : autrement dit, pour tout $x \in B$, il existe un polynôme unitaire à coefficients dans A*

$$P = X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_n$$

tel que $P(x) = 0$.

La proposition suivante souvent utile pour vérifier qu'un élément est entier. Elle permet par exemple de vérifier que les éléments de B qui sont entiers sur A constituent un sous-anneau de B , qu'on appelle fermeture intégrale de A dans B .

PROPOSITION 6.2. — *Soit $\varphi : A \longrightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux et x un élément de B . Les assertions suivantes sont équivalentes*

- (i) *L'élément x est entier sur A ;*
- (ii) *Le sous-anneau $A[x]$ engendré par $\varphi(A)$ et x est de type fini sur A ;*
- (iii) *Il existe un sous-anneau de B contenant $\varphi(A)$ et x qui soit un A -module de type fini.*

Démonstration. Seule l'implication (iii) \Rightarrow (i) n'est pas évidente. Soit C un sous-anneau de B contenant x et $\varphi(A)$ qui soit un A -module de type fini. Soit $(e_i)_{i=1, \dots, m}$ un système de générateurs de C . L'inclusion $xC \subset C$ permet d'écrire

$$xe_i = \sum_j a_{i,j} e_j$$

avec $a_{i,j} \in A$ ce qui s'écrit aussi, en introduisant le symbole de Kronecker

$$\sum_j (x\delta_{i,j} - a_{i,j})e_j = 0$$

Considérons la matrice $a = (a_{i,j})$. Si on multiplie à gauche par la matrice des cofacteurs, on obtient $\det(x\text{id} - a)e_j = 0$ pour tout j . Puisque l'unité appartient à C , on obtient $\det(x\text{id} - a) = 0$ ce qui donne en développant un polynôme unitaire à coefficients dans A annihilant x . \square

DÉFINITION 6.3. — *Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de variétés algébriques affines.*

On dit que f est fini si le morphisme d'algèbres $f^ : \mathcal{O}(Y) \longrightarrow \mathcal{O}(X)$ fait de $\mathcal{O}(X)$ un $\mathcal{O}(Y)$ -module de type fini.*

En vertu de la proposition ci-dessus, et du fait que $\mathcal{O}(X)$ est une k -algèbre de type fini, il revient au même de demander que tout élément de $\mathcal{O}(X)$ soit entier sur $\mathcal{O}(Y)$.

Exemples

1) Soit X le fermé algébrique de k^2 défini par l'équation $x^2 + y^2 = 1$. La projection $X \longrightarrow \mathbb{A}^1$ définie par $(x, y) \mapsto x$ est un morphisme fini.

2) Le morphisme $\mathbb{A}^2 \longrightarrow \mathbb{A}^3$ défini par $(x, y) \mapsto (x^2, xy, y^2)$ est un morphisme fini.

3) Soit X le fermé de \mathbb{A}^2 défini par l'équation $xy = 1$. La projection $X \longrightarrow k$ définie par $(x, y) \mapsto x$ n'est pas un morphisme fini (cf. proposition 6.9).

Soient maintenant X et Y deux variétés algébriques quelconques.

DÉFINITION 6.4. — *On dit qu'un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ est fini s'il existe un recouvrement de Y par des ouverts affines V_i tels que $U_i = f^{-1}(V_i)$ soit affine et que le morphisme induit $f : U_i \longrightarrow V_i$ soit fini.*

Si $Z \subset X$ est une sous-variété fermée d'une variété algébrique X , le morphisme d'inclusion $Z \longrightarrow X$ est évidemment un morphisme fini. Il n'est pas clair sur la définition ci-dessus que le composé de deux morphismes finis est encore un morphisme fini. Pour le démontrer, nous allons vérifier que si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme fini, la propriété ci-dessus est vrai en fait pour tout recouvrement par des ouverts affines ; ceci résulte de l'énoncé suivant :

PROPOSITION 6.5. — *Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme fini de variétés algébriques.*

Pour tout ouvert affine $V \subset Y$, l'image réciproque $f^{-1}(V)$ est un ouvert affine et le morphisme induit $f^{-1}(V) \longrightarrow V$ est un morphisme fini.

On va en fait se ramener au cas de recouvrement par des ouverts principaux. Le point clé est la suivant :

PROPOSITION 6.6. — *Soit Y une variété affine, et $Y = \cup_i Y_i$ un recouvrement de Y par des ouverts principaux Y_{g_i} définis par des éléments $g_i \in \mathcal{O}(Y)$. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de variétés algébriques, X_i l'image réciproque de Y_i , et $f_i : X_i \longrightarrow Y_i$ le morphisme induit par f . Alors si X_i est affine et f_i est fini, la variété algébrique X est affine et f est fini.*

Démonstration. Soit $A = \mathcal{O}(X)$ et $B = \mathcal{O}(Y)$. Considérons le morphisme $f^* : B \longrightarrow A$ qui permet de voir A comme un B -module. Les algèbres de sections du faisceau structural correspondant aux ouverts X_i et Y_i sont les algèbres de fractions $A_{f^*(g_i)}$ (notée aussi A_{g_i}) et B_{g_i} . C'est la définition pour Y_i ; pour X_i il suffit de recouvrir X pour un nombre fini d'ouverts affines pour obtenir cette formule. Supposons que X_i soit affine, et que $f_i^* : B_{g_i} \longrightarrow A_{g_i}$ soit un morphisme fini. On peut alors trouver un système fini de générateurs de A_{g_i} de la forme $\frac{e_{i,\alpha}}{1}$, avec $e_{i,\alpha} \in A$. Soit $v \in A$. Alors il existe des entiers n_i et des éléments $v_{i,\alpha} \in B$ tels que dans A

$$g_i^{n_i} v = \sum_{\alpha} v_{i,\alpha} e_{i,\alpha}$$

Les ouverts Y_i recouvrant Y l'idéal de B engendré par les éléments $g_i^{n_i}$ est d'après le théorème des zéros de Hilbert est (1). Donc il existe $u_i \in B$ tels que $\sum_i u_i g_i^{n_i} = 1$. Il en résulte que dans B

$$v = \sum_{\alpha,i} u_i v_{i,\alpha} e_{i,\alpha}$$

Ainsi, les éléments $e_{i,\alpha}$ engendrent le B -module A . Il en résulte que A est une algèbre de type fini : il existe une variété algébrique affine X' telle que $\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(X')$. Cette identification fournit d'après l'exercice 2.2 un morphisme $\phi : X \longrightarrow X'$ et un morphisme fini $f' : X' \longrightarrow Y$ tel que $f' \circ \phi = f$; le morphisme ϕ est un isomorphisme au-dessus de l'ouvert Y_i . On en déduit que X est isomorphe à X' ; c'est donc une variété affine et le morphisme $f : X \longrightarrow Y$ est fini. Ceci achève la démonstration. \square

Démonstration de la proposition 6.5

Commençons par le cas affine :

LEMME 6.7. — Soient X et Y deux variétés algébriques affines, et $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme fini.

- (i) Pour tout $g \in \mathcal{O}(Y)$ soit Y_g l'ouvert principal défini par g , et par X_g son image réciproque par f . Le morphisme induit $f : X_g \longrightarrow Y_g$ est fini.
- (ii) Pour tout ouvert affine $V \subset Y$, l'image réciproque $f^{-1}(V)$ est affine, et le morphisme induit $f : f^{-1}(V) \longrightarrow V$ est fini.

Démonstration. On pose $X = \text{Spec } A$, $Y = \text{Spec } B$ où A et B sont des algèbres de type fini. Le morphisme induit $B \longrightarrow A$ est fini. Montrons (i) : on a pour $g \in B$, $Y_g = \text{Spec } B_g$, $X_g = \text{Spec } A_g$ et le morphisme $f : X_g \longrightarrow Y_g$ est le morphisme naturel $B_g \longrightarrow A_g$. Ce morphisme est évidemment fini.

Montrons (ii) : il suffit de recouvrir V par des ouverts principaux V_i dans Y ; l'assertion (i) montre que $f^{-1}(V_i)$ est affine et que le morphisme $f^{-1}(V_i) \longrightarrow V_i$ induit par f est fini ; la proposition 6.6 montre que $f^{-1}(V)$ est affine et que le morphisme $f^{-1}(V) \longrightarrow V$ induit par f est fini. \square

Cas général :

Supposons $f : X \longrightarrow Y$ fini, et considérons un recouvrement ouvert affine Y_i tel que $X_i = f^{-1}(Y_i)$ soit affine et tel que le morphisme induit $f : X_i \longrightarrow Y_i$ soit fini. Soit V un ouvert affine de Y . Recouvrons V par des ouverts V_j principaux dans V contenus dans l'un des Y_i . Alors $f^{-1}(V_j)$ est un ouvert affine et le morphisme $f^{-1}(V_j) \longrightarrow V_j$ est un morphisme fini d'après le lemme ci-dessus appliqué au morphisme $X_i \longrightarrow Y_i$ induit par f . Alors, d'après la proposition 6.6 le morphisme $f : f^{-1}(V) \longrightarrow V$ est un morphisme fini.

COROLLAIRE 6.8. — Le composé de deux morphismes finis est un morphisme fini.

Exercice 6.1

Montrer qu'une variété algébrique X est affine si et seulement si il existe des éléments $f_i \in \mathcal{O}(X)$ tel que les ouverts $X_{f_i} = \{f_i \neq 0\}$ soient affines et tels que l'idéal de $\mathcal{O}(X)$ engendré par les f_i soit A .

Exercice 6.2

Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de variétés algébriques. On suppose qu'il existe un recouvrement ouvert de Y par des ouverts affines Y_i de Y tels que $X_i = f^{-1}(Y_i)$ soit affine. Montrer que pour tout ouvert affine V de Y l'ouvert $f^{-1}(V)$ est affine.

PROPOSITION 6.9. — *Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme fini.*

- (i) *Les fibres de f sont finies.*
- (ii) *L'image de f est fermée.*

Commençons par un lemme.

LEMME 6.10. — *Soit A une algèbre de type fini, et $X = \text{Spec } A$ la variété affine associée. Les conditions suivantes*

- (i) *L'algèbre A est artinienne.*
 - (ii) *L'espace topologique X est fini.*
 - (iii) $\dim_k A < \infty$
- sont équivalentes.*

Démonstration. (i) \Rightarrow (ii) : On sait qu'un anneau artinien a une filtration décroissante (dite de Jordan-Hölder) finie par des idéaux \mathfrak{a}_i

$$0 \subset \mathfrak{a}_\ell \subset \dots \subset \mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_0 = A$$

telle que $\mathfrak{a}_i/\mathfrak{a}_{i+1}$ soit un module simple, c'est-à-dire isomorphe à A/\mathfrak{m}_i où \mathfrak{m}_i est un idéal maximal. On voit par localisation que le support de \mathcal{O}_X est exactement l'ensemble $X = \{\mathfrak{m}_0, \dots, \mathfrak{m}_\ell\}$.

(ii) \Rightarrow (i) Tout anneau noethérien a une filtration décroissante finie par des idéaux

$$0 \subset \mathfrak{a}_\ell \subset \dots \subset \mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_0 = A$$

telle que $\mathfrak{a}_i/\mathfrak{a}_{i+1}$ soit isomorphe à A/\mathfrak{p}_i où \mathfrak{p}_i est un idéal premier. Alors X est la réunion des fermés $V(\mathfrak{p}_i)$. Ces fermés sont irréductibles et finis : donc ils sont réduits à un point. En raison de la correspondance bijective $\mathfrak{p} \mapsto V(\mathfrak{p})$ entre l'ensemble des idéaux premiers de A et l'ensemble des fermés irréductibles de X , ceci entraîne que \mathfrak{p}_i est un idéal maximal.

(i) \Rightarrow (iii) : Si \mathfrak{m} est un idéal maximal de A , puisque k est algébriquement clos on sait que $A/\mathfrak{m} \simeq k$. On voit en considérant une filtration de Jordan-Hölder que si A est artinienne, la dimension $\dim_k A$ est la longueur de A .

(iii) \Rightarrow (i) . Considérons comme ci-dessus une filtration décroissante \mathfrak{a}_i de A , telle que $\mathfrak{a}_i/\mathfrak{a}_{i+1}$ soit isomorphe à A/\mathfrak{p}_i où \mathfrak{p}_i est un idéal premier. D'après l'hypothèse, A/\mathfrak{p}_i est de dimension finie sur k , et intègre. Il résulte du lemme suivant que \mathfrak{p}_i est un idéal maximal, et par conséquent A a une filtration de Jordan-Hölder. Donc l'algèbre A est artinienne.

LEMME 6.11. — Soit $A \hookrightarrow B$ un homomorphisme injectif d'anneaux, tel que B soit entier sur A , et que B soit intègre. Alors A est un corps si et seulement si B est un corps.

La démonstration de ce lemme est un exercice facile.

Démonstration de la proposition 6.9

(i) On peut supposer que X et Y sont affines : $X = \text{Spec } A$, $Y = \text{Spec } B$ et $f : X \longrightarrow Y$

correspondant à un morphisme fini de k -algèbres de type fini $f^* : B \longrightarrow A$. On a vu dans la démonstration de la proposition 2.51 que la fibre de f au-dessus de \mathfrak{m} est la variété affine $\text{Spec}(A/\mathfrak{m}A)$. Le morphisme induit $k = B/\mathfrak{m} \longrightarrow A/\mathfrak{m}A$ est encore fini.

Donc $\dim_k A/\mathfrak{m}A < \infty$. Il en résulte du lemme 6.10 que cette fibre est finie.

(ii) Soit $I = \ker f^*$. On va montrer que l'image de f est le fermé $V(I)$. On sait que le morphisme f associe à l'idéal maximal \mathfrak{n} de A l'idéal maximal $\mathfrak{m} = (f^*)^{-1}(\mathfrak{n})$, donc cet idéal maximal contient I ; donc $\text{Im } f \subset V(I)$. Dans l'autre sens, soit $\mathfrak{m} \in V(I)$ un idéal maximal de B . La fibre de f^* au dessus du point défini par \mathfrak{m} est la variété affine $\text{Spec}(A/\mathfrak{m}A)$. Pour voir que cette fibre n'est pas vide, il suffit de démontrer que cette algèbre n'est pas réduite à $\{0\}$.

Soient e_i des générateurs de A comme B -module. Supposons $A = \mathfrak{m}A$. On peut alors trouver des éléments $a_{i,j} \in \mathfrak{m}$ tels que

$$e_i = \sum_j f^*(a_{i,j})e_j;$$

dans A on obtient $\det(1 - (f^*(a_{i,j}))) = 0$. En développant ce déterminant, on obtient $1 \in f^*(\mathfrak{m})$. Ceci signifie que dans B on a $(1) = I + \mathfrak{m}$ et puisque $I \subset \mathfrak{m}$ on obtient $\mathfrak{m} = (1)$ ce qui est absurde. \square

PROPOSITION 6.12. — Soit Z une sous-variété algébrique fermée de \mathbb{P}_n ne contenant pas le point $[0, \dots, 0, 1]$. Le morphisme $f : Z \longrightarrow \mathbb{P}_{n-1}$ induit par l'application régulière

$$[x_0, \dots, x_n] \longmapsto [x_0, \dots, x_{n-1}]$$

est un morphisme fini.

La projection considérée s'appelle la projection de centre $[0, \dots, 0, 1]$.

Démonstration. On peut supposer que Z est une hypersurface de \mathbb{P}_n définie par un polynôme homogène P de degré $r > 0$. Du fait que le point $[0, \dots, 0, 1]$ n'appartient pas à Z , on peut développer P sous la forme

$$P = X_n^r + \sum_{1 \leq i \leq r} A_i X_n^{r-i}$$

où A_i est un polynôme homogène de degré i en les variables (X_0, \dots, X_{n-1}) . Plaçons au-dessus de l'ouvert affine V_0 de \mathbb{P}_n défini par $X_0 \neq 0$, et posons $x_i = \frac{X_i}{X_0}$. Soit U_0 l'ouvert affine de \mathbb{P}_n défini par les points $[X_0, \dots, X_n]$ tels que $X_0 \neq 0$; dans cet ouvert, on prend encore comme coordonnées $x_i = \frac{X_i}{X_0}$. Alors $f^{-1}(V_0) = Z \cap U_0$, et le morphisme $f : Z \cap U_0 \rightarrow V_0$ est donné par

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1})$$

Or, on a la relation

$$x_n^r + \sum_{1 \leq i \leq r} a_i x_n^{r-i} = 0$$

dans $Z \cap U_0$ où $a_i = A_i(1, x_1, \dots, x_{n-1})$. Ceci prouve que la dernière coordonnée x_n est entière sur $\mathcal{O}(V_0)$, et par suite $\mathcal{O}(Z \cap U_0)$ est fini sur $\mathcal{O}(V_0)$. Par permutation des coordonnées, on obtient ainsi que f est un morphisme fini. \square

COROLLAIRE 6.13. — (Noether) *Soit Z une variété algébrique affine. Il existe un morphisme fini surjectif $Z \rightarrow \mathbb{A}^m$.*

Démonstration. On peut supposer que Z est une sous-variété fermée de \mathbb{A}^n . Si $Z = \mathbb{A}^n$ le résultat est évident ; si $Z \neq \mathbb{A}^n$, il existe un polynôme non nul qui s'annule sur Z . Il existe une sous-variété fermée \bar{Z} de \mathbb{P}_n dont l'image réciproque dans \mathbb{A}^n par le plongement ouvert $(x_1, \dots, x_n) \mapsto [1, x_1, \dots, x_n]$ est Z ; pour la construire on considère des générateurs P_1, \dots, P_ℓ de l'idéal I qui définit Z . On considère l'unique polynôme homogène \bar{P}_i de même degré que P_i satisfaisant à la condition suivante : $\phi^*(\bar{P}_i) = P_i$, où $\phi : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^{n+1} - \{0\}$ est le plongement $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (1, x_1, \dots, x_n)$ autrement dit on homogénéise P_i . L'idéal \bar{I} engendré par les polynômes homogènes \bar{P}_i définit une sous-variété fermée de \bar{Z} de \mathbb{P}_n telle que $\phi^{-1}(\bar{Z}) = Z$. Cette sous-variété rencontre l'hyperplan de \mathbb{P}_n défini par les points $[X_0, \dots, X_n]$ tels que $X_0 = 0$ suivant un fermé strict : on l'obtient comme lieu des zéros de l'idéal homogène engendré par les parties homogènes de plus haut degré des P_i . On peut supposer qu'elle évite $[0, \dots, 0, 1]$. On peut alors projeter à partir de ce point sur \mathbb{P}_{n-1} : on obtient ainsi un morphisme fini $\bar{Z} \rightarrow \mathbb{P}_{n-1}$. L'image réciproque de l'ouvert affine $U_0 \simeq \mathbb{A}^{n-1}$ défini par $X_0 \neq 0$ est exactement Z . Ainsi le morphisme induit $f : Z \rightarrow \mathbb{A}^{n-1}$ est fini. S'il n'est pas surjectif, on peut recommencer la construction ci-dessus avec la sous-variété de \mathbb{A}^{n-1} définie par l'idéal noyau de l'homomorphisme $\mathcal{O}(\mathbb{A}^{n-1}) \rightarrow \mathcal{O}(Z)$, dont l'espace topologique sous-jacent est l'image de f ; ainsi de suite jusqu'à obtenir un morphisme fini surjectif. \square

Comme conséquence, on obtient la version algébrique de l'énoncé ci-dessus :

COROLLAIRE 6.14. — *Soit A une k -algèbre de type fini. Il existe des éléments z_1, \dots, z_n algébriquement indépendants sur k et tels que A soit fini sur la sous-algèbre $k[z_1, \dots, z_n]$.*

PROPOSITION 6.15. — *Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de variétés algébriques intègres, fini et surjectif. Alors*

- (i) $\dim_{\text{Krull}} X = \dim_{\text{Krull}} Y$;
- (ii) $\dim X = \dim Y$.

Cet énoncé résulte de la comparaison des fermés irréductibles de X et de Y .

LEMME 6.16. — *(Cohen-Seidenberg) Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de variétés algébriques, fini et surjectif.*

- (i) *Pour tout fermé irréductible $Y' \subset Y$, il existe un fermé irréductible $X' \subset X$ tel que $f(X') = Y'$.*
- (ii) *Deux tels fermés irréductibles X' et X'' ne sont pas comparables.*

Démonstration. (i) On écrit $f^{-1}(Y') = \cup_{i=1}^m X_i$, avec X_i irréductible. En prenant l'image, on obtient $Y' = \cup_{i=1}^m f(X_i)$. Puisque Y' est irréductible, Y' est l'un des fermés $f(X_i)$.

(ii) Soient $X' \subset X''$ deux fermés irréductibles tels que $X' \subset X''$ et de même image Y par f . Il s'agit de montrer que $X' = X''$. On peut supposer que X et Y sont affines. Supposons que X' et X'' soient distincts. Alors il existe une fonction régulière u s'annulant sur X' et non nulle sur X'' . Mais u est entier sur $\mathcal{O}(Y)$: on a donc une relation du type

$$u^r + f^*(a_1)u^{r-1} + \dots + f^*(a_r) = 0$$

dans $\mathcal{O}(X'')$, avec $a_i \in \mathcal{O}(Y)$. Puisque u est non nul sur X'' , si r est minimal, on a obligatoirement $f^*(a_r) \neq 0$. Mais puisque u s'annule sur X' , a_r s'annule sur Y . Ceci conduit à une contradiction. \square

Démonstration de la proposition 6.15

D'après l'assertion (i) du lemme de Cohen-Seidenberg, si $Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq \dots \subsetneq Y_\ell$ est une suite strictement croissante de fermés irréductibles de Y , on peut trouver une suite strictement croissante de fermés irréductibles

$$X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \dots \subsetneq X_\ell$$

de X et donc $\dim_{\text{Krull}}(X) \geq \dim_{\text{Krull}}(Y)$. Dans l'autre sens, étant donné une suite strictement croissante de fermés irréductibles $X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \dots \subsetneq X_\ell$ de X , les images $Y_i = f(X_i)$ constituent, d'après l'assertion (ii) dans le lemme de Cohen-Seidenberg, une suite strictement croissante de fermés irréductibles de Y . Par suite $\dim_{\text{Krull}}(X) = \dim_{\text{Krull}}(Y)$.

Vérifions maintenant que si X et Y sont deux variétés intègres les extensions $\text{Rat}(X)$ et $\text{Rat}(Y)$ ont même degré de transcendance, ce qui démontrera l'assertion (ii). On peut évidemment supposer que X et Y sont affines. Il résulte du fait que tout élément de $\mathcal{O}(X)$ est entier sur $\mathcal{O}(Y)$ que l'homomorphisme $\text{Rat}(Y) \longrightarrow \text{Rat}(X)$ est une extension algébrique finie. Toute base de transcendance de $\text{Rat}(Y)$ définit donc une base de transcendance de $\text{Rat}(X)$. Ceci achève la démonstration.

Fin de la démonstration du théorème 5.14

On peut clairement supposer que la variété X est intègre. Il s'agit de montrer que si X est une variété algébrique affine et intègre on a $\dim(X) = \dim_{\text{Krull}}(X)$.

Soit X une sous-variété intègre de \mathbb{A}^n . On démontre l'énoncé par récurrence sur n . Il est évidemment vrai pour $n = 0$. Supposons d'abord $X \neq \mathbb{A}^n$. On sait qu'il existe d'après le corollaire ci-dessus qu'il existe un morphisme fini surjectif $X \longrightarrow \mathbb{A}^m$, avec $m \leq n - 1$. Alors $\dim_{\text{Krull}}(X) = \dim_{\text{Krull}}(\mathbb{A}^m)$ et $\dim(X) = \dim(\mathbb{A}^m)$ et d'après l'hypothèse de récurrence $\dim(\mathbb{A}^m) = m$. Par suite $\dim_{\text{Krull}}(X) = \dim(X)$.

Supposons maintenant $X = \mathbb{A}^n$. Soit $X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \dots \subsetneq X_\ell = \mathbb{A}^n$ une suite strictement croissante de fermés irréductibles de \mathbb{A}^n . On a évidemment $\ell - 1 \leq \dim_{\text{Krull}}(X_{\ell-1})$ et puisque qu'il existe un morphisme fini surjectif $X_{\ell-1} \longrightarrow \mathbb{A}^m$, avec $m \leq n - 1$ on a d'après la proposition 6.15

$$\dim_{\text{Krull}}(X_{\ell-1}) = \dim_{\text{Krull}}(\mathbb{A}^m).$$

D'après l'hypothèse de récurrence, cette dimension de Krull est m . Par suite $\ell \leq n$. Ainsi, $\dim_{\text{Krull}}(\mathbb{A}^n) \leq n$. Comme l'inégalité dans l'autre sens est évidente, ceci démontre que $\dim_{\text{Krull}}(\mathbb{A}^n) = n$. \square

Exercice 6.3

On considère la sous-variété fermée X de \mathbb{A}^2 , rapporté aux coordonnées x et y , définie par l'idéal engendré par $x^2 + y^2 - 1$.

1) Montrer que le morphisme $\pi : X \longrightarrow \mathbb{A}^1$ induit par la projection $(x, y) \mapsto x$ est un morphisme fini.

2) Montrer que l'homomorphisme d'algèbres locales induit par π :

$$\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,0} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,(0,1)}$$

n'est pas entier.

7. Le lemme de Krull

Etant donnée une variété algébrique intègre X , de dimension n et des fonctions régulières f_1, \dots, f_k sur X , quelle est la dimension du fermé $Z = V(f_1, \dots, f_k)$ quand il est non vide ? En général, il n'est possible d'obtenir que la minoration $\dim Z \geq n - k$. Par exemple, dans l'espace vectoriel des matrices 3×3 , le fermé des matrices de rang ≤ 1 est défini par 9 équations, donc aucune n'est superflue et pourtant cette variété algébrique est de dimension 5. La minoration ci-dessus est obtenue comme corollaire de l'énoncé suivant, classiquement appelé lemme de Krull.

THÉORÈME 7.1. — (*Lemme de Krull*) Soit X une variété algébrique intègre de dimension n , et f une fonction régulière non nulle et non inversible sur X . Soit $V(f)$ le fermé algébrique des zéros de f . Toutes les composantes irréductibles de $V(f)$ sont de dimension $n - 1$.

Cet énoncé serait faux si le corps k n'était pas algébriquement clos : par exemple en géométrie algébrique réelle, l'intersection d'une sphère avec son plan tangent en un point est réduite à un point (toutefois, il devient vrai si on ne considère pas seulement les points de \mathbb{R}^3 , mais les spectres maximaux des algèbres de type fini concernées).

On se ramène immédiatement au cas d'une variété affine, ou, si l'on préfère, de sa version projective.

THÉORÈME 7.2. — Soit $X \subset \mathbb{P}_m$ une variété projective intègre de dimension n , et $H \subset \mathbb{P}_m$ une hypersurface de degré d dans l'espace projectif ne contenant pas X . Toutes les composantes irréductibles de $X \cap H$ sont de dimension $n - 1$.

Démonstration. Soit $d = \dim H \cap X$. Il résulte de la définition de Krull de la dimension que $d \leq n - 1$. On se ramène au cas où H est un hyperplan de \mathbb{P}_m grâce au plongement de Veronese. On peut trouver un sous-espace projectif $V \not\subset H$ de dimension $m - d - 1$ qui ne rencontre pas $X \cap H$; alors la projection à partir de $W = V \cap H$ détermine un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X \cap H & \hookrightarrow & X \\ \downarrow f & & \downarrow f \\ \mathbb{P}_d & \subset & \mathbb{P}_{d+1} \end{array}$$

dans lequel les flèches verticales sont des morphismes finis. Il en résulte que $n \leq d + 1$, et par suite $d = n - 1$.

On doit montrer plus : à savoir que toutes les composantes irréductibles de $X \cap H$ sont de dimension $n - 1$. Soit Y une de ces composantes. Il s'agit de montrer que le

morphisme induit $f : Y \longrightarrow \mathbb{P}_{n-1}$ est surjectif. Plaçons-nous au-dessus d'un ouvert affine $V = \mathbb{A}^n$ de \mathbb{P}_n rencontrant l'image de Y et désignons par x_1, \dots, x_n les coordonnées dans V , l'hyperplan $V \cap \mathbb{P}_{n-1}$ ayant pour équation $x_n = 0$. Soit U l'ouvert image réciproque de V par la projection $f : X \longrightarrow \mathbb{P}_n$. Cet ouvert rencontre Y et $Y \cap U$ est une des composantes irréductibles de $U \cap H$; montrons que la restriction $f : Y \cap U \longrightarrow V \cap \mathbb{P}_{n-1}$ est encore surjective. Si cette restriction n'était pas surjective, il existerait un polynôme $P(x_1, \dots, x_{n-1})$ non nul, qui serait diviseur de zéro dans $\mathcal{O}(U \cap H)$: ainsi, il existerait $Q \in \mathcal{O}(U)$, non nul sur $U \cap H$, tel que $P(x_1, \dots, x_{n-1})Q|_{U \cap H} = 0$. D'après le théorème des zéros, il existerait un entier ℓ tel que dans $\mathcal{O}(U)$

$$x_n \text{ divise } (P(x_1, \dots, x_{n-1})Q)^\ell.$$

On va montrer qu'alors x_n divise une puissance Q^k convenable de Q , ce qui conduira à une contradiction. C'est l'objet du lemme suivant :

LEMME 7.3. — *Soit A un anneau factoriel, et $A \hookrightarrow B$ un morphisme fini et injectif. On suppose que B est intègre. Soient a et $b \in A$, non nuls, et premiers entre eux; soit $c \in B$ tel que a divise bc . Alors a divise une puissance convenable de c .*

DÉFINITION 7.4. — *Un anneau intègre A est intégralement clos si la fermeture intégrale de A dans son corps des fractions est A lui-même.*

Par exemple, on sait \mathbb{Z} est intégralement clos. La même démonstration prouve en fait qu'un anneau factoriel est intégralement clos. C'est cette propriété que nous allons utiliser pour vérifier le lemme.

Démonstration. Désignons par K et L les corps de fractions respectifs pour A et B . Le polynôme minimal P de c , choisi unitaire, est à coefficients dans A ; en effet, dans une extension de L qui contient toutes les racines de P , les autres racines sont encore entières; d'après les relations entre coefficients et racines, les coefficients de P sont entiers sur A . Mais l'anneau A étant intégralement clos, ces coefficients sont alors dans l'anneau A . On écrit donc

$$P = X^k + \alpha_1 X^{k-1} + \dots + \alpha_n$$

avec $\alpha_i \in A$. L'élément $\frac{bc}{a}$ a alors pour polynôme minimal

$$Q = X^k + \alpha_1 \frac{b}{a} X^{k-1} + \dots + \alpha_n \left(\frac{b}{a}\right)^k$$

et puisque cet élément est entier, on obtient que a divise $\alpha_1 b, \dots, \alpha_k b^k$. Puisque A est factoriel, ceci entraîne que a divise α_k . Mais la relation $c^k + \alpha_1 c^{k-1} + \dots + \alpha_n = 0$ entraîne que a divise c^k . \square

Ceci achève la démonstration du lemme de Krull. \square

COROLLAIRE 7.5. — Soient X et Y deux fermés irréductibles de \mathbb{P}_n . Si X rencontre Y , toutes les composantes irréductibles de $X \cap Y$ sont de dimension $\geq \dim X + \dim Y - n$.

Cet énoncé reste vrai si on remplace \mathbb{P}_n par une variété lisse (cf. section suivante) quelconque. Il s'obtient en remarquant que $X \cap Y$ est l'intersection de $X \times Y$ avec la diagonale de $\mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_n$, compte-tenu du fait que $\dim X \times Y = \dim X + \dim Y$. Par contre la conclusion serait fausse en général si l'espace ambiant était singulier. Ainsi, dans la quadrique Q de l'espace projectif \mathbb{P}_4 , d'équation $x_1x_3 + x_2x_4 = 0$, les plans projectifs d'équations $x_1 = x_2 = 0$ et $x_3 = x_4 = 0$ se coupent suivant un point.

8. Points lisses

Soit X une variété algébrique. D'après le théorème 5.11 pour tout point $x \in X$, on a $\dim_x X \leq \dim T_x X$.

DÉFINITION 8.1. — Un point $x \in X$ est dit lisse si $\dim_x X = \dim T_x X$. Dans le cas contraire, on dit que x est un point singulier.

Exemple

Soit $X \subset \mathbb{A}^n$ la sous-variété algébrique définie l'idéal (f_1, \dots, f_m) . Le fermé sous-jacent est le lieu des zéros communs à f_1, \dots, f_m . On suppose que la matrice jacobienne $(\frac{\partial f_j}{\partial x_i})$ est de rang m au point $x \in X$. Alors X est lisse au voisinage de x . En effet, d'après le lemme de Krull

$$n - m \leq \dim_x X.$$

D'autre part, d'après le lemme 5.3 $\dim T_x X \leq n - m$. Par suite $\dim_x X = \dim T_x X$.

La réciproque est vraie : soit X une variété algébrique et $x \in X$ un point lisse de X ; on pose $m = \dim_x X$. Alors au voisinage de x , la variété X peut être définie dans \mathbb{A}^n par un idéal engendré par $n - m$ éléments. Pour le voir, nous aurons besoin de vérifier au préalable l'énoncé suivant

THÉORÈME 8.2. — Soit X une variété algébrique lisse en x . Alors l'algèbre locale $\mathcal{O}_{X,x}$ est intègre. En particulier, X est réduit au voisinage de x et par x , il ne passe qu'une composante irréductible.

COROLLAIRE 8.3. — Les points lisses d'une variété algébrique X forment un ouvert.

On a déjà vu que si X est réduite, cet ouvert doit être partout dense.

Démonstration. Soit X_1, \dots, X_k les composantes irréductibles de X . Considérons l'ouvert U_i défini par

$$U_i = X \setminus \cup_{j, j \neq i} X_{i,j}$$

où $X_{i,j} = X_i \cap X_j$. Dans U_i les points lisses constituent un ouvert $U_{i,\text{lisse}}$ par semi-continuité de la dimension tangentielle et l'ensemble des points lisses de X est, d'après le théorème 8.2, la réunion $X_{\text{lisse}} = \cup_i U_{i,\text{lisse}}$. Par suite, c'est un ouvert de X .

COROLLAIRE 8.4. — *Soient X une variété algébrique lisse en un point $x \in X$, et $m = \dim_x X$. Il existe un voisinage ouvert U de x , et un isomorphisme $\varphi : U \rightarrow V$ sur un ouvert V d'une sous-variété algébrique fermée Y de \mathbb{A}^n défini par un idéal (f_1, \dots, f_{n-m}) engendré par $n - m$ éléments tels que au point $y = \varphi(x)$*

$$\text{rg} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(y) = n - m.$$

En particulier, une variété algébrique complexe lisse pourra être considérée comme une variété analytique d'après le théorème de submersion.

Démonstration. On peut supposer que X est une sous-variété algébrique fermée de \mathbb{A}^n ; soit (f_1, \dots, f_k) des générateurs de l'idéal I qui définit X . Au point x , par définition de l'espace tangent de Zariski, la matrice jacobienne $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$ est de rang $n - m$. Donc, on peut extraire de cette matrice un mineur d'ordre $n - m$. Supposons par exemple que (f_1, \dots, f_{n-m}) soit déjà de rang $n - m$ en x . Alors la variété définie par l'idéal (f_1, \dots, f_{n-m}) est lisse au voisinage de x , contient X , et est de même dimension m en x . Ceci entraîne que ces deux variétés coïncident au voisinage de x , ce qui démontre ce corollaire. \square

Démonstration du théorème 8.2

Elle repose sur plusieurs lemmes.

LEMME 8.5. — *(Nakayama).* Soient A un anneau local, \mathfrak{m} son idéal maximal et M un module de type fini sur A , et $M' \subset M$ un sous-module de M . Alors si $M = M' + \mathfrak{m}M$, on a $M = M'$.

LEMME 8.6. — *Soit X une variété algébrique lisse en a , T_a l'espace vectoriel tangent de Zariski de X au point a , et \mathfrak{m} l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,a}$. Soit $S^\ell T_a^*$ la puissance symétrique de T_a^* (c'est-à-dire l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré ℓ sur T_a^*). Alors on a un isomorphisme canonique*

$$S^\ell T_a^* \simeq \mathfrak{m}^\ell / \mathfrak{m}^{\ell+1}$$

En fait, on va construire un isomorphisme de l'algèbre des polynômes sur T_a sur l'algèbre $\oplus_{\ell} \mathfrak{m}^{\ell} / \mathfrak{m}^{\ell+1}$ qui conserve la graduation.

Démonstration. Soient u_1, \dots, u_{ℓ} des éléments de l'idéal maximal \mathfrak{m} . Alors la classe dans $\mathfrak{m}^{\ell} / \mathfrak{m}^{\ell+1}$ du produit $u_1 \dots u_{\ell}$ ne dépend que des formes linéaires $d_a u_1, \dots, d_a u_{\ell}$ et par suite, on obtient une application linéaire

$$S^{\ell} T_a^* \longrightarrow \mathfrak{m}^{\ell} / \mathfrak{m}^{\ell+1}$$

évidemment surjective. Pour montrer l'injectivité, on utilise la notion de système régulier de paramètres de X en a : il s'agit de germes $u_1, \dots, u_m \in \mathfrak{m}$ tels que les différentielles $d_a u_1, \dots, d_a u_m$ constituent une base de $T_a^* = \mathfrak{m} / \mathfrak{m}^2$. Dans ce cas :

1. le germe de sous-variété algébrique défini par l'idéal (u_{i+1}, \dots, u_m) est, au voisinage de a une sous-variété lisse de dimension i d'espace tangent $\cap_{i < j \leq m} \ker d_a u_j$.
2. les germes u_1, \dots, u_m engendrent \mathfrak{m} d'après le lemme de Nakayama.

Soit

$$P = \sum_{\substack{\nu \\ \nu_1 + \dots + \nu_m = \ell}} a_{\nu_1, \dots, \nu_m} (d_a u_1)^{\nu_1} \dots (d_a u_m)^{\nu_m}$$

un polynôme non nul dont l'image dans $\mathfrak{m}^{\ell} / \mathfrak{m}^{\ell+1}$ est nulle. Quitte à changer la base, on peut supposer que $a_{\ell, 0, \dots, 0} \neq 0$: cela revient à chercher une direction dans T_a suivant laquelle le polynôme homogène $T_a \longrightarrow k$ défini par P est non nul. On peut alors trouver des éléments $b_{\nu_1, \dots, \nu_m} \in \mathfrak{m}$ tels que

$$\sum_{\nu_1 + \dots + \nu_m = \ell} (a_{\nu} - b_{\nu}) u_1^{\nu_1} \dots u_m^{\nu_m}.$$

Mais $a_{\ell, 0, \dots, 0} - b_{\ell, 0, \dots, 0}$ est inversible dans $\mathcal{O}_{X, a}$ ce qui entraîne une relation

$$u_1^{\ell} = \sum_{\nu \neq (\ell, 0, \dots, 0)} c_{\nu} u_1^{\nu_1} \dots u_m^{\nu_m}.$$

Alors le fermé des zéros $V(u_2, \dots, u_m)$ serait contenu dans $V(u_1, \dots, u_m)$ ce qui est impossible puisque $V(u_2, \dots, u_m)$ est de dimension 1, et $V(u_1, \dots, u_m)$ de dimension 0. \square

LEMME 8.7. — (Krull) Soit A un anneau local noethérien, et \mathfrak{m} l'idéal maximal de l'anneau local A . Alors

$$\cap_i \mathfrak{m}^i = 0$$

Démonstration. Soient u_1, \dots, u_m des générateurs de \mathfrak{m} . Soit $\alpha \in \cap_i \mathfrak{m}^i$. Il existe un polynôme homogène P_{ℓ} de degré ℓ à coefficients dans A tel que

$$\alpha = P_{\ell}(u_1, \dots, u_m).$$

Considérons l'idéal de $A[X_1, \dots, X_m]$ engendré par les polynômes (P_i) . Puisque cet anneau est noethérien cet idéal est engendré par un nombre fini de P_i . Ainsi, pour ℓ assez grand, on peut écrire $P_\ell = \sum_{i < \ell} P_i Q_i$ où Q_i est un polynôme homogène de degré $\ell - i$. Par substitution de u_1, \dots, u_ℓ , on voit qu'il existe un élément $\mu \in \mathfrak{m}$ tel que $\alpha = \mu\alpha$. Puisque $1 - \mu$ est inversible, ceci entraîne $\alpha = 0$. D'où le lemme. \square

LEMME 8.8. — *En tout point lisse a d'une variété algébrique lisse, l'algèbre locale $\mathcal{O}_{X,a}$ est intègre.*

Démonstration. Soient \mathfrak{m} l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,a}$, et T_a l'espace vectoriel tangent en a . Soient α et β deux éléments non nuls de $\mathcal{O}_{X,a}$. D'après le lemme ci-dessus, on peut trouver des entiers ℓ et k tels que $\alpha \in \mathfrak{m}^\ell - \mathfrak{m}^{\ell+1}$ et $\beta \in \mathfrak{m}^k - \mathfrak{m}^{k+1}$. La classe de α provient de $P \in S^\ell T^*$, la classe de β provient de $Q \in S^k T^*$. Alors $PQ \neq 0$, et par suite $\alpha\beta \notin \mathfrak{m}^{k+\ell+1}$. \square

Fin de la démonstration.

Il reste seulement à vérifier qu'il n'y a qu'une composante passant par a . La question est locale. On peut donc supposer que X est affine; l'algèbre $\mathcal{O}_{X,a}$ est alors la localisée de l'algèbre $\mathcal{O}(X)$ en l'idéal maximal \mathfrak{m}_a . Par image réciproque, on obtient une correspondance bijective entre l'ensemble des idéaux premiers de $\mathcal{O}_{X,a}$ et l'ensemble des idéaux premiers de $\mathcal{O}(X)$ contenus dans \mathfrak{m}_a . Puisque l'algèbre locale $\mathcal{O}_{X,a}$ est intègre, elle n'a qu'un idéal premier minimal, et par suite, il n'y a qu'un idéal premier minimal de $\mathcal{O}(X)$ contenu dans \mathfrak{m}_a . Ceci signifie exactement qu'il n'y a qu'une composante irréductible de X passant par a . \square

REMARQUE 8.9. — Soit X est une variété algébrique, a un point de X et $A = \mathcal{O}_{X,a}$ l'algèbre locale de X en a . On peut mettre une structure d'algèbre sur la somme directe

$$\mathrm{gr}(A) = \bigoplus_i \mathfrak{m}^i / \mathfrak{m}^{i+1}$$

induite par la multiplication $\mathfrak{m}^i \times \mathfrak{m}^j \longrightarrow \mathfrak{m}^{i+j}$. Cette algèbre est de type fini, et la construction donnée ci-dessus fournit homomorphisme surjectif d'algèbres

$$\bigoplus_i S^i T_a^* \longrightarrow \mathrm{gr}(A).$$

L'algèbre de gauche est l'algèbre des polynômes sur l'espace vectoriel tangent T_a . La variété algébrique affine associée à l'algèbre de type fini $\mathrm{gr}(A)$ s'appelle le cône de X en a , et est notée $C_a X$. La surjection ci-dessus fournit un plongement fermé de variétés algébriques affines $C_a X \hookrightarrow T_a X$ et la sous-variété ainsi définie est invariante par l'action de k^* .

L'énoncé ci-dessus dit que ce plongement est un isomorphisme si (X, a) est lisse en a . Réciproquement, le théorème de la dimension (*cf.* Atiyah et Macdonald) dit que le cône a même dimension que X en a . Donc si ce plongement est un isomorphisme, le point a est un point lisse de X .

9. Le théorème de Bertini

Le théorème de Bertini est en géométrie algébrique l'analogue du théorème de Sard en géométrie différentielle. Il est très utile pour l'étude des fibres des morphismes de variétés lisses. On devra se limiter au cas où le corps de base k est de caractéristique 0 à la section 9.2.

9.1. Dimension des fibres d'un morphisme

DÉFINITION 9.1. — *Un morphisme de variétés algébriques $f : X \longrightarrow Y$ est dit dominant si son image est dense.*

LEMME 9.2. — *Soient $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de variétés algébriques. Si $\dim X < \dim Y$, le morphisme f n'est pas dominant.*

Démonstration. Si f était dominant, pour toute composante irréductible Y_i de Y il existerait un fermé irréductible X_i de X tel que $f(X_i) \subset Y_i$ et que $f : X_i \longrightarrow Y_i$ soit encore dominant. Ceci ramène l'étude au cas de variétés algébriques intègres. Si f était dominant, on pourrait lui associer le morphisme de corps $\text{Rat}(Y) \longrightarrow \text{Rat}(X)$. Mais alors la définition de la dimension implique que $\dim Y \leq \dim X$. \square

THÉORÈME 9.3. — *Soient $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme dominant de variétés algébriques intègres. On a $\dim X \geq \dim Y$ et*

- (i) *pour tout $x \in X$, on a $\dim_x f^{-1}(f(x)) \geq \dim X - \dim Y$;*
- (ii) *il existe des ouverts denses U de X et V de Y tels que $f(U) = V$ et tels que pour $x \in U$ on ait*

$$\dim_x f^{-1}(f(x)) = \dim X - \dim Y$$

Démonstration. Démontrons l'assertion (i) : on peut évidemment supposer que Y est une variété algébrique affine de dimension m . On peut alors trouver un morphisme fini $g : Y \longrightarrow \mathbb{A}^m$; soit $z = g(y)$. On sait d'après le lemme de Krull que toutes les composantes irréductibles de $(gf)^{-1}(z)$ sont de dimension $\geq \dim X - m$. Les composantes irréductibles

de $f^{-1}(y)$ font évidemment partie des composantes irréductibles de $(gf)^{-1}(z)$: ceci entraîne l'assertion (i).

Démontrons l'assertion (ii) : On peut supposer que X et Y sont des variétés algébriques affines. On considère l'extension $\text{Rat}(Y) \longrightarrow \text{Rat}(X)$ induite par f , et on choisit des éléments $x_1, \dots, x_d \in \text{Rat}(X)$ algébriquement indépendants sur $\text{Rat}(Y)$ tels que l'extension

$$\text{Rat}(Y)(x_1, \dots, x_d) \hookrightarrow \text{Rat}(X)$$

soit une extension algébrique. On a évidemment $d = \dim X - \dim Y$. Le premier membre est le corps des fonctions rationnelles sur $Y \times \mathbb{A}^d$. Soit U un ouvert principal non vide convenable de X sur lequel les fonctions rationnelles x_i sont des fonctions régulières. Le morphisme induit $\mathcal{O}(Y \times \mathbb{A}^d) \longrightarrow \mathcal{O}(U)$ définit un morphisme dominant $\phi : U \longrightarrow Y \times \mathbb{A}^d$ dont la première composante est la restriction de f à l'ouvert U . Soient u_j des générateurs de l'algèbre de type fini $\mathcal{O}(U)$. Ces éléments sont entiers sur l'algèbre d'un ouvert principal non vide convenable $V \subset Y \times \mathbb{A}^d$, et donc le morphisme $\mathcal{O}(Y \times \mathbb{A}^d) \longrightarrow \mathcal{O}(U \cap \phi^{-1}(V))$ est fini et surjectif. Quitte à remplacer U par l'ouvert non vide $U \cap \phi^{-1}(V)$ on peut supposer que $\phi(U) \subset V$. On obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow[\phi]{\sim} & V \subset Y \times \mathbb{A}^d \\ & \searrow f|_U & \downarrow g = \text{pr}_1|_V \\ & & Y \end{array}$$

où le morphisme ϕ est fini et dominant, donc surjectif. Soit $y = f(x)$. Le morphisme induit $\phi : f^{-1}(y) \longrightarrow g^{-1}(y)$ est encore fini et surjectif. Donc $\dim_x f^{-1}(y) = \dim_{\phi(x)} g^{-1}(y)$. Les fibres de la projection $V \longrightarrow Y$ sont évidemment des ouverts de \mathbb{A}^d donc de dimension d . Par suite $\dim_x f^{-1}(y) = d$. \square

COROLLAIRE 9.4. — *Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de variétés algébriques. Sur X , la fonction $\varphi : x \mapsto \dim_x f^{-1}(f(x))$ est semi-continue supérieurement.*

Démonstration. Remarquons d'abord que si X est réunion de fermés irréductibles X_i , si f_i désigne la restriction de f à X_i , on a

$$\dim_x f^{-1}(f(x)) = \sup_{i, x \in X_i} \dim_x f_i^{-1}(f_i(x)).$$

Si ℓ est un entier, l'ensemble $F = \{x \in X, \dim_x f^{-1}(f(x)) \geq \ell\}$ est la réunion des parties $F_i = \{x \in X_i, \dim_x f_i^{-1}(f_i(x)) \geq \ell\}$. Ceci nous ramène au cas où X et Y sont irréductibles.

On raisonne par récurrence sur la dimension de X , et on suppose donc que X et Y sont irréductibles. On peut de plus supposer f dominant. D'après le théorème ci-dessus, il existe un ouvert dense U de X sur lequel $x \mapsto \dim_x f^{-1}(f(x))$ est constante et égale à $d = \dim X - \dim Y$. Soit Z le fermé complémentaire de U , et $g : Z \longrightarrow Y$ la restriction de f à Z . D'après le théorème ci-dessus si ℓ est un entier, l'ensemble des points $x \in X$ tels que $\dim_x f^{-1}(f(x)) \geq \ell$ est X si $\ell \leq d$, et si $\ell > d$, c'est l'ensemble des points x de Z tels que $\dim g^{-1}(g(x)) \geq \ell$. Par hypothèse de récurrence, c'est un fermé de Z et donc de X . \square

COROLLAIRE 9.5. — *Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de variétés algébriques, fermé surjectif. Alors la fonction à valeurs entières définie sur Y par $y \mapsto \dim f^{-1}(y)$ est semi-continue supérieurement.*

Démonstration. On a en effet

$$\dim f^{-1}(y) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} \dim_x f^{-1}(f(x)).$$

Ainsi, si ℓ est un entier, l'ensemble des $y \in Y$ tels que $\dim f^{-1}(y) \geq \ell$ est l'image par f du fermé des points $x \in X$ tels que $\dim_x f^{-1}(f(x)) \geq \ell$. Compte-tenu du fait que f est fermée, on obtient ainsi un fermé de Y . \square

Il n'est pas vrai que cette fonction est semi-continue si on oublie l'hypothèse que f est fermée (cf. exercice 9.2 ci-dessous).

Exercice 9.1

Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de variétés algébriques ; montrer que si X et Y ne sont plus irréductibles, il n'est pas toujours possible de trouver un ouvert U de X sur lequel on ait pour $x \in U$

$$\dim_x f^{-1}(f(x)) = \dim X - \dim Y.$$

Exercice 9.2 (Nicusor Dan)

On considère le morphisme $f : \mathbb{A}^3 \longrightarrow \mathbb{A}^3$ défini par

$$(x, y, z) \mapsto (x, (xy - 1)y, (xy - 1)z).$$

Démontrer que f est surjective, et que l'ensemble des points $a \in \mathbb{A}^3$ tels que $\dim f^{-1}(f(a)) = 1$ est une surface fermée de k^3 . Vérifier que la fonction $b \mapsto \dim f^{-1}(b)$ n'est pas semi-continue supérieurement.

Exercice 9.3

Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de variétés algébriques, et

$$d = \sup_{x \in X} \dim f^{-1}(f(x)).$$

Montrer que $\dim X \leq \dim Y + d$.

9.2. Valeurs critiques d'un morphisme

Dans ce paragraphe, le corps k est supposé algébriquement clos de caractéristique 0. En géométrie différentielle, le théorème de Sard dit que l'ensemble des valeurs critiques d'un morphisme de variétés différentielles de classe C^∞ est de mesure nulle. En géométrie algébrique, la formulation est plus précise :

THÉORÈME 9.6. — (*Bertini*) Soient X et Y deux variétés algébriques, et $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de variétés algébriques. Pour tout entier r , on considère l'ensemble des points de X défini par

$$Z_r = \{x \in X, \operatorname{rg} d_x f \leq r\}$$

Alors $\dim \overline{f(Z_r)} \leq r$.

Cet énoncé serait évidemment faux en caractéristique p : l'application $f : \mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbb{A}^1$ définie par $x \mapsto x^p$ est régulière ; la différentielle est nulle en tout point, et l'image de f est \mathbb{A}^1 .

COROLLAIRE 9.7. — Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme dominant de variétés algébriques lisses et irréductibles. Il existe un ouvert dense V de Y contenu dans l'image de f , tel que pour $y \in V$ la fibre $f^{-1}(y)$ soit une variété algébrique lisse de dimension $\dim X - \dim Y$.

Démonstration. D'après le théorème 9.3 on peut supposer que f est surjective. Soit Z l'ensemble des points de X où le rang de $d_x f$ est $< \dim Y$. Alors l'adhérence de $f(Z)$ est de dimension $< \dim Y$. Au-dessus de l'ouvert complémentaire, les fibres $f^{-1}(y)$ sont des variétés algébriques dont l'espace tangent de Zariski est en tout point x de dimension $\leq \dim X - \dim Y$, puisque cet espace tangent de Zariski en x est contenu dans le noyau de $d_x f$. D'après le théorème 9.3 la dimension de $f^{-1}(y)$ en x est $\geq \dim X - \dim Y$. Par suite, au-dessus de cet ouvert, la fibre $f^{-1}(y)$ est lisse de dimension $\dim X - \dim Y$. \square

Exemple

Soit $G = \text{Grass}(d + 1, k^{n+1})$ la grassmannienne des sous-espaces projectifs W de dimension d de \mathbb{P}_n . Désignons par $D \subset G \times \mathbb{P}_n$ la variété d'incidence, c'est-à-dire l'ensemble des couples (W, x) tels que $x \in W$. Alors

(1) La variété D est une variété lisse de dimension $(d + 1)(n - d) + d$, et la projection $\text{pr}_2 : D \longrightarrow \mathbb{P}_n$ est une submersion surjective (*i.e.* la différentielle est surjective ; en fait elle a ici des sections locales).

(2) Si X est une sous-variété lisse de \mathbb{P}_n , de codimension c l'image réciproque $\text{pr}_2^{-1}(X)$ est une variété lisse de codimension c .

(3) Le théorème de Bertini dit que la fibre générale de $\text{pr}_1 : D \longrightarrow G$ est une sous-variété lisse de dimension $\dim X + d - n$. Autrement dit, il existe un ouvert partout dense \mathcal{U} de G tel que pour $W \in \mathcal{U}$, l'intersection $X \cap W$ soit lisse de dimension $\dim X + d - n$.

Le théorème 9.6 est une conséquence du lemme suivant :

LEMME 9.8. — *Si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme dominant de variétés algébriques intègres, il existe un point $x \in X$ lisse tel que $f(x)$ soit lisse sur Y et que la différentielle*

$$d_x f : T_x X \longrightarrow T_{f(x)} Y$$

soit surjective.

Démonstration. La restriction de f à l'ouvert des points lisses est encore dominant : on peut donc évidemment supposer que X et Y sont lisses. On peut également supposer que X et Y sont des variétés algébriques affines.

Cas particulier

Commençons par le cas où X est un ouvert non vide d'une hypersurface intègre H de $Y \times \mathbb{A}^1$ définie par l'idéal engendré par un polynôme $P \in \mathcal{O}(Y \times \mathbb{A}^1)$ s'écrivant

$$P(y, t) = a_0(y)t^r + \dots + a_r(y)$$

avec $a_i \in \mathcal{O}(Y)$ et $a_0 \neq 0$. L'application $f : X \longrightarrow \mathbb{A}^1$ considérée est induite par la première projection. L'hypothèse H intègre assure que le polynôme P est irréductible dans $\mathcal{O}(Y)[t]$ et le reste dans les algèbres $\mathcal{O}(Y_c)[t]$, où $c \in \mathcal{O}(Y)$ est une fonction régulière non nulle sur Y . Par suite ce polynôme reste irréductible dans $\text{Rat}(Y)[t]$. Parce que le corps k est de caractéristique 0, le discriminant Δ de ce polynôme irréductible est non nul dans $\text{Rat}(Y)$; donc c'est une fonction régulière non identiquement nulle dans $\mathcal{O}(Y)$. Au-dessus de l'ouvert de Y des points lisses de Y tels que $\Delta \neq 0$, l'espace tangent de Zariski

à $X \subset Y \times \mathbb{A}^1$ en $x = (y, t)$ est le sous-espace vectoriel de la somme directe $T_y Y \oplus k$ donné par le noyau de la forme linéaire de matrice

$$(\partial_Y P(y, t) \quad \frac{\partial P}{\partial t}(y, t))$$

où $\partial_Y P$ est la différentielle partielle dans la direction Y . L'application linéaire $d_x f : T_x X \longrightarrow T_y Y$ est encore induite par la première projection. Par hypothèse, Y est lisse.

En un point $(y, t) \in X$ tel que le discriminant $\Delta(y)$ soit non nul, on a $\frac{\partial P}{\partial t}(y, t) \neq 0$ ce qui entraîne que $d_{(y,t)} f$ est surjective.

Cas général

Comme dans la démonstration du théorème 9.3, il existe un ouvert affine U non vide de X et un ouvert affine non vide V de $Y \times \mathbb{A}^d$ tels que le morphisme $f|_U = g\phi$ où $\phi : U \longrightarrow V$ est un morphisme fini et $g : V \longrightarrow Y$ la restriction de la projection canonique sur le premier facteur. Puisque la différentielle de g est partout surjective, ceci nous ramène au cas d'un morphisme fini surjectif.

Considérons donc un morphisme fini de variétés algébriques affines lisses et irréductibles $f : X \longrightarrow Y$; comme dans la démonstration du lemme 5.12 le théorème de l'élément primitif, qui ne nécessite aucune précaution en caractéristique 0, permet de trouver un ouvert non vide U de X , un ouvert V d'une hypersurface intègre de $H \subset Y \times \mathbb{A}^1$ comme ci-dessus et un isomorphisme $\phi : U \longrightarrow V$ tels que $f|_U = g\phi$, où g est la restriction de la projection canonique sur Y à l'ouvert V . Ceci nous ramène au cas particulier étudié ci-dessus. \square

Démonstration du théorème 9.6

Soit Y' une composante irréductible de $\overline{f(Z_r)}$, et X' une composante irréductible de $\overline{Z_r} \cap f^{-1}(Y')$ telle que $g = f|_{X'} : X' \longrightarrow Y'$ soit dominant ; on les équipe de leur structure de variété algébrique réduite. Il existe alors d'après le lemme 9.8 un point lisse x de X' tel que $g(x)$ soit lisse et que la différentielle

$$d_x g : T_x X' \longrightarrow T_{f(x)} Y'$$

soit surjective. Puisque cette propriété reste vraie au voisinage de x , on peut supposer que x appartient à Z_r . On a alors les majorations $\text{rg}(d_x g) \leq \text{rg}(d_x f) \leq r$. Par suite $\dim Y' \leq \dim T_{f(x)} Y' \leq r$. Ceci achève la démonstration. \square

Le théorème de Bertini permet d'améliorer l'assertion (ii) dans le théorème 9.3.

THÉORÈME 9.9. — Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme dominant de variétés algébriques intègres. Il existe un ouvert non vide $V \subset Y$ contenu dans l'image de f et tel que pour $y \in V$ on ait

$$\dim f^{-1}(y) = \dim X - \dim Y.$$

Démonstration. On peut évidemment supposer que Y est lisse, et que f est surjective d'après le théorème 9.3. On peut d'autre part trouver des sous-variétés localement fermées, lisses et irréductibles X_i , en nombre fini telles que $X = \cup_i X_i$. Soit f_i la restriction de f à X_i . Soit Z_i le fermé de X_i des points x tels que $\text{rg } d_x f_i < \dim Y$. Soit V le complémentaire du fermé $\cup_i \overline{f(Z_i)}$ dans Y ; on sait que V n'est pas vide. Pour $y \in U$, on a $f^{-1}(y) = \cup_i f_i^{-1}(y)$, et $f_i^{-1}(y)$ est lisse de dimension $\dim X_i - \dim Y$. Il en résulte que la fibre $f^{-1}(y)$ est elle-même de dimension $\leq \dim X - \dim Y$. Comme cette dimension est toujours minorée par $\dim X - \dim Y$, ceci fournit le résultat attendu.

Exercice 9.4

Soit S_r l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré d sur \mathbb{A}^3 .

1. On considère, dans l'espace projectif $\mathbb{P}(S_r)$, l'ensemble U des classes de polynômes irréductibles qui définissent des courbes irréductibles. Montrer que U est un ouvert de Zariski de $\mathbb{P}(S_r)$. Evaluer la codimension du complémentaire.

2. On considère, dans l'espace projectif $\mathbb{P}(S_r)$ l'ensemble \mathcal{C} des classes de polynômes homogènes qui définissent une courbe lisse. Montrer \mathcal{C} est le complémentaire d'une hypersurface de $\mathbb{P}(S_r)$.

Chapitre 2

Fibrés vectoriels et faisceaux algébriques

1. Fibrés vectoriels

Il s'agit de définir la notion de famille algébrique d'espaces vectoriels, paramétrée par une variété algébrique X ; sur une variété algébrique réduite, les définitions et les énoncés sont tout-à-fait semblables à ceux qu'on donne en géométrie différentielle pour les fibrés vectoriels différentiables. Il y a cependant une grande différence qui provient de l'étude des sections de ces fibrés : ainsi sur une variété algébrique, il est courant de trouver des fibrés vectoriels dont la seule section régulière est la section nulle.

Il est encore possible, mais plus délicat, d'introduire la notion de fibré vectoriel sur une variété algébrique X non réduite. Dans le cas où X ne serait pas réduite, la définition d'un fibré vectoriel donnée ci-dessous et la notion de morphisme de fibrés vectoriels ne sont plus adaptées car elles ne permettent pas d'obtenir une équivalence de catégorie entre fibrés vectoriels et faisceaux localement libres (*cf.* section 2) : elles ne permettent même pas de munir l'ensemble des sections d'une structure de $\mathcal{O}(X)$ -module (voir aussi l'exercice 1.1). Il est conseillé dans ce cas de manipuler plutôt les faisceaux localement libres ; si l'on veut une interprétation géométrique de ces faisceaux localement libres on pourra considérer les variétés algébriques introduites dans l'exercice 2.5. Pour simplifier, nous nous limitons ici au cas où X est une variété réduite.

Soit k un corps algébriquement clos.

1.1. Définitions.

Fibrations et fibrés vectoriels

Soit X une variété algébrique réduite sur k . On appelle fibration vectorielle au-dessus de X la donnée d'une variété algébrique E , d'un morphisme surjectif $p : E \longrightarrow X$ de variétés algébriques, et, pour chaque point $x \in X$ d'une structure de k -espace vectoriel sur la fibre $p^{-1}(x)$. La variété algébrique E s'appelle l'espace total de la fibration ; la fibre au-dessus de x sera notée E_x . Etant données deux fibrations vectorielles $p : E \longrightarrow X$ et $p' : E' \longrightarrow X$ un morphisme de variétés algébriques $f : E \longrightarrow E'$ est appelé morphisme de fibrations s'il est compatible avec les projections p et p' , c'est-à-dire que $p' \circ f = p$, et si pour tout $x \in X$ l'application induite $f_x : E_x \longrightarrow E'_x$ est linéaire. Un tel morphisme f de fibrations est un isomorphisme si f est un isomorphisme de variétés algébriques ; l'inverse f^{-1} sera automatiquement un morphisme de fibrations. La fibration $X \times k^r \longrightarrow X$ donnée par la première projection s'appelle la fibration triviale de rang r . Pour tout ouvert $U \subset X$ on désigne par $E|_U$ la fibration $p^{-1}(U) \longrightarrow U$: c'est la restriction de E à U .

Un fibré vectoriel algébrique de rang r sur X est la donnée d'une fibration vectorielle $E \longrightarrow X$ localement triviale au sens suivant : pour tout point $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U de x et un isomorphisme de fibrations au-dessus de U

$$\varphi : E|_U \longrightarrow U \times k^r.$$

Un tel isomorphisme sera appelé une trivialisatıon locale ou carte locale pour le fibré vectoriel $E \longrightarrow X$. Souvent, quand il n'y a pas d'ambiguıté, un fibré vectoriel $E \longrightarrow X$ sur une variété algébrique X sera abusivement noté E . Le fibré trivial $X \times k^r \longrightarrow X$ est parfois noté k_X^r .

Sections régulières d'un fibré vectoriel

Soit $p : E \longrightarrow X$ un fibré vectoriel de rang r sur une variété algébrique X réduite. On appelle section régulière de E sur X un morphisme de variétés algébriques $s : X \longrightarrow E$ tel que $ps = \text{id}_X$.

L'ensemble $\Gamma(X, E)$ des sections de E constituent un module sur l'algèbre $\mathcal{O}(X)$ des fonctions régulières sur X . En effet, les opérations somme et produit par un scalaire sont définies à partir des morphismes de variétés algébriques $E \times_X E \longrightarrow E$ et $\mathbb{A}^1 \times E \longrightarrow E$ représentant la somme des vecteurs d'une même fibre et la multiplication par les scalaires,

lesquelles sont clairement des applications régulières. Ces opérations sont définies pour s et $t \in \Gamma(X, E)$ et $\alpha \in \mathcal{O}(X)$ par les formules

$$(s + t)(x) = s(x) + t(x) \quad ; \quad (\alpha s)(x) = \alpha(x)s(x)$$

Quand il n'y a pas de risque de confusion, ce module sera souvent noté $\Gamma(E)$. Le préfaisceau $U \mapsto \Gamma(E|_U)$ est un faisceau de modules sur le faisceau des fonctions régulières \mathcal{O}_X , souvent noté $\mathcal{O}_X(E)$.

Morphismes de fibrés vectoriels

Soit X une variété algébrique réduite. Etant donné deux fibrés vectoriels E et F de rangs respectifs r et s au-dessus de X , on appelle morphisme de E dans F un morphisme des fibrations vectorielles sous-jacentes.

LEMME 1.1. — *Un morphisme de fibrés vectoriels triviaux*

$$\begin{array}{ccc} X \times k^r & \xrightarrow{f} & X \times k^s \\ & \searrow & \swarrow \\ & X & \end{array}$$

est déterminé par une application régulière $g : X \longrightarrow L(k^r, k^s)$ à valeurs dans l'espace vectoriel $L(k^r, k^s)$ des applications linéaires de k^r dans k^s et s'écrit pour $(x, v) \in X \times k^r$

$$(x, v) \mapsto (x, g(x)v).$$

Démonstration. Evidemment, la première composante de f est la première projection. Se donner un morphisme $X \times k^r \longrightarrow k^s$ revient à se donner un morphisme d'algèbres $\phi : \mathcal{O}(k^s) \longrightarrow \mathcal{O}(X \times k^r)$. Si on désigne par x_i et y_j les fonctions coordonnées sur k^r et k^s respectivement, la linéarité le long des fibres impose que $\phi(y_j)$ s'écrit dans l'algèbre $\mathcal{O}(X \times k^r) = \mathcal{O}(X)[x_1, \dots, x_r]$

$$\phi(y_j) = \sum_i g_{ji} \otimes x_i$$

où $g_{ji} \in \mathcal{O}(X)$. Ainsi, se donner f revient à se donner la matrice (g_{ji}) . L'application f s'écrit alors pour $(x, v) \in X \times k^r$

$$(x, v) \mapsto (x, \sum_{i,j} g_{ji}(x)v_i e_j)$$

où e_j est la base canonique de k^s , et où les v_i sont les coordonnées de v . \square

Considérons maintenant un morphisme de fibrés vectoriels $f : E \longrightarrow F$ au-dessus de X . Si $\varphi : E|_U \longrightarrow U \times k^r$ et $\psi : F|_U \longrightarrow U \times k^s$ sont des cartes locales pour les fibrés E et F au-dessus du même ouvert U le morphisme $\tilde{f} = \psi f \varphi^{-1} : U \times k^r \longrightarrow U \times k^s$ s'appelle l'expression de f dans les cartes φ et ψ ; d'après ce qu'on vient de voir, ce morphisme est déterminé par un morphisme de variétés algébriques $g : U \longrightarrow L(k^r, k^s)$ à valeurs dans l'espace vectoriel $L(k^r, k^s)$ des applications k -linéaires de k^r dans k^s . Il s'écrit

$$(x, v) \mapsto (x, g(x)v)$$

PROPOSITION 1.2. — *Soit $f : E \longrightarrow F$ un morphisme de fibrés vectoriels algébriques, et x_0 un point tel que f_{x_0} soit inversible. Alors il existe un voisinage ouvert U de x_0 tel que $f|_U : E|_U \longrightarrow F|_U$ soit un isomorphisme.*

Démonstration. Il suffit de le vérifier pour l'expression locale de f . L'hypothèse signifie que $g(x_0)$ est inversible. Puisque g est continue, $g(x)$ est inversible sur un voisinage ouvert U de x_0 , ce qui permet de construire l'inverse de f . \square

Les fibrés vectoriels de base X constituent évidemment une catégorie additive : si E et F sont des fibrés vectoriels sur X , on définit une structure de groupe abélien (et même de $\mathcal{O}(X)$ -modules) sur l'ensemble des morphismes $E \longrightarrow F$: si f et g sont deux morphismes de E dans F , on pose

$$(f + g)_x = f_x + g_x$$

pour $x \in X$, et pour $\alpha \in \mathcal{O}(X)$

$$(\alpha f)_x = \alpha(x)f_x.$$

Exercice 1.1

Montrer que si X n'est plus réduite, un morphisme de variétés algébriques $f : X \times k^r \longrightarrow X \times k^s$, rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X \times k^r & \xrightarrow{f} & X \times k^s \\ & \searrow & \swarrow \\ & X & \end{array}$$

et linéaire sur chaque fibre n'est plus obligatoirement déterminé par un morphisme de variétés algébriques $X \longrightarrow GL(r)$.

1.2. Fonctions de transition

Soit $E \longrightarrow X$ un fibré vectoriel sur la variété algébrique X . Si $\varphi_i : E|_{U_i} \longrightarrow U_i \times k^r$ et $\varphi_j : E|_{U_j} \longrightarrow U_j \times k^r$ sont des cartes locales au-dessus des ouverts U_i et U_j respectivement, le changement de cartes, défini au-dessus de $U_{i,j} = U_i \cap U_j$ par

$$\varphi_{j,i} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : U_{i,j} \times k^r \longrightarrow U_{i,j} \times k^r$$

est déterminé par un morphisme $g_{j,i} : U_{i,j} \longrightarrow \mathrm{GL}(r)$ à valeurs dans le groupe linéaire $\mathrm{GL}(r)$ des matrices inversibles à coefficients dans k . Le morphisme $\varphi_{j,i}$ s'écrit alors $(x, v) \mapsto (x, g_{j,i}(x)v)$, où $g_{j,i} : U_{i,j} \longrightarrow \mathrm{GL}(r)$ est une application régulière. Les morphismes $g_{j,i}$ s'appellent fonctions de transition associées aux trivialisations φ_i et φ_j . Si $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de X sur lequel on dispose de trivialisations φ_i , les morphismes de transition satisfont aux conditions suivantes :

- (a) $g_{i,i}(x) = \mathrm{id}_{k^r}$ pour $x \in U_i$
- (b) sur l'intersection $U_{i,j,k} = U_i \cap U_j \cap U_k$ on a $g_{i,k} = g_{i,j}g_{j,k}$.

Fibré vectoriel associé à des fonctions de transition

Soit $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X ; on se donne pour tout couple $(i, j) \in I^2$ un morphisme $g_{i,j} : U_{i,j} \longrightarrow \mathrm{GL}(r)$ satisfaisant aux conditions (a) et (b) ci-dessus. On dit que $(g_{i,j})$ est un cocycle de \mathcal{U} à valeurs dans $\mathrm{GL}(r)$.

On considère le quotient

$$E = \left(\coprod_{i \in I} U_i \times k^r \right) / R$$

par la plus fine des relations d'équivalence qui identifie les points $(x, v) \in U_i \times k^r$ avec $(x', v') \in U_j \times k^r$ pourvu que $x = x'$ et $v' = g_{j,i}(x)(v)$. Cet ensemble est muni de la topologie quotient. On a alors une projection continue $p : E \longrightarrow X$ et au-dessus de U_i un homéomorphisme

$$E|_{U_i} \xrightarrow{\sim} U_i \times k^r$$

Il résulte de la section 2.7 du chapitre 1 qu'on peut alors définir une structure de variété algébrique (séparée et de type fini) sur l'espace topologique quotient E en transportant la structure de variété algébrique de $U_i \times k^r$; au-dessus de $U_{i,j}$, les structures obtenues à partir de $U_i \times k^r$ et de $U_j \times k^r$ coïncident. On peut aussi transporter la structure d'espace vectoriel des fibres : si $x \in U_i$, la structure d'espace vectoriel obtenue sur E_x ne dépend pas de i . On obtient ainsi une fibration vectorielle sur $E \longrightarrow X$, et par définition, l'isomorphisme ci-dessus devient une trivialisations : on a ainsi construit à partir du système de fonctions de transition un fibré vectoriel algébrique de rang r sur X .

1.3. Fibrés associés à des fibrés vectoriels donnés.

On se donne deux fibrés vectoriels E et F sur une variété algébrique X . La somme directe de E et F est définie ensemblistement par

$$E \oplus F = \coprod_{x \in X} (E_x \oplus F_x)$$

Pour munir cet ensemble d'une structure de variété algébrique, on commence par choisir des cartes locales $\varphi_i : E|_{U_i} \longrightarrow U_i \times k^r$ et $\psi_i : F|_{U_i} \longrightarrow U_i \times k^s$ au-dessus du même ouvert U_i ; on considère les bijections associées à φ_i et ψ_i

$$E \oplus F|_{U_i} \longrightarrow U_i \times (k^r \oplus k^s)$$

et on transporte la structure de variété algébrique du membre de droite grâce à cette bijection. Pour voir que cette structure est indépendante du choix des cartes il suffit de calculer le changement de cartes pour $E \oplus F$: sur l'ouvert $U_{i,j}$ il est donné par les fonctions de transitions $U_{i,j} \longrightarrow GL(k^r \oplus k^s)$ définies par la matrice

$$\begin{pmatrix} g_{i,j} & 0 \\ 0 & h_{i,j} \end{pmatrix}$$

où $(g_{i,j})$ et $(h_{i,j})$ sont les fonctions de transition pour E et F respectivement. Le fibré vectoriel ainsi construit, muni des morphismes canoniques $E \longrightarrow E \oplus F$ et $F \longrightarrow E \oplus F$ satisfait à la propriété universelle demandées aux sommes directes. Il est bien sûr isomorphe au produit fibré $E \times_X F$.

On construit de la même façon les fibrés $\underline{\text{Hom}}(E, F)$, $E \otimes F$, le fibré dual E^* , la puissance extérieure $\Lambda^k E$, les puissances symétriques $S^k E$. Si E est de rang r , le fibré $\Lambda^r E$ est un fibré vectoriel de rang 1, souvent noté $\det E$.

Exercice 1.2

Soit E et F sont deux fibrés vectoriels sur une variété algébrique X . On a vu que l'ensemble $\text{Hom}(E, F)$ des morphismes de fibrés vectoriels $E \longrightarrow F$ est naturellement muni d'une structure de $\mathcal{O}(X)$ -module. Montrer que l'on a un isomorphisme canonique de $\mathcal{O}(X)$ -modules

$$\Gamma(X, \underline{\text{Hom}}(E, F)) \simeq \text{Hom}(E, F).$$

1.4. Changement de base

Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de variétés algébriques, et $q : F \longrightarrow Y$ un fibré vectoriel de rang r au-dessus de Y . On considère le produit fibré $E = X \times_Y F$: il s'agit de l'image réciproque de la diagonale de $Y \times Y$ par le morphisme

$$X \times F \xrightarrow{(f,q)} Y \times Y$$

(cf. exercice 2.12, chapitre 1). On le munit de la projection $p : E \longrightarrow X$ induite par la première projection pr_1 . Au-dessus d'un point $x \in X$, la fibre E_x s'identifie à $F_{f(x)}$ et on obtient ainsi une fibration vectorielle de rang r au-dessus de X . De plus, si $F|_V \simeq V \times k^r$ est une trivialisatoin locale de F au-dessus de l'ouvert V de Y , on obtient une trivialisatoin locale de E au-dessus de l'ouvert $f^{-1}(V)$. On obtient ainsi une structure de fibré vectoriel de rang r sur $p : E \longrightarrow X$ qui s'appelle l'image réciproque de $q : F \longrightarrow Y$ par le morphisme f . Ce fibré vectoriel sur X est noté $f^*(F)$. La deuxième projection $g = \text{pr}_2$ fournit un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} E = f^*(F) & \xrightarrow{g} & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

et ce morphisme g est linéaire sur chaque fibre. Si $E' \longrightarrow X$ est un autre fibré vectoriel sur X , se donner un morphisme de fibrés vectoriels $\phi : E' \longrightarrow f^*(F)$ sur X revient à se donner un morphisme de variétés algébriques $g' : E' \longrightarrow F$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{g'} & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

et tel que g' soit linéaire sur chaque fibre. Si s est une section régulière de F , l'application $(f, fs) : X \longrightarrow E$ est une section régulière de E qu'on appelle l'image réciproque de s et qui est notée $f^*(s)$. En particulier, on obtient un morphisme canonique de \mathcal{O}_X -modules

$$\mathcal{O}_Y(F) \longrightarrow f_*(\mathcal{O}_X(E))$$

et par suite un morphisme de \mathcal{O}_X -modules

$$f^*(\mathcal{O}_Y(F)) \longrightarrow \mathcal{O}_X(f^*(F))$$

LEMME 1.3. — *Ce morphisme est un isomorphisme de \mathcal{O}_Y -modules.*

Démonstration. La question est locale sur X . On peut donc supposer que F est trivial. Comme le morphisme ci-dessus est un morphisme de foncteurs additifs en F , ces foncteurs commutent avec les sommes directes finies, et on se ramène ainsi au cas du fibré trivial $Y \times k \longrightarrow Y$. Mais alors le morphisme est le morphisme canonique $f^*(\mathcal{O}_Y) \longrightarrow \mathcal{O}_X$ lequel est un isomorphisme par définition. \square

Quand f est le plongement d'une sous-variété fermée X dans Y , le fibré image réciproque est plutôt noté $E|_X$.

1.5. Sous-fibrés vectoriels et fibrés quotients

Soit $p : E \longrightarrow X$ un fibré vectoriel algébrique de rang r sur X . On appelle sous-fibré vectoriel de rang m de E une sous-variété fermée $F \subset E$ telle que pour tout $x \in X$ l'intersection $F \cap E_x$ soit un sous-espace vectoriel de dimension m de E_x et que la fibration vectorielle induite

$$p|_F : F \longrightarrow X$$

soit localement triviale de rang m .

Exemple 1

Soit \mathbb{P}_n l'espace projectif de dimension n . On désigne par (x_0, \dots, x_n) les coordonnées homogènes du point $x \in \mathbb{P}_n$. Considérons l'ensemble des couples $(x, v) \in X \times k^{n+1}$ tels que $v \in x$. C'est une sous-variété fermée H de $\mathbb{P}_n \times k^{n+1}$: au-dessus de l'ouvert U_i de \mathbb{P}_n défini par $x_i \neq 0$, H est définie par les équations

$$v_j = \frac{x_j}{x_i} v_i ; j = 0, \dots, n.$$

La fibre H_x de $H \longrightarrow X$ au-dessus du point x s'identifie à la droite x de k^{n+1} . On a alors un isomorphisme de fibrations

$$U_i \times k \longrightarrow H|_{U_i}$$

donné par $(x, t) \mapsto (x, v)$, où v est défini par $v_j = \frac{x_j}{x_i} t$ pour $j = 0, \dots, n$. Par suite, H est un fibré vectoriel de rang 1 sur X . Ce fibré est appelé fibré de Hopf ; son dual est noté $\mathcal{O}(1)$.

Exemple 2

Plus généralement, soient V un espace vectoriel de dimension n et $G = \text{Grass}(m, V)$ la grassmannienne des sous-espaces de dimension m dans V . Soit S l'ensemble des couples (h, x) de $G \times V$ tels que $x \in h$; alors S est une sous-variété lisse de $G \times V$ et la projection $\text{pr}_1 : S \longrightarrow G$ fait de S un fibré vectoriel de rang m au-dessus de G . Ce sous-fibré est souvent appelé sous-fibré universel du fibré trivial V_G .

Exercice 1.3

Soit V un k -espace vectoriel de dimension n . Soit X une variété algébrique, et $\text{Hom}(X, G)$ l'ensemble des morphismes de variétés algébriques de X dans la grassmannienne $G = \text{Grass}(m, V)$ des sous-espaces vectoriels de V de dimension m . Soit $\mathcal{S}(X, V)$ l'ensemble des sous-fibrés vectoriels de rang m du fibré trivial V_X . Pour tout morphisme $f : X \longrightarrow G$ l'image réciproque $f^*(S)$ du sous-fibré universel est un sous-fibré vectoriel de V_X . Montrer que l'application $f \mapsto f^*(S)$

$$\text{Mor}(X, G) \longrightarrow \mathcal{S}(X, V)$$

est bijective.

Autrement dit, le foncteur contravariant $X \mapsto \mathcal{S}(X, V)$ est représentable par la grassmannienne G , muni du sous-fibré universel $S \subset V_G$.

PROPOSITION 1.4. — *Soit $f : E \longrightarrow F$ un morphisme de fibrés vectoriels au-dessus d'une variété algébrique réduite X . On suppose que le rang de f_x reste constant quand x parcourt X . Alors $\ker f$ et $\text{Im } f$ sont des sous-fibrés vectoriels de E et F respectivement.*

Démonstration. La question est locale sur X . Soit $x \in X$. Choisissons, sur un voisinage ouvert convenable V de x des sous-fibrés K et S de $E|_V$, L et T de $F|_V$ tels que $K_x = \ker f_x$; $L_x = \text{Im } f_x$ et tels que

$$K \oplus S = E|_V ; \quad L \oplus T = F|_V$$

Dans ces sommes directes, le morphisme f s'écrit

$$f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Au point x , les morphismes a, c, d s'annulent et b est inversible. D'après la proposition 1.2, b est un isomorphisme au-dessus d'un voisinage ouvert $W \subset V$ de x . Le noyau de f est alors donné par les couples $(u, v) \in K \oplus S$ tels que $(c - db^{-1}a)u = 0, v = -b^{-1}au$. Il en résulte que le morphisme $c - db^{-1}a$ est de rang constant, et en fait nul puisque c'est déjà

le cas au point x . Alors, au-dessus de W , $\ker f$ est une sous-variété fermée et le morphisme $(u \mapsto (u, b^{-1}au))$ est un isomorphisme de fibrations vectorielles $K|_W \longrightarrow \ker f|_W$, donc $\ker f$ est un sous-fibré de $E|_W$. De même, au-dessus de W , l'image de f s'identifie aux couples $(\xi, \eta) \in L \oplus T$ tels que $\eta = db^{-1}\xi$ et on a un isomorphisme de fibrations $I|_W \longrightarrow \text{Im } f|_W$ défini par $\xi \mapsto (\xi, db^{-1}\xi)$. Par conséquent l'image de f est aussi un sous-fibré vectoriel de F . \square

COROLLAIRE 1.5. — *Soit X une variété algébrique, et $f : E \longrightarrow F$ un morphisme de fibrés vectoriels sur X .*

- (i) *Si f est surjectif, $\ker f$ est un sous-fibré de E .*
- (ii) *Si f est injectif, l'image de f est un sous-fibré vectoriel de F .*

Exemple.

Soit X une sous-variété algébrique lisse de dimension n de \mathbb{A}^m , définie par un idéal (f_1, \dots, f_r) de $\mathcal{O}(\mathbb{A}^m)$. La différentielle $(x, v) \mapsto (x, d_x f(v))$ est de rang constant $m - n$ sur X . Son noyau est un sous-fibré de rang n du fibré trivial $X \times k^m$ appelé fibré tangent à X et noté $T(X)$. Si Y est une autre sous-variété lisse de \mathbb{A}^p tout morphisme $\varphi : X \longrightarrow Y$ induit un morphisme de variétés algébriques $T\varphi : T(X) \longrightarrow T(Y)$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} TX & \xrightarrow{T\varphi} & TY \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\varphi} & Y \end{array}$$

et linéaire sur chaque fibre ; autrement dit, on obtient au-dessus de X un morphisme de fibrés vectoriels, noté encore $T\varphi$,

$$TX \xrightarrow{T\varphi} \varphi^*(TY).$$

Exemple.

Soit plus généralement une variété algébrique lisse X de dimension n . On peut alors trouver un recouvrement de X par des ouverts affines U_i et pour chaque i un isomorphisme $\varphi_i : U_i \longrightarrow W_i$ sur une sous-variété fermée W_i de \mathbb{A}^{n_i} . L'espace vectoriel tangent en x

Fibrés vectoriels et faisceaux algébriques

à X est donné par $T_x X = (\mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2)^*$, où \mathfrak{m}_x est l'idéal maximal de l'anneau local de X au point x . On considère la projection

$$T(X) = \coprod_{x \in X} T_x X \longrightarrow X.$$

L'isomorphisme φ_i induit un isomorphisme $d_x \varphi_i : T_x X \longrightarrow T_{\varphi_i(x)}(W_i)$. On a alors une bijection

$$T(X)|_{U_i} \longrightarrow T(W_i)$$

définie par $(x, v) \mapsto (\varphi_i(x), d_x \varphi_i(v))$, linéaire sur chaque fibre, ce qui permet de transporter la structure de fibré vectoriel à $T(X)|_{U_i}$. Au-dessus de l'ouvert $U_{i,j} = U_i \cap U_j$ les structures ainsi obtenues à partir de φ_i ou de φ_j coïncident, ce qui définit une structure de fibré vectoriel sur $TX \longrightarrow X$: c'est le fibré vectoriel tangent à X .

Si X est une variété algébrique lisse, les sections du fibré tangent sont appelées champs de vecteurs. L'ensemble des champs de vecteurs sur X est donc muni d'une structure de module sur $\mathcal{O}(X)$.

Suites exactes

Soit $E' \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} E''$ deux morphismes de fibrés vectoriels sur la même base X .

On dit que cette suite est une suite exacte si pour tout $x \in X$, on a $\text{Im } f_x = \ker g_x$. Si c'est le cas, sur chaque composante connexe de X le rang de f_x est constant. Alors, sur chaque composante connexe de X , $\text{Im } f = \ker g$ est un sous-fibré vectoriel de E , le noyau $\ker f$ est un sous-fibré vectoriel de E' , et l'image de g un sous-fibré vectoriel de E'' .

Exercice 1.4

Soit $0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0$ une suite exacte de fibrés vectoriels sur la variété algébrique X . Démontrer que l'on a un isomorphisme canonique

$$\det E \simeq \det E' \otimes \det E''$$

Fibrés vectoriels quotients

Soit $F \subset E$ un sous-fibré vectoriel d'un fibré vectoriel algébrique E . On considère la famille d'espaces vectoriels au-dessus de X

$$E/F = \coprod_{x \in X} E_x / F_x$$

Tout morphisme de fibrés vectoriels $f : E \longrightarrow G$ s'annulant sur F se factorise de manière unique par une application $\bar{f} : E/F \longrightarrow G$.

PROPOSITION 1.6. — *Il existe une structure de fibré vectoriel et une seule sur $E/F \longrightarrow X$ et un morphisme de fibrés vectoriels $\pi : E \longrightarrow E/F$ satisfaisant à la propriété universelle suivante : pour tout morphisme $f : E \longrightarrow G$ s'annulant sur F l'application $\bar{f} : E/F \longrightarrow G$ est un morphisme de fibrés vectoriels algébriques.*

Démonstration. Soit $x \in X$. Sur un voisinage ouvert U de x , on peut trouver un sous-fibré vectoriel S de $E|_U$ tel que l'on ait $F_x \oplus S_x = E_x$. Le morphisme canonique de fibrés vectoriels

$$F|_U \oplus S \longrightarrow E|_U$$

est alors un isomorphisme au-dessus du point x , donc sur un voisinage ouvert V de x d'après la proposition 1.2. Il en résulte que l'on a une bijection $k : S|_V \longrightarrow (E/F)|_V$ compatible avec les structures d'espaces vectoriels sur les fibres. On transporte la structure de fibré vectoriel de $S|_V$ à l'aide de cette identification. Il est clair que la structure ainsi obtenue au-dessus de V est indépendante du choix de S , et quand on change V , les structures obtenues se recollent. On obtient ainsi une structure de fibré vectoriel sur E/F qui satisfait à la propriété universelle énoncée car $\bar{f} \circ k$ est la restriction de f à $S|_V$: ces restrictions se recollent pour donner le morphisme de fibrés vectoriels $g : E/F \longrightarrow G$ attendu. \square

Exemple

Sur l'espace projectif \mathbb{P}_n le fibré de Hopf H est un sous-fibré du fibré trivial $\mathbb{P}_n \times k^{n+1}$. Ceci permet de définir un fibré quotient de rang n sur \mathbb{P}_n , noté traditionnellement Q .

Exercice 1.5

1. Soit $G = \text{Grass}(m, V)$ la grassmannienne des sous-espaces de dimension m d'un espace vectoriel V de dimension $m+n$. On désigne par S le sous-fibré canonique de rang m du fibré trivial V_G et par Q le fibré quotient. Démontrer que la grassmannienne G est une variété lisse de dimension mn dont le fibré vectoriel tangent est isomorphe à $\text{Hom}(S, Q)$.

2. On prend $m = 1$. Construire une suite exacte de fibrés vectoriels sur l'espace projectif $\mathbb{P}(V)$

$$0 \longrightarrow k_{\mathbb{P}(V)} \longrightarrow V \otimes H^* \longrightarrow T\mathbb{P}(V) \longrightarrow 0$$

Exercice 1.6

On considère la sous-variété Z_r de l'espace vectoriel $L(k^n, k^m)$ des applications linéaires $k^n \longrightarrow k^m$ de rang r . Montrer que Z_r est une variété lisse, et décrire son

fibré vectoriel tangent. On pourra introduire le fibré noyau et conoyau du morphisme canonique de fibrés vectoriels sur X

$$Z_r \times k^n \longrightarrow Z_r \times k^m$$

défini par $(f, v) \mapsto (f, f(v))$.

Exercice 1.7

On considère l'espace vectoriel des formes quadratiques $\mathcal{Q} = S^2V^*$ sur un espace vectoriel V de dimension n .

1. Montrer que les formes quadratiques de rang r forment une sous-variété lisse Z_r de \mathcal{Q} . Montrer que l'espace vectoriel tangent en un point q s'identifie à l'espace vectoriel des formes quadratiques \tilde{q} qui s'annulent sur $\ker q$.

2. Décrire le fibré vectoriel tangent à Z_r .

1.6. Fibré vectoriel associé à une représentation

Soit $E \rightarrow X$ un fibré vectoriel de rang r au-dessus de X . Considérons l'ensemble R des couples (x, φ) formés d'un point de X et d'un isomorphisme linéaire $\varphi : k^r \rightarrow E_x$. Un tel isomorphisme est appelé un repère de E_x . Cet ensemble est muni de la première projection $R \rightarrow X$; au-dessus d'un ouvert U où E est trivial, une trivialisatation fournit une bijection $R|_U \cong U \times GL(r)$. Par recollement, ceci permet de munir R d'une structure de variété algébrique sur laquelle le groupe $GL(r)$ opère (algébriquement) à droite; l'action est libre (c'est-à-dire que le stabilisateur de chaque point est trivial), et les orbites s'identifient aux fibres de la projection $R \rightarrow X$; de plus la variété X est un quotient de R au sens des catégories : ceci signifie que tout morphisme $R \rightarrow Z$ dans une variété algébrique arbitraire Z , constant sur les orbites se factorise à travers X . La variété algébrique R , munie de la projection $R \rightarrow X$ et de l'action de $GL(r)$, s'appelle le fibré des repères de E . Considérons le fibré vectoriel image réciproque $F = R \times_X E$; ce fibré est muni d'une trivialisatation canonique

$$R \times k^r \xrightarrow{\sim} F.$$

Ceci permet de voir l'espace total du fibré vectoriel E comme quotient de $R \times k^r$ par l'action du groupe $GL(r)$ définie pour $g \in GL(r, k)$, $\varphi \in R$ et $v \in k^r$ par

$$(g, (\varphi, v)) \mapsto (\varphi g^{-1}, gv).$$

Exemple.

Le fibré des repères du fibré de Hopf H sur l'espace projectif \mathbb{P}_n s'identifie à la projection canonique

$$\mathbb{A}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}_n,$$

l'action de k^* sur $\mathbb{A}^{n+1} - \{0\}$ étant donnée par $(\lambda, z) \mapsto \lambda z$ pour $\lambda \in k^*$ et $z \in \mathbb{A}^{n+1} - \{0\}$. Ainsi H peut être vu comme le quotient de $\mathbb{A}^{n+1} - \{0\} \times k$ par la relation d'équivalence qui identifie (x, v) avec $(\lambda^{-1}x, \lambda v)$ pour $x \in \mathbb{A}^{n+1} - \{0\}$, $v \in k$, et λ scalaire non nul. Plus généralement, si $L \longrightarrow X$ est un fibré vectoriel de rang 1 sur une variété algébrique X , le fibré des repères de L est isomorphe au complémentaire de la section nulle dans l'espace total L .

Considérons maintenant une représentation $\rho : GL(r) \mapsto GL(m)$: ceci signifie que ρ est un morphisme de variétés algébriques et que ρ est compatible avec les structures de groupes. On peut alors introduire le quotient $E_\rho = R \times_\rho k^m$ de $R \times k^m$ par l'action à gauche de $GL(r)$ définie par $(g, (\varphi, t)) \mapsto (\varphi g^{-1}, \rho(g)(t))$ pour $\varphi \in R, t \in k^m$ et $g \in GL(r)$. On obtient ainsi un fibré vectoriel de rang m au-dessus de X qu'on appelle fibré associé à la représentation ρ . En effet, si $\tau_i : E|_{U_i} \simeq U_i \times k^r$ est une trivialisatation de E au-dessus de l'ouvert U_i , on en déduit un isomorphisme de variétés algébriques $R|_{U_i} \simeq U_i \times GL(r)$ et une bijection, linéaire sur les fibres $\varphi_i : E_\rho|_{U_i} \simeq U_i \times k^m$. Au-dessus de l'intersection $U_{i,j}$, si on introduit le morphisme de transition $g_{i,j}$ associé au morphisme $\tau_i \tau_j^{-1}$, on en déduit que

$$\varphi_i \varphi_j^{-1}(x, v) = (x, \rho(g_{i,j}(x))v)$$

L'application $x \mapsto \gamma(g_{j,i}(x))$ est régulière. On obtient ainsi une structure de fibré vectoriel sur $E_\rho \longrightarrow X$ définie par le cocycle $\rho(g_{i,j})$. La projection $R \times k^m \longrightarrow E_\rho$ est évidemment régulière.

Exemples

Soit E un fibré vectoriel de rang r .

1. Le fibré associé à la représentation $g \mapsto g^{-1}$ n'est autre que le fibré dual E^* .

2. Le fibré puissance extérieure $\wedge^i E$ est le fibré associé à la représentation $g \mapsto \wedge^i g \in GL(\wedge^i k^r)$. Si X est une variété algébrique lisse de dimension n , de fibré tangent $T \longrightarrow X$ les sections régulières du fibré $\wedge^i T^* \longrightarrow X$ s'appellent les formes différentielles de degré i de la variété algébrique X . Il jouera un rôle important dans les questions de dualité.

3. Le fibré puissance symétrique $S^i E$ est le fibré associé à la représentation $g \mapsto S^i g \in GL(S^i k^r)$.

PROPOSITION 1.7. — Soient $E \longrightarrow X$ un fibré vectoriel algébrique de rang r sur une variété algébrique X , $\rho : \mathrm{GL}(r) \longrightarrow \mathrm{GL}(m)$ une représentation, et E_ρ le fibré vectoriel associé. Soit $R \longrightarrow X$ le fibré des repères de E . Le $\mathcal{O}(X)$ -module des sections de E_ρ est canoniquement isomorphe au module des morphismes $f : R \longrightarrow k^m$ équivariants pour l'action de $\mathrm{GL}(r)$, c'est-à-dire tels que

$$g^*(f) = \rho(g^{-1})(f)$$

pour tout $g \in \mathrm{GL}(r)$.

Démonstration. Le fibré image réciproque de E_ρ par la projection $R \longrightarrow X$ est le fibré trivial de fibre k^m . Une section s de E_ρ fournit alors une section de ce fibré trivial ce qui permet d'obtenir un morphisme $f : R \longrightarrow k^m$ équivariant pour l'action de G ; ensemblistement, cela signifie que l'on a $f(\varphi g^{-1}) = \rho(g)f(\varphi)$ pour tout $\varphi \in R$, et tout $g \in \mathrm{GL}(r)$.

Réciproquement, étant donné un tel morphisme f , on considère pour $x \in X$ un élément $\varphi \in R_x$; la classe $s(x) = [\varphi, f(\varphi)]$ de $(\varphi, f(\varphi))$ dans E_ρ est alors indépendante de φ . Ainsi $x \mapsto s(x)$ est, ensemblistement, une section de E_ρ . Pour voir que cette section s est régulière, il suffit de remarquer qu'une trivialisatation $E|_U \simeq U \times k^r$ sur un ouvert U définit une section $\tau : U \longrightarrow R$ du fibré des repères R sur l'ouvert U . Soit $\pi : R \times k^m \longrightarrow E_\rho$ le morphisme de projection. La formule

$$s|_U = \pi(\tau, f \circ \tau)$$

montre que s ne dépend pas de la trivialisatation choisie. \square

Exemple

Soit ℓ un entier. Si $\ell \geq 0$, sur l'espace projectif $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ de dimension $n \geq 1$ la puissance symétrique du dual du fibré de Hopf $\mathcal{O}(\ell) = S^\ell(H^*)$ est le fibré vectoriel associée à la représentation $k^* \longrightarrow k^*$ définie $\lambda \mapsto \lambda^{-\ell}$. Si $\ell < 0$ le fibré $\mathcal{O}(\ell)$ est défini par $S^{-\ell}H$, et donc cet énoncé est encore vrai.

COROLLAIRE 1.8. — Soit V un k -espace vectoriel de dimension ≥ 2 . L'espace vectoriel des sections régulières du fibré $\mathcal{O}(\ell)$ sur l'espace projectif $\mathbb{P}(V)$ est nul si $\ell < 0$, et isomorphe à l'espace vectoriel $S^\ell V^*$ des polynômes homogènes de degré ℓ sur V si $\ell \geq 0$.

Démonstration. Il en résulte de la proposition que l'espace vectoriel des sections de $\mathcal{O}(k)$ s'identifie à l'espace vectoriel des applications régulières $f : V - \{0\} \longrightarrow k$ telles que $f(\lambda x) = \lambda^\ell f(x)$ pour $x \in V - \{0\}$ et $\lambda \in k^*$. Une telle fonction régulière est évidemment nulle si $\ell < 0$, et un polynôme homogène de degré ℓ sur V si $k \geq 0$. Si on convient que $S^\ell V^*$ est nul si $\ell < 0$, on obtient donc un isomorphisme d'espaces vectoriels $\Gamma(\mathbb{P}(V), \mathcal{O}(\ell)) = S^\ell V^*$. Ceci achève la démonstration. \square

Exercice 1.8

Sur l'ouvert défini par les points $[x_0, \dots, x_n]$ tels que $x_i \neq 0$, le fibré de Hopf H a une section e_i définie par $e_i[x] = ([x], \frac{x}{x_i})$. Soit ϵ_i la section de $\mathcal{O}(\ell)$ associée.

a) Vérifier que les fonctions de transition de $\mathcal{O}(\ell)$ dans le recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (U_i)_{i=0, \dots, n}$ les fonctions de transition associées du fibré $\mathcal{O}(\ell)$ sont données par

$$g_{j,i}([x]) = \frac{x_i^\ell}{x_j^\ell}$$

b) Soit P un polynôme homogène de degré ℓ . Montrer que la section s_i de $\mathcal{O}(\ell)$ sur l'ouvert U_i définie par

$$s_i = \frac{P}{x_i^\ell} \epsilon_i$$

est la restriction d'une section s de $\mathcal{O}(\ell)$. Retrouver l'énoncé ci-dessus.

Exercice 1.9

Soient $E \longrightarrow X$ et $F \longrightarrow Y$ deux fibrés vectoriels sur des variétés algébriques X et Y respectivement. On désigne par $E \boxtimes F$ le fibré vectoriel sur $X \times Y$ défini par

$$E \boxtimes F = \text{pr}_1^*(E) \otimes \text{pr}_2^*(F)$$

où $\text{pr}_1 : X \times Y \longrightarrow X$ et $\text{pr}_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ sont les deux projections canoniques. Démontrer que l'on a un isomorphisme canonique

$$\Gamma(X, E) \otimes_k \Gamma(Y, F) \simeq \Gamma(X \times Y, E \boxtimes F)$$

1.7. Sections transverses à la section nulle

Soit X une variété algébrique lisse, et $E \longrightarrow X$ un fibré vectoriel de rang r sur X . On considère une section régulière $f : X \longrightarrow E$. Alors l'ensemble des points où f s'annule est un fermé de Zariski de X . Plus précisément, on va associer à f une sous-variété fermée de X , dont le fermé sous-jacent est le fermé des zéros de f .

Soit $x \in X$. On choisit une trivialisation de E sur un voisinage ouvert U de x : on dispose alors de sections $(e_i)_{i=1,\dots,r}$ de $E|_U$ définissant dans chaque fibre une base, (ce qu'on appelle un repère local sur l'ouvert U) et la section f s'écrit

$$f|_U = \sum_i f_i e_i$$

où les f_i sont des fonctions régulières sur l'ouvert U . L'idéal de $\mathcal{O}(U)$ engendré par (f_1, \dots, f_r) ne dépend pas du choix du repère local, et cet idéal définit une sous-variété fermée $V(f)$ de X , appelée sous-variété des zéros de f . Cette sous-variété n'est pas en général lisse, ni même réduite. On se propose de donner des conditions permettant d'affirmer que ce fermé algébrique est encore une variété lisse.

DÉFINITION 1.9. — *La différentielle de f en un point $x \in V(f)$ est l'application linéaire $d_x f : T_x \longrightarrow E_x$ définie par*

$$d_x f = \sum_i d_x f_i e_i(x)$$

Pour voir que cette définition a un sens, il faut constater que le second membre ne dépend pas du choix de la trivialisation. Si ϵ_j est un autre repère local sur U , on écrit

$$e_i = \sum_j g_i^j \epsilon_j$$

de sorte que $f = \sum_j \varphi_j \epsilon_j$, avec $\varphi_j = \sum_i g_i^j f_i$. Puisque f s'annule au point x , on a $d_x \varphi_j = \sum_i g_i^j(x) d_x f_i$, d'où il résulte

$$\sum_i (d_x f_i) e_i(x) = \sum_j (d_x \varphi_j) \epsilon_j(x).$$

ce qui prouve que la formule ne dépend pas du repère choisi. A noter qu'en un point où f ne s'annule pas, ce n'est plus vrai.

DÉFINITION 1.10. — *On dit que la section f est transverse à la section nulle si en tout point x de $V(f)$ la différentielle $d_x f : T_x \longrightarrow E_x$ est surjective.*

PROPOSITION 1.11. — *Soit $E \longrightarrow X$ un fibré vectoriel de rang r au-dessus d'une variété lisse dont toutes les composantes connexes sont de dimension n . Soit f une section de E . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *la section f est transverse à la section nulle ;*
- (ii) *la sous-variété algébrique $Y = V(f)$ est lisse de dimension $n - r$.*

Démonstration. Au voisinage d'un point $x \in V(f)$, un repère local étant choisi pour E , le fermé $V(f)$ est aussi $V(f_1, \dots, f_r)$ où f_1, \dots, f_r sont les composantes de f dans ce repère. Supposons que la section f soit transverse à la section nulle. Alors les différentielles $d_x f_i$ sont indépendantes. On sait bien alors que $V(f)$ est lisse au point x , de dimension $n-r$ d'après la section 8 du chapitre 1. Réciproquement, si $Y = V(f)$ est lisse de dimension $n-r$, l'espace tangent de Zariski $T_x Y$ est de dimension $n-r$. D'après la description de l'espace tangent de Zariski, cela implique que le rang de $d_x f$ en un point $x \in Y$ est r , ce qui signifie que f est transverse à la section nulle. \square

On notera que le fermé des zéros de f (c'est-à-dire la sous-variété réduite sous-jacente à $V(f)$) peut fort bien être lisse de dimension $n-r$ sans que f soit transverse à la section nulle. Si f est transverse à la section nulle, le fibré tangent TY est le noyau du morphisme surjectif

$$df : TX|_Y \longrightarrow E|_Y.$$

Le quotient de $TX|_Y$ par le fibré tangent TY s'appelle le fibré normal de Y dans X , et est noté $N_{Y/X}$. Ainsi, le fibré normal de Y dans X est isomorphe au fibré $E|_Y$.

DÉFINITION 1.12. — *Etant donnée une variété algébrique lisse X , le fibré canonique de X est défini par*

$$K_X = \det T^*X.$$

Ce fibré vectoriel de rang un sur X joue un grand rôle dans les questions de dualité en cohomologie.

COROLLAIRE 1.13. — *(Formule d'adjonction) Soit $E \longrightarrow X$ un fibré vectoriel de rang r au-dessus d'une variété lisse (équidimensionnelle) de dimension n , et Y une sous-variété obtenue comme sous-variété des zéros d'une section de E transverse à la section nulle. Alors*

$$K_Y = K_X \otimes \det(E)|_Y$$

Exercice 1.10

1. Soit $\mathbb{P}(V)$ l'espace projectif de dimension n associé à un espace vectoriel V . Démontrer que

$$K_{\mathbb{P}(V)} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-(n+1))$$

2. Soit f un polynôme homogène de degré d sur l'espace vectoriel V , et s la section du fibré $\mathcal{O}(d)$ sur l'espace projectif $\mathbb{P}(V)$ associée à f . Montrer que la section s est transverse à la section nulle si et seulement si la différentielle $d_x f$ est non nulle en tout point $x \in V - \{0\}$.

3. Montrer que le fibré canonique K_Y d'une hypersurface lisse Y de degré d de $\mathbb{P}(V)$ est isomorphe à $\mathcal{O}_Y(d-n-1)$.

Exercice 1.11

Soit V un espace vectoriel de dimension $n + 1$, et $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ l'espace projectif associé.

1. Montrer que l'espace vectoriel $\Gamma(\mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_n, \mathcal{O}(1) \boxtimes \mathcal{Q})$ est canoniquement isomorphe à l'espace vectoriel des endomorphismes de V .

2. Montrer que la section de $\mathcal{O}(1) \boxtimes \mathcal{Q}$ associée à id_V est transverse à la section nulle et que son lieu des zéros est la diagonale Δ de $\mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_n$.

Existence de sections transverses à la section nulle.

DÉFINITION 1.14. — *Un fibré vectoriel algébrique $E \longrightarrow X$ sur une variété algébrique X est dit engendré par ses sections si pour tout $x \in X$ et tout vecteur $e \in E_x$, il existe une section $f \in \Gamma(X, E)$ telle que $f(x) = e$.*

Exemple.

Sur le plan projectif \mathbb{P}_n le fibré $\mathcal{O}(i)$ est engendré par ses sections si et seulement si $i \geq 0$.

PROPOSITION 1.15. — *On suppose que le corps de base k est de caractéristique 0. Soit $E \longrightarrow X$ un fibré vectoriel algébrique de rang r au-dessus d'une variété algébrique lisse X ; on suppose que E est engendré par ses sections. Alors E a une section transverse f à la section nulle.*

Démonstration. On suppose que toutes les composantes de X sont de dimension n . Soit r le rang de E . Puisque X est quasi-compact, il est clair que l'on peut trouver un espace vectoriel de dimension finie $W \subset \Gamma(X, E)$ qui engendre E . Le morphisme canonique $(x, s) \mapsto s(x)$

$$X \times W \longrightarrow E$$

est un morphisme surjectif de fibrés vectoriels; si $w = \dim W$, l'image réciproque de la section nulle est alors un sous-fibré vectoriel, dont l'espace total Z est une variété lisse de dimension $n + w - r$. Considérons la projection $p : Z \longrightarrow W$ induite par la projection pr_2 . D'après le théorème de Bertini, il existe un ouvert non vide $V \subset W$ tel que pour tout $s \in V$, la différentielle $d_x p$ soit surjective en tout point x de la fibre au-dessus de s . Donc la fibre est au-dessus d'un tel point est lisse de dimension $n - r$. Mais cette fibre est exactement la variété des zéros de s ; d'après la proposition 1.11, la section s est donc transverse à la section nulle. \square

Exercice 1.12

On considère la variété Z introduite dans la démonstration ci-dessus.

1. Montrer que l'espace tangent $T_{(x,s)}Z$ au point (x, s) est le sous-espace vectoriel de $T_x X \oplus W$ des couples (t, u) satisfaisant à l'équation

$$d_x s \cdot t + u(x) = 0$$

et la différentielle $d_x p$ est induite par la projection $(t, u) \mapsto u$. (On pourra trivialisier E au voisinage de x).

2. Retrouver à partir de là le fait que si $s \in V$ la différentielle $d_x s$ est surjective en un point x où s s'annule.

L'énoncé suivant est vrai même si le corps est de caractéristique > 0 .

PROPOSITION 1.16. — *Soit E est un fibré vectoriel algébrique de rang r sur une variété algébrique X de dimension n . On suppose que E est engendré par ses sections. Alors, si $r > \dim X$, le fibré vectoriel E a une section partout non nulle.*

Démonstration. Si X est lisse, et le corps de caractéristique 0, la proposition est bien sûr un cas particulier de la précédente. La démonstration qui suit est valable même si X n'est pas lisse. Soit $n = \dim X$. On introduit comme ci-dessus le fibré vectoriel Z dont l'espace total est une variété de dimension $n+w-r$. Puisque $n < r$, le morphisme $Z \rightarrow W$ ne peut pas être dominant : ainsi donc il existe une section $s \in W$ qui n'appartient pas à l'image de Z . Une telle section ne s'annule pas. \square

Exercice 1.13

Démontrer que l'intersection de deux surfaces générales de \mathbb{P}_3 est une courbe lisse.

Réciproquement, on peut se demander si étant donnée une variété algébrique lisse X de dimension n et une sous-variété lisse $Y \subset X$ de codimension r il existe un fibré vectoriel algébrique E sur X et une section f de E transverse à la section nulle dont le lieu des zéros soit Y . La réponse est négative pour $r \geq 2$, car en général le fibré normal $N_{Y/X}$ ne peut pas se prolonger à X (cf. section 3.3). Par contre, on verra dans la section 3.1 que c'est vrai pour $r = 1$.

2. Faisceaux localement libres

2.1. Faisceaux algébriques

Soit X une variété algébrique, \mathcal{O}_X son faisceau des structural. Un faisceau algébrique \mathcal{F} sur X est un faisceau de \mathcal{O}_X -modules. Si \mathcal{F} et \mathcal{G} sont deux faisceaux algébriques sur X , un morphisme de faisceaux algébriques $f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ est un morphisme de faisceaux abéliens qui soit \mathcal{O}_X -linéaire.

Les faisceaux algébriques sur X forment une catégorie abélienne. Si \mathcal{F} est un faisceau algébrique, l'ensemble \mathcal{F}_x des germes de section de \mathcal{F} au point x est muni d'une structure de $\mathcal{O}_{X,x}$ -module.

Exemples

1. Le faisceau $\mathcal{O}^P = \mathcal{O} \oplus \dots \oplus \mathcal{O}$ est le faisceau des faisceaux régulières sur X à valeurs dans k^P .
2. Plus généralement, si E est un fibré vectoriel de rang r sur X , le faisceau des sections, noté $\mathcal{O}(E)$ est un faisceau algébrique.
3. Les sous-faisceaux algébriques de \mathcal{O}_X s'appellent des idéaux.

Opérations sur les faisceaux algébriques

Produit tensoriel

Soient \mathcal{F} et \mathcal{G} deux faisceaux algébriques sur une variété algébrique X . Le produit tensoriel $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{G}$ est le faisceau associé au préfaisceau $U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}(U)} \mathcal{G}(U)$.

Exercice 2.1

Montrer que le module des germes de sections de $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{G}$ au point x est donné par

$$\mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{G}_x$$

Faisceau des homomorphismes

Soient \mathcal{F} et \mathcal{G} deux faisceaux algébriques sur une variété algébrique X . Le préfaisceau $U \mapsto \mathbf{Hom}_{\mathcal{O}|_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$ est un faisceau algébrique, noté $\mathbf{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ et qu'on appelle faisceau des homomorphismes de \mathcal{F} dans \mathcal{G} .

Exercice 2.2

Soit $\mathbf{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})_x$ le module des germes de sections au point x .

1. Construire un homomorphisme canonique

$$\mathbf{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})_x \longrightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x).$$

2. On se propose de démontrer qu'en général, cet homomorphisme n'est pas en général un isomorphisme. On choisit pour \mathcal{F} le faisceau algébrique somme directe $\mathcal{O}^{(\mathbb{N})}$.

- a) Vérifier que $\underline{\text{Hom}}(\mathcal{O}^{(\mathbb{N})}, \mathcal{G})$ est isomorphe à $\mathcal{G}^{\mathbb{N}}$.
- b) Montrer qu'en général l'homomorphisme

$$(\mathcal{G}^{\mathbb{N}})_x \longrightarrow (\mathcal{G}_x)^{\mathbb{N}}$$

n'est pas surjectif. (Prendre par exemple pour \mathcal{G} le faisceau \mathcal{O}_k des fonctions régulières sur les ouverts de k . La suite de germes en 0 des fonctions rationnelles

$$z \mapsto \frac{1}{z - \frac{1}{n}}$$

ne provient pas de $(\mathcal{G}^{\mathbb{N}})_0$.)

- c) Vérifier qu'en général, l'homomorphisme

$$(\mathcal{G}^{\mathbb{N}})_x \longrightarrow (\mathcal{G}_x)^{\mathbb{N}}$$

n'est pas injectif. (On pourra prendre pour \mathcal{G} la somme directe d'une suite de faisceaux algébriques sur k dont le support est le point $\frac{1}{n}$.)

2.2. Fibrés vectoriels et faisceaux localement libres

DÉFINITION 2.1. — *Soit X une variété algébrique. Un faisceau algébrique \mathcal{F} est dit localement libre (de rang fini) si pour tout point $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U de X , un entier r et un isomorphisme tel que*

$$\mathcal{F}|_U \simeq \mathcal{O}^r|_U.$$

Le rang r reste constant sur chaque composante connexe. Le faisceau des sections d'un fibré vectoriel de rang r sur une variété algébriques X réduite est évidemment localement libre de rang r , et à tout morphisme $F \longrightarrow F'$ de fibrés vectoriels est associé un morphisme de faisceaux algébriques $\mathcal{O}(F) \longrightarrow \mathcal{O}(F')$. On obtient ainsi un foncteur de la catégorie des fibrés vectoriels dans celle des faisceaux localement libres ; ce foncteur est additif : ceci signifie l'application $\text{Hom}(F, F') \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}(F), \mathcal{O}(F'))$ est linéaire. Ceci implique que ce foncteur est compatible aux sommes directes finies. Il est remarquable que les faisceaux associés aux fibrés vectoriels sont les seuls faisceaux localement libres :

THÉORÈME 2.2. — *Soit X une variété algébrique réduite et connexe. Le foncteur $F \mapsto \mathcal{O}(F)$ qui associe à tout fibré vectoriel F le faisceau des sections $\mathcal{O}(F)$ est une équivalence de catégories entre la catégorie des fibrés vectoriels et celle des faisceaux localement libres sur X .*

Cet énoncé signifie que les deux propriétés suivantes sont vraies :

(1) Ce foncteur est pleinement fidèle : étant donnés deux fibrés vectoriels F et F' , l'application $\mathcal{O}(X)$ –linéaire

$$\mathrm{Hom}(F, F') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}(F), \mathcal{O}(F')) \quad (*)$$

est un isomorphisme. Ceci entraîne en particulier que F est isomorphe à F' si et seulement si les faisceaux algébriques associés sont isomorphes.

(2) le foncteur $F \mapsto \mathcal{O}(F)$ est essentiellement surjectif. Autrement dit, pour tout faisceau localement libre \mathcal{F} , on peut construire un fibré vectoriel F et un isomorphisme $\mathcal{F} \simeq \mathcal{O}(F)$.

Démonstration de (1).

La question est locale. On peut donc supposer que F et F' sont triviaux ; des trivialisations $F \simeq k_X^p$ et $F' \simeq k_X^q$ induisent des isomorphismes $\mathcal{O}(F) \simeq \mathcal{O}^p$ et $\mathcal{O}(F') \simeq \mathcal{O}^q$. Un morphisme de fibrés vectoriels $F \longrightarrow F'$ est alors déterminé par une matrice $a = (a_{i,j})$ à coefficients dans $\mathcal{O}(X)$, et le morphisme de faisceaux localement libres associés $\mathcal{O}^p \longrightarrow \mathcal{O}^q$ est déterminé par la même matrice.

Démonstration de (2) :

Remarquons d'abord que si F est un fibré vectoriel, on a pour tout point $x \in X$ un isomorphisme canonique d'espaces vectoriels

$$\mathcal{O}_x(F) \otimes_{\mathcal{O}_x} k \simeq F_x$$

induit par le morphisme d'évaluation $\mathrm{ev}_x : \mathcal{O}_x(F) \longrightarrow F_x$ au point x . Ici, on considère k comme un \mathcal{O}_x –module via le morphisme d'évaluation $s \mapsto s(x)$. Cet énoncé est évident par trivialisations de F au voisinage de x .

Soit \mathcal{F} un faisceau localement libre de rang r . Soit \mathfrak{m}_x l'idéal maximal de \mathcal{O}_x . Considérons pour tout point x l'espace vectoriel de dimension r

$$\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}_x / \mathfrak{m}_x \mathcal{F}_x = \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_x} k.$$

On va mettre une structure de fibré vectoriel sur $E = \coprod_{x \in X} \mathcal{F}(x) \longrightarrow X$. Considérons un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (U_i)$ sur lequel on dispose de trivialisations $\varphi_i : \mathcal{F}|_{U_i} \simeq \mathcal{O}^r|_{U_i}$. Une telle trivialisations induit une bijection linéaire sur chaque fibre

$$\tau_i : E|_{U_i} \simeq U_i \times k^r.$$

Au-dessus de l'intersection $U_{i,j}$ l'isomorphisme $\tau_j \tau_i^{-1} : U_{i,j} \times k^r \longrightarrow U_{i,j} \times k^r$ correspond à l'isomorphisme de faisceaux algébriques sur $U_{i,j}$

$$\varphi_j \varphi_i^{-1} : \mathcal{O}^r|_{U_{i,j}} \longrightarrow \mathcal{O}^r|_{U_{i,j}}$$

et par conséquent au-dessus de $U_{i,j}$ l'isomorphisme $\tau_j \tau_i^{-1}$ un isomorphisme de fibrés vectoriels. Par suite, on obtient par recollement une structure de fibré vectoriel sur E . De plus, on dispose d'un morphisme de faisceaux algébriques $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{O}(E)$ qui associe à une section $s \in \mathcal{F}(U)$ sur l'ouvert U associe la section définie sur l'ouvert $U_i \cap U$ par $\tau_i^{-1} s_i$, où s_i est la section du fibré trivial $U_i \times k^r$ correspondant à $\varphi_i(s|_{U_i})$. Ce morphisme est un isomorphisme, car c'est vrai localement. \square

REMARQUE 2.3. —

1. Une suite exacte de fibrés vectoriels $F' \longrightarrow F \longrightarrow F''$ induit une suite exacte de faisceaux localement libres.

2. Dans l'autre sens, les choses marchent moins bien. Si $\mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}''$ est une suite exacte de faisceaux localement libres, il n'est pas vrai en général que la 0-suite d'espaces vectoriels $\mathcal{F}'(x) \longrightarrow \mathcal{F}(x) \longrightarrow \mathcal{F}''(x)$ est exacte.

Par exemple, si Y est une hypersurface d'une variété lisse X , donnée par la sous-variété des zéros d'une section s d'un fibré vectoriel L de rang 1. Le morphisme de faisceaux localement libres $\mathcal{O}_X(L^*) \longrightarrow \mathcal{O}_X$ est injectif. Pourtant le morphisme de fibrés vectoriels de rang 1

$$L^* \xrightarrow{s} \mathcal{O}$$

(où \mathcal{O} est le fibré trivial de rang 1) s'annule sur Y . Donc il n'est pas injectif .

Exercice 2.3

Démontrer que toute suite exacte de faisceaux localement libres

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$

induit une suite exacte sur les fibrés vectoriels associés.

Exercice 2.4

Soient E et F deux fibrés vectoriels sur une variété algébrique X réduite. Etablir un isomorphisme canonique

$$\mathcal{O}(E \otimes F) \simeq \mathcal{O}(E) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(F).$$

Exercice 2.5

Soit X une variété algébrique (non obligatoirement réduite). On considère la catégorie Var_X des variétés algébriques Y munies d'un morphisme $f : Y \longrightarrow X$. Soit \mathcal{F} un faisceau localement libre sur X .

1. Montrer que le foncteur

$$\text{Var}_X \longrightarrow \text{Ens}$$

qui associe à $Y \longrightarrow X$ l'ensemble des sections $\Gamma(f^*(\mathcal{F}))$ est représentable par une variété algébrique $\pi : F \longrightarrow X$, munie d'une section $\eta \in \Gamma(\pi^*(\mathcal{F}))$. Autrement dit, si $f : Y \longrightarrow X$ est un morphisme de variétés algébriques, pour toute section $s \in \Gamma(f^*(\mathcal{F}))$ il existe un unique morphisme $g : Y \longrightarrow F$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{g} & F \\ & \searrow f & \downarrow \pi \\ & & X \end{array}$$

et tel que $g^*(\eta) = s$.

En particulier si on pose $f^*(F) = Y \times_X F$ le faisceau $\mathcal{O}(f^*(F))$ des sections de $f^*(F)$ est canoniquement isomorphe à $f^*(\mathcal{F})$.

2. Vérifier que pour tout $x \in X$, la fibre $F_x = \pi^{-1}(x)$ est canoniquement isomorphe à $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}_x/\mathfrak{m}_x\mathcal{F}_x$.

3. Construire en utilisant la propriété universelle des morphismes de variétés algébriques $F \times_X F \longrightarrow F$ et $\mathbb{A}^1 \times F \longrightarrow F$ induisant dans chaque fibre F_x la structure d'espace vectoriel de $F_x = \mathcal{F}(x)$. Plus généralement, montrer que si $f : Y \longrightarrow X$ est un morphisme, ces opérations induisent une structure de $\mathcal{O}(Y)$ -module sur $\Gamma(f^*(F))$ et que l'isomorphisme $\Gamma(f^*(F)) \xrightarrow{\sim} \Gamma(f^*(\mathcal{F}))$ est $\mathcal{O}(Y)$ -linéaire.

Quand X est une variété réduite, une solution (F, η) du problème universel ci-dessus est obtenue en considérant le fibré vectoriel associé $E \longrightarrow X$, muni de la section canonique de $\pi^*(E)$ correspondant à l'identité de E .

3. Diviseurs et fibrés inversibles

Pour la loi donnée par le produit tensoriel, l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels algébriques de rang un sur une variété algébrique X réduite constitue un groupe abélien : l'élément neutre est la classe du fibré trivial de rang un, et l'inverse de la classe d'un fibré L est la classe du fibré dual. Pour cette raison, les fibrés vectoriels algébriques de rang un sont dits aussi fibrés inversibles ; le fibré dual d'un fibré inversible L est souvent noté L^{-1} . Ce groupe abélien est appelé groupe de Picard et noté $\text{Pic}(X)$. On se propose de décrire les relations entre les hypersurfaces de X et les fibrés inversibles sur X , quand X est une variété algébrique lisse.

3.1. Fibré inversible associé à un diviseur

DÉFINITION 3.1. — Soit A un anneau noethérien non nul, et \mathfrak{p} un idéal premier de A . La hauteur de \mathfrak{p} est définie par $\text{ht } \mathfrak{p} = \dim A_{\mathfrak{p}}$.

Si A est de dimension de Krull finie, on a évidemment

$$\dim A/\mathfrak{p} + \text{ht } \mathfrak{p} \leq \dim A.$$

Quand A est l'algèbre des fonctions régulières d'une variété algébrique affine intègre X , on peut démontrer qu'on a l'égalité. La hauteur est aussi appelée dans ce cas la codimension de la sous-variété irréductible Y définie par l'idéal \mathfrak{p} , et notée $\text{codim}_X Y$; on a donc dans ce cas

$$\dim Y + \text{codim}_X Y = \dim X$$

LEMME 3.2. — Soit A un anneau factoriel, et \mathfrak{p} un idéal premier de A de hauteur 1. Alors \mathfrak{p} est engendré par un élément non nul.

Démonstration. Soit $f \in A$ un élément irréductible appartenant à \mathfrak{p} . Puisque l'anneau A est factoriel, l'idéal engendré par f est un idéal premier, et on a $0 \neq (f) \subsetneq \mathfrak{p}$. Alors d'après l'hypothèse $\mathfrak{p} = (f)$. \square

Considérons plus généralement une variété algébrique X quelconque. Un fermé irréductible $Y \subset X$ est de codimension r dans X si la longueur maximale des chaînes de fermés irréductibles

$$Y = Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq \dots \subsetneq Y_\ell$$

est r . Si Y est un fermé quelconque, la codimension est le minimum des codimens des composantes irréductibles. On la note $\text{codim}_X Y$. Si X est intègre, on a la relation

$$\dim Y + \text{codim}_X Y = \dim X.$$

Une hypersurface est une sous-variété fermée intègre $Y \subset X$ de codimension 1 : ceci signifie donc que si Z est un fermé irréductible contenant strictement Y , Z est une composante irréductible de X . Lorsque X est affine, ceci signifie que l'idéal de Y est de hauteur 1 dans $\mathcal{O}(X)$. On désigne par $\mathcal{H}(X)$ l'ensemble des hypersurfaces intègres de X .

DÉFINITION 3.3. — *Soit X une variété algébrique. Un diviseur de Weil de X est une combinaison linéaire*

$$D = \sum_{Y \in \mathcal{H}(X)} n_Y Y$$

où les coefficients n_Y sont des entiers presque tous nuls. Si les entiers n_Y sont ≥ 0 , on dit que le diviseur est effectif. L'hypersurface réduite $|D| = \cup_{Y, n_Y \neq 0} Y$ est appelée le support du diviseur D .

Un diviseur est donc un élément du groupe libre engendré par $\mathcal{H}(X)$. On désigne par $\text{Div}(X)$ le groupe des diviseurs de Weil. On se propose de décrire les diviseurs en termes de fibrés inversibles.

THÉORÈME 3.4. — *On suppose que X est lisse. Soit Y une hypersurface intègre de X . Il existe un fibré vectoriel algébrique L de rang 1, et une section s de L tels que la sous-variété des zéros de s soit Y . Le couple (L, s) est déterminé de manière unique à isomorphisme près par cette condition.*

Dire que la sous-variété des zéros de s est Y signifie que l'idéal \mathcal{J}_Y de Y est l'image du morphisme de faisceaux de \mathcal{O}_X -modules

$$\mathcal{O}_X(L^*) \longrightarrow \mathcal{O}_X$$

défini par la multiplication par la section s . Ceci implique en particulier que le fermé des zéros de la section s est Y , mais c'est une propriété plus forte, qu'il est obligatoire d'écrire si on veut avoir l'unicité. La démonstration de ce théorème repose sur le fait qu'un faisceau localement libre de rang un est le faisceau des sections d'un fibré inversible, comme on l'a vu dans la section précédente. On aura besoin du résultat suivant, que nous utiliserons sans démonstration (cf. Shafarevich, chapitre 2, §3) : si x est un point lisse de X l'algèbre locale $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau factoriel.

LEMME 3.5. — *Soit X une variété lisse, et $Y \subset X$ une hypersurface intègre. Il existe un recouvrement ouvert affine $\mathcal{U} = (U_\alpha)$ par des ouverts affines U_α tels que l'idéal $I(Y \cap U_\alpha)$ de $\mathcal{O}(U_\alpha)$ soit engendré par un élément f_α .*

Démonstration. La question est locale ; on peut donc supposer que X est affine, et que l'hypersurface Y est définie par un idéal premier \mathfrak{p} de $\mathcal{O}(X)$. L'énoncé est évident au voisinage d'un point $x \notin Y$. Soit $x \in Y$. L'idéal premier de $\mathcal{O}_{X,x}$ engendré par \mathfrak{p} est de hauteur 1. Puisque l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est factoriel, cet idéal est engendré par une fonction rationnelle $\frac{f}{g}$, où f et $g \in \mathcal{O}(X)$ et $g(x) \neq 0$. On a évidemment $f \in \mathfrak{p}$. Réciproquement, soit g_1, \dots, g_m des générateurs de \mathfrak{p} . Alors le germe $g_{i,x}$ est multiple de f_x . Alors il existe $Q \in \mathcal{O}(X)$, non nul en x et $h_i \in \mathcal{O}(X)$ tels que $Qg_i = fh_i$. Dans l'ouvert affine U des points de X tels que $Q \neq 0$ on a $(g_1, \dots, g_m) = (f)$ dans $\mathcal{O}(U)$. Ceci implique l'énoncé. \square

Démonstration du théorème 3.4

L'énoncé implique que le faisceau d'idéaux \mathcal{J}_Y est localement libre de rang un. C'est donc le faisceau des sections d'un fibré vectoriel inversible ; on désigne par L^* le dual de ce fibré inversible. L'inclusion $\mathcal{O}_X(L^*) \hookrightarrow \mathcal{O}_X$ définit d'après la section précédente un morphisme de fibrés vectoriels $L^* \longrightarrow k_X$ ou, ce qui revient au même une section s de L . Evidemment, la sous-variété des zéros de s est l'hypersurface Y .

Unicité.

Si (L', s') est un autre tel couple, la section précédente fournit un isomorphisme de fibrés vectoriels $g : L^* \longrightarrow L'^*$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{O}(L^*) & & \\
 \downarrow & \searrow & \\
 & & \mathcal{J}_Y \\
 & \nearrow & \\
 \mathcal{O}(L'^*) & &
 \end{array}$$

soit commutatif. Le morphisme $h = {}^t g^{-1} : L \longrightarrow L'$ un isomorphisme de fibrés inversibles tel que $h(s) = s'$. D'où l'unicité, à isomorphisme près. \square

REMARQUE 3.6. — L'énoncé 3.4 est vrai plus généralement si pour tout $x \in X$ l'algèbre locale $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau factoriel. Une telle variété algébrique est dite localement factorielle.

Exercice 3.1

Soient Y une hypersurface d'une variété lisse X et $\mathcal{U} = (U_\alpha)$ un recouvrement ouvert affine de X tel que dans $\mathcal{O}(U_\alpha)$ on ait $I(Y \cap U_\alpha) = f_\alpha \mathcal{O}(U_\alpha)$.

- 1) Montrer que $g_{\alpha,\beta} = \frac{f_\alpha}{f_\beta}$ est un cocycle du recouvrement ouvert \mathcal{U} à valeurs dans k^* .
- 2) Montrer que le fibré associé à ce cocycle possède une section canonique dont la variété des zéros coïncide avec Y .
- 3) On considère un hyperplan $Y \subset \mathbb{P}^n$. Montrer Y est la sous-variété des zéros d'une section non nulle du fibré inversible $\mathcal{O}(1)$.

Exercice 3.2

Soient X une variété algébrique lisse, et $Y \subset X$ une hypersurface lisse. Démontrer que la section s_Y du fibré inversible associé L_Y est transverse à la section nulle.

3.2. Le groupe de Picard

Soit X une variété algébrique intègre. Considérons l'ensemble $\text{Ca}(X)$ des classes d'isomorphisme $[L, s]$ des couples (L, s) formés d'un fibré inversible et d'une section rationnelle non nulle de L . Une telle classe d'isomorphisme est appelé un diviseur de Cartier de X . On munit l'ensemble des diviseurs de Cartier d'une multiplication en posant $[L, s].[L', s'] = [L \otimes L', s \otimes s']$. La classe d'isomorphisme du fibré trivial $L = k_X$, muni de la section $x \mapsto (x, 1)$ est élément neutre de cette multiplication. Tout élément est inversible : l'inverse de $[L, s]$ est $[L^{-1}, s^{-1}]$ où s^{-1} est l'unique section rationnelle du dual de L telle que $s^{-1} \otimes s = 1$. On obtient ainsi un groupe abélien noté $\text{Ca}(X)$ et appelé groupe des diviseurs de Cartier de X .

THÉORÈME 3.7. — *Soit X une variété intègre dont le lieu singulier est de codimension ≥ 2 . On a un homomorphisme injectif de groupes abéliens*

$$\text{Ca}(X) \longrightarrow \text{Div}(X)$$

Si X est une variété lisse, cet homomorphisme est un isomorphisme. \square

Valuations discrètes

Soit A un anneau local noethérien, régulier de dimension 1. Ceci signifie que l'idéal maximal \mathfrak{m} de A est engendré par un élément. Un tel anneau est intègre. D'après le lemme 8.7 du chapitre 1, on a

$$\bigcap_{i \geq 0} \mathfrak{m}^i = \{0\}.$$

A chaque élément $f \in A$, non nul, on peut associer l'entier $\nu(f) = i$ défini par $f \in \mathfrak{m}^i$, $f \notin \mathfrak{m}^{i+1}$. Cet entier est appelé la multiplicité de f . On obtient ainsi une application $A - \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}$ qui satisfait aux propriétés suivantes

- (1) $\nu(fg) = \nu(f) + \nu(g)$
- (2) $\nu(f) = 0$ si et seulement si f est inversible.
- (3) si f, g sont des éléments non nuls de A tels que $f + g \neq 0$, on a

$$\nu(f + g) \geq \min(\nu(f), \nu(g)).$$

Soit K le corps des fractions de A . L'application ν se prolonge au groupe multiplicatif K^* en posant

$$\nu\left(\frac{f}{g}\right) = \nu(f) - \nu(g)$$

et le prolongement satisfait encore aux conditions (1), (2), (3) sur $K - \{0\}$. Cette application est appelée une valuation discrète sur le corps K . Les éléments non nuls de A se retrouvent à partir de cette valuation comme ensemble des éléments f de K^* tels que $\nu(f) \geq 0$.

L'algèbre locale $\mathcal{O}_{X,Y}$.

Soit X une variété algébrique et $Y \subset X$ une sous-variété intègre. On pose

$$\mathcal{O}_{X,Y} = \varinjlim_{U \cap Y \neq \emptyset} \mathcal{O}(U)$$

On obtient ainsi une algèbre locale dont l'idéal maximal est l'idéal des classes de sections $f \in \mathcal{O}(U)$ qui s'annulent sur $Y \cap U$.

Exemples

1. Si $Y = \{x\}$, l'algèbre locale obtenue est l'algèbre locale $\mathcal{O}_{X,x}$.
2. Si X est intègre, l'algèbre $\mathcal{O}_{X,X}$ est le corps des fonctions rationnelles sur X .
3. Si V est un ouvert de X qui rencontre Y , le morphisme de restriction

$$\mathcal{O}_{X,Y} \longrightarrow \mathcal{O}_{V,V \cap Y}$$

est un isomorphisme.

PROPOSITION 3.8. — *Soit $X = \text{Spec } A$ est une variété algébrique affine, et Y la sous-variété intègre définie par un idéal premier \mathfrak{p} de A . Le morphisme canonique*

$$A_{\mathfrak{p}} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,Y}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Considérons le morphisme canonique $A \longrightarrow \mathcal{O}_{X,Y}$. L'image du complémentaire de \mathfrak{p} est contenu dans le complémentaire de l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,Y}$. D'après la propriété universelle de l'algèbre localisée $A_{\mathfrak{p}}$ on obtient un homomorphisme

$$A_{\mathfrak{p}} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,Y}$$

Montrons l'injectivité. Soit $\alpha \in A$ dont l'image dans $\mathcal{O}_{X,Y}$ est nulle. Alors il existe un ouvert principal X_f rencontrant Y tel que $\alpha|_{X_f} = 0$. Donc il existe n tel que $f^n \alpha = 0$. Puisque X_f rencontre Y , on a $f \notin \mathfrak{p}$ et par conséquent $\alpha = 0$ dans $A_{\mathfrak{p}}$. Il en découle l'injectivité.

Surjectivité : on peut représenter une classe de $\mathcal{O}_{X,Y}$ par un élément de $\mathcal{O}(X_f)$, où X_f est un ouvert principal qui rencontre Y , ce qui est équivalent à $f \notin \mathfrak{p}$. Un tel élément est une fraction $\frac{u}{f^r}$, où $u \in A$ et donc provient de l'algèbre $A_{\mathfrak{p}}$. \square

LEMME 3.9. — *Soit X une variété algébrique dont l'ensemble singulier est de codimension ≥ 2 , et $Y \subset X$ une hypersurface intègre. Alors l'algèbre locale $\mathcal{O}_{X,Y}$ est un anneau local noethérien régulier de dimension 1.*

Démonstration. L'hypothèse implique que Y rencontre l'ouvert des points lisses de X . On peut donc supposer que X est une variété algébrique lisse, affine, d'algèbre de sections A et que l'idéal premier \mathfrak{p} de A qui définit Y est engendré par un élément non nul. Alors l'idéal maximal $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ est engendré par un élément non nul. Cette algèbre est un anneau local noethérien de dimension 1 ; elle est régulière par définition.

Considérons une variété algébrique X intègre et une sous-variété Y intègre de X . Soit $K(\mathcal{O}_{X,Y})$ le corps des fractions de $\mathcal{O}_{X,Y}$. On a un morphisme injectif $\mathcal{O}_{X,Y} \longrightarrow \text{Rat}(X)$ qui envoie le complémentaire de 0 dans le groupe multiplicatif, et par conséquent induit un homomorphisme de corps

$$K(\mathcal{O}_{X,Y}) \longrightarrow \text{Rat}(X)$$

LEMME 3.10. — *Cet homomorphisme est un isomorphisme.*

Démonstration. Soit U un ouvert rencontrant Y . Alors $\text{Rat}(X) \simeq \text{Rat}(U)$. Une fonction rationnelle de $\text{Rat}(U)$ provient évidemment de $K(\mathcal{O}_{X,Y})$. \square

Démonstration du théorème 3.7

Il résulte des deux lemmes précédents qu'une hypersurface intègre $Y \subset X$ définit une valuation

$$\nu_Y : \text{Rat}(X) - \{0\} \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

Si s est une section rationnelle non nulle d'un fibré inversible L sur X , et si U est un ouvert de X rencontrant Y sur lequel L est trivial, on peut écrire

$$s|_U = fe$$

où $f \in \text{Rat}(U)$ et e une section de $L|_U$ ne s'annulant pas sur U . On pose $n_Y = \nu_Y(f)$. Il est clair que l'entier ainsi défini ne dépend pas de U ni du choix de la section e . Ce nombre mesure la multiplicité selon laquelle la fonction f s'annule le long de Y si ce nombre est positif; si ce nombre est négatif, l'opposé de ce nombre est la multiplicité avec laquelle l'inverse de f s'annule le long de Y , c'est-à-dire l'ordre du pôle le long de Y .

LEMME 3.11. — *L'ensemble des hypersurfaces intègres $Y \subset X$ telles que $n_Y \neq 0$ est fini.*

Démonstration. Soit $U = \text{Spec } A$ un ouvert affine de X , sur lequel le fibré E est trivial. Les hyperfaces intègres contenues dans le complémentaire de U sont les composantes irréductibles, donc en nombre fini. Sur U , la section s s'écrit $s = fe$, où $f \in \mathcal{O}(U)$ et où e est une section de L partout non nulle sur U . Si Y est une hypersurface intègre qui rencontre U , on a $\nu_Y(f) \geq 0$, et la condition $\nu_Y(f) > 0$ signifie que f définit un élément de l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,Y}$ c'est-à-dire que s s'annule sur $Y \cap U$. L'hypersurface $Y \cap U$ de U est donc une composante irréductible de la sous-variété définie par l'idéal (f) . De telles hypersurfaces Y sont en nombre fini. \square

On associe alors à la classe dans $\text{Ca}(X)$ du couple (L, s) le diviseur de Weil

$$D = \sum_Y n_Y Y$$

Il résulte de la propriété de la valuation ν_Y que cette application est un homomorphisme de groupes

$$\phi : \text{Ca}(X) \longrightarrow \text{Div}(X).$$

Montrons qu'il est injectif. Considérons un diviseur de Cartier $[L, s]$ dont le diviseur de Weil associé est nul. Si U un ouvert sur lequel L est trivial, on écrit $s = fe$, avec $f \in \text{Rat}(U)$. Alors l'hypothèse implique que f est une fonction régulière inversible sur U . Mais alors la section s de L est régulière sur X et partout non nulle. Donc le diviseur de Cartier défini par (L, s) est l'élément neutre.

Supposons maintenant X lisse. D'après le théorème 3.4 on sait alors associer à une hypersurface intègre Y de X un diviseur de Cartier $[L_Y, s_Y]$. Cette application se prolonge par linéarité en un homomorphisme de groupes abéliens

$$\psi : \text{Div}(X) \longrightarrow \text{Ca}(X)$$

Montrons que $\phi\psi$ est l'identité de $\text{Div}(X)$. Soit Y une hypersurface intègre, $[L_Y, s_Y]$ le diviseur de Cartier associé. Soit U un ouvert affine de X qui rencontre Y et sur lequel l'idéal de $Y \cap U$ est engendré par (f) . Alors $L_Y|_U$ est trivial et s_Y est donné sur U par la fonction régulière f . Pour toute hypersurface intègre Z rencontrant U , on a $\nu_Z(f) = 0$ si $Z \neq Y$, parce que f est inversible sur l'ouvert $U \setminus Y$ qui rencontre aussi Z , et $\nu_Y(f) = 1$ puisque dans $\mathcal{O}_{X,Y}$ l'idéal (f) est l'idéal maximal. Donc le diviseur de Weil associé à $[L_Y, s_Y]$ est Y . Par suite $\phi\psi = \text{id}_{\text{Div}(X)}$. Ceci entraîne que l'homomorphisme ϕ est surjectif; comme on avait déjà vérifié qu'il était injectif, c'est un isomorphisme. \square

Soit s une section rationnelle non nulle d'un fibré inversible L , et $D = \sum_{Y \in \mathcal{O}(X)} n_Y Y$ le diviseur de Weil associé. On pose

$$D_+ = \sum_{Y, n_Y > 0} n_Y Y \quad ; \quad D_- = - \sum_{Y, n_Y < 0} n_Y Y$$

de sorte que $D = D_+ - D_-$.

DÉFINITION 3.12. — *Le diviseur D_+ est appelé le diviseur des zéros de s , le diviseur D_- le diviseur des pôles de s .*

PROPOSITION 3.13. — *Soit X une variété algébrique intègre dont l'ensemble singulier est de codimension ≥ 2 . Soit $\mathcal{O}(X)$ le groupe des fonctions régulières inversibles sur X . On a une suite exacte*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(X)^* \longrightarrow \text{Rat}(X)^* \longrightarrow \text{Ca}(X) \longrightarrow \text{Pic}(X) \longrightarrow 0$$

Démonstration. Soit $f \in \text{Rat}(X)^*$ une fonction rationnelle non nulle. Une telle fonction peut être considérée comme section rationnelle du fibré trivial de rang un \mathcal{O} , et l'homomorphisme $\text{Rat}(X)^* \longrightarrow \text{Ca}(X)$ associe à f le diviseur de Cartier $[\mathcal{O}, f]$. Du fait que l'homomorphisme $\text{Ca}(X) \longrightarrow \text{Div}(X)$ est injectif, on déduit que l'homomorphisme

$$\text{Rat}(X)^* \longrightarrow \text{Ca}(X)$$

ainsi défini a pour noyau le groupe $\mathcal{O}(X)^*$ des fonctions régulières inversibles. Le morphisme $\text{Ca}(X) \longrightarrow \text{Pic}(X)$ associe au diviseur de cartier $[L, s]$ la classe d'isomorphisme du fibré inversible L . Le noyau de cet homomorphisme est constitué des diviseurs de Cartier des fonctions rationnelles. Il reste à montrer que cet homomorphisme est surjectif. Si L est un fibré inversible sur X , par définition, il est localement trivial, donc il a des sections rationnelles. Il provient donc d'un diviseur de Cartier. \square

DÉFINITION 3.14. — *Soit X une variété algébrique intègre dont l'ensemble singulier est de codimension ≥ 2 . Un diviseur $D \in \text{Div}(X)$ est appelé principal si c'est le diviseur d'une fonction rationnelle non nulle. Deux diviseurs sont dits linéairement équivalents si leur différence est un diviseur principal.*

Soit $\text{Princ}(X)$ le groupe des diviseurs principaux de X .

COROLLAIRE 3.15. — *Soit X une variété algébrique lisse. L'isomorphisme*

$$\text{Ca}(X) \xrightarrow{\sim} \text{Div}(X)$$

induit un isomorphisme de groupes abéliens

$$\text{Div}(X)/\text{Princ}(X) \xrightarrow{\sim} \text{Pic}(X)$$

Cet isomorphisme permet de comparer le groupe de Picard d'une variété algébrique lisse X et celle d'un ouvert U .

PROPOSITION 3.16. — *Soit U un ouvert non vide d'une variété algébrique X lisse et irréductible. Soient Y_1, \dots, Y_r les composantes irréductibles de codimension 1 du complémentaire de U , et L_{Y_1}, \dots, L_{Y_r} les fibrés inversibles associés. L'homomorphisme de restriction*

$$\text{Pic}(X) \longrightarrow \text{Pic}(U)$$

est surjectif, et son noyau est le sous-groupe engendré par les L_{Y_i} .

Démonstration. On considère le diagramme commutatif induit par la restriction à l'ouvert U

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^r & \longrightarrow & \text{Div}(X) & \longrightarrow & \text{Div}(U) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \mathbb{Z}^r & \longrightarrow & \text{Pic}(X) & \longrightarrow & \text{Pic}(U) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dans lequel la première ligne est exacte : la flèche $\mathbb{Z}^r \longrightarrow \text{Div}(X)$ est définie par Y_1, \dots, Y_r . La première flèche verticale est l'identité. Les autres flèches verticales sont les homomorphismes surjectifs canoniques ; le noyau de ces flèches est le sous-groupe des diviseurs principaux de X et U respectivement. La flèche de restriction $\text{Princ}(X) \longrightarrow \text{Princ}(U)$ est évidemment un isomorphisme. Il résulte de ce diagramme que l'homomorphisme $\text{Pic}(X) \longrightarrow \text{Pic}(U)$ est surjectif. De plus, un élément de son noyau provient d'un diviseur $\sum_{i=1}^r n_i Y_i$ et par suite la seconde ligne est aussi exacte. \square

COROLLAIRE 3.17. — *On a $\text{Pic}(\mathbb{A}^n) = 0$.*

Démonstration. Il suffit de prouver que tout diviseur de $X = \mathbb{A}^n$ est un diviseur principal. Soit $Y \subset \mathbb{A}^n$ est une hypersurface intègre ; le lemme 3.2 appliqué à l'algèbre des polynômes, laquelle est factorielle, assure que l'idéal premier associé à Y est engendré par un élément f ; alors le diviseur de f est exactement Y . Ainsi, Y est un diviseur principal. \square

COROLLAIRE 3.18. — *Le groupe $\text{Pic}(\mathbb{P}_n)$ est isomorphe à \mathbb{Z} , avec pour générateur la classe de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(1)$.*

Démonstration. Considérons un hyperplan Y de \mathbb{P}_n . Cet hyperplan est associé à une section non nulle de $\mathcal{O}(1)$. L'ouvert complémentaire de Y est isomorphe au plan affine \mathbb{A}^n . Il résulte de la suite exacte ci-dessus que le groupe de Picard est engendré par $\mathcal{O}(1)$. Il reste à voir que cet élément n'est pas de torsion, autrement dit que $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(k)$ n'est pas trivial si $k \neq 0$. On peut supposer, quitte à passer au besoin au dual, que $k < 0$. Mais alors $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(k)$ n'a pas de section globale non nulle. Donc ce fibré inversible n'est pas trivial. \square

Exercice 3.3

On considère sur $\mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_m$ le fibré $\mathcal{O}(p, q) = \mathcal{O}(p) \boxtimes \mathcal{O}(q)$. Montrer que l'application $\mathbb{Z}^2 \longrightarrow \text{Pic}(\mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_m)$ définie par $(p, q) \mapsto \mathcal{O}(p, q)$ est un isomorphisme de groupes.

Exercice 3.4

1. Démontrer que tout fibré inversible sur un ouvert de \mathbb{A}^n est trivial.
2. On suppose que k est de caractéristique $\neq 2$. Démontrer que le groupe de Picard de la sphère $S_2 = \text{Spec}(\mathcal{O}(\mathbb{A}^2)/(x^2 + y^2 + z^2 - 1))$ est isomorphe à \mathbb{Z} .

3.3. Sous-variétés de codimension ≥ 2 .

On se propose de montrer qu'en général, une sous-variété lisse de codimension $r \geq 2$ ne peut s'obtenir comme sous-variété des zéros d'une section d'un fibré vectoriel de rang r . Considérons le plongement de Veronese

$$\varphi : \mathbb{P}_2 \hookrightarrow \mathbb{P}_5$$

Il peut être défini de la manière suivante : sur le plan projectif $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ on a une inclusion $H^{\otimes 2} \hookrightarrow S^2V_{\mathbb{P}_2}$ et par suite un morphisme $\varphi : \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{P}(S^2V)$ tel que $\varphi^*(H) = H^{\otimes 2}$.

Exercice 3.5

Soit $(e_i)_{i=0,1,2}$ une base de V , et $(e_i e_j)_{i \leq j}$ la base associée dans S^2V . Montrer que dans ces bases le morphisme φ est donné par

$$[x_0, x_1, x_2] \mapsto [x_0^2, x_1^2, x_2^2, 2x_0x_1, 2x_1x_2, 2x_0x_2]$$

Ainsi, l'image de \mathbb{P}_2 est une sous-variété isomorphe à \mathbb{P}_2 , c'est donc une surface lisse Y de \mathbb{P}_5 qu'on appelle la surface de Veronese. S'il existait un fibré vectoriel de rang 3 sur \mathbb{P}_5 et une section dont la sous-variété des zéros est la surface Y le fibré normal N_{Y/\mathbb{P}_5} devrait s'étendre à \mathbb{P}_5 . Or, $K_{\mathbb{P}_5} = \mathcal{O}(-6)$ et donc d'après la formule d'adjonction

$$\begin{aligned} \det N_{Y/\mathbb{P}_5} &= K_{\mathbb{P}_2} \otimes \varphi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_5}(6)) \\ &= \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(3) \end{aligned}$$

et donc ce fibré inversible ne provient pas de \mathbb{P}_5 .

Exercice 3.6

Le but de l'exercice est de montrer qu'une projection générale dans \mathbb{P}_4 de la surface de Veronese est une surface lisse de \mathbb{P}_4 dont le fibré normal ne s'étend pas à \mathbb{P}_4 .

1. Montrer que la variété des coniques du plan projectif $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(W)$ est isomorphe à l'espace projectif $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2W^*)$. Montrer que la surface de Veronese est isomorphe à la sous-variété des coniques dégénérées en droites doubles, c'est-à-dire la variété des coniques définies par une forme quadratique de rang 1 sur W .

2. Montrer qu'une droite D de \mathbb{P}_5 n'est pas contenue dans Y et rencontre Y en au plus deux points.

3. Une droite $D \subset \mathbb{P}_5$ est tangente à Y en un point $x \in D \cap Y$ si $T_x D \subset T_x Y$. Montrer que se donner une droite tangente à Y au point défini par la droite double ℓ^2 équivaut à se donner une conique dégénérée en deux droites dont l'une est ℓ . On pourra utiliser l'exercice 1.5 et montrer que si q est la forme quadratique de rang 1 qui définit $x = \ell^2$ l'espace vectoriel tangent $T_x Y$ est isomorphe à l'espace vectoriel quotient

$$\{\tilde{q} \in S^2W^*, \tilde{q}|_{\ker q} = 0\}/kq.$$

4. Une droite $D \subset \mathbb{P}_5$ est dite sécante à Y si elle est tangente à Y ou si elle rencontre Y en 2 points.

On désigne par $\text{Tan}(Y)$ la réunion des droites tangentes à Y , et par $\text{Sec}(Y)$ la réunion des sécantes à Y . Montrer que $\text{Tan}(Y)$ est un fermé algébrique de \mathbb{P}_5 de dimension 4. Montrer que $\text{Tan}(Y) = \text{Sec}(Y)$. En déduire que $\text{Sec}(Y) \neq \mathbb{P}_5$.

5. Soit $a \in \mathbb{P}_5$ un point n'appartenant pas à $\text{Sec}(Y)$ et $\mathbb{P}_4 \subset \mathbb{P}_5$ un hyperplan ne passant pas par a . On considère la projection $\pi : Y \longrightarrow \mathbb{P}_4$ de centre a . On sait que c'est un morphisme fini. Montrer que π est un morphisme injectif, et que son application linéaire tangente est injective en tout point. En déduire que l'image Z est une sous-variété lisse de dimension 2 de \mathbb{P}_4 , et que $\pi : Y \longrightarrow Z$ est un isomorphisme.

6. Déterminer le fibré inversible $\det N_{Z/\mathbb{P}_4}$ et montrer qu'il ne provient pas de \mathbb{P}_4 .

La situation rencontrée dans la question 5 est fréquente. Voici quelques indications :

LEMME 3.19. — Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme fini et injectif de variétés algébriques ; soit x un point de X et $y = f(x)$ son image. Le morphisme d'algèbre locales associées

$$f^* : \mathcal{O}_{Y,y} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$$

est un morphisme fini.

Démonstration. En effet, $f : X \longrightarrow Y$ est un homéomorphisme sur un sous-espace fermé de Y ; un élément $u \in \mathcal{O}_{Y,y}$ est le germe d'une fonction régulière sur un voisinage ouvert affine U de x dans Y , qu'on peut supposer de la forme $f^{-1}(V)$, avec V voisinage ouvert affine de y . Le morphisme $\mathcal{O}(V) \longrightarrow \mathcal{O}(U)$ étant fini, on en déduit que u est entier.

Il reste avoir que l'algèbre $\mathcal{O}_{X,x}$ est engendrée sur $\mathcal{O}_{Y,y}$ par un nombre fini d'éléments. Fixons V et U comme ci-dessus. Si v_1, \dots, v_n sont des générateurs de l'algèbre de type fini $\mathcal{O}(U)$, les germes $v_{i,x}$ de v_i engendrent $\mathcal{O}_{X,x}$: en effet, si v_x est le germe d'une section du faisceau structural sur un ouvert $\pi^{-1}(W)$ avec $W \subset V$ voisinage ouvert affine de y défini dans V par $Q \neq 0$, avec $Q \in \mathcal{O}(V)$, on aura $Q^k v \in \mathcal{O}(U)$ pour k entier > 0 convenable. Mais alors la formule dans $\mathcal{O}(U)$

$$v = \frac{P(v_1, \dots, v_n)}{Q^k}$$

où est P un polynôme à coefficient dans k montre que le germe v_x est un polynôme en $v_{1,x}, \dots, v_{n,x}$ à coefficients dans $\mathcal{O}_{Y,y}$. \square

LEMME 3.20. — Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme fini et injectif de variétés algébriques ; soit x un point de X et $y = f(x)$ son image. On suppose que la différentielle $d_x f : T_x X \longrightarrow T_y Y$ est injective. Alors le morphisme d'algèbre locales $f^* : \mathcal{O}_{Y,y} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ est surjectif.

Démonstration. On pose $A = \mathcal{O}_{Y,y}$ et $B = \mathcal{O}_{X,x}$ et on désigne par \mathfrak{m}_A et \mathfrak{m}_B les idéaux maximaux de A et B respectivement. Le morphisme d'anneaux locaux $f^* : A \longrightarrow B$ est fini d'après le lemme ci-dessus. Le morphisme $\mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2 \longrightarrow \mathfrak{m}_B/\mathfrak{m}_B^2$ induit par f^* n'est autre que l'application linéaire cotangente est donc surjectif. Ceci s'écrit

$$\mathfrak{m}_B = \mathfrak{m}_B^2 + \mathfrak{m}_A B$$

et \mathfrak{m}_B est un B -module de type fini. D'après le lemme de Nakayama appliqué à l'anneau local B , ceci entraîne $\mathfrak{m}_B = \mathfrak{m}_A B$. Considérons d'autre part l'isomorphisme de A -modules induit par $f^* : A/\mathfrak{m}_A \longrightarrow B/\mathfrak{m}_B$. Alors $B = f^*(A) + \mathfrak{m}_A B$. Puisque B est un A -module de type fini, on obtient encore d'après le lemme de Nakayama $B = f^*(A)$, ce qui démontre le lemme. \square

THÉORÈME 3.21. — *Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme fini injectif de variétés algébriques dont la différentielle est en tout point injective. Alors f est un plongement.*

Démonstration. L'hypothèse implique que f est un homéomorphisme sur son image. Il s'agit de voir que le morphisme de faisceaux sur Y

$$\mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*(\mathcal{O}_X)$$

est surjectif. Mais il suffit pour cela de vérifier que si $x \in X$ et $y = f(x)$, le morphisme d'algèbres locales $\mathcal{O}_{Y,y} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ est surjectif. Ceci résulte du lemme précédent. \square

Ceci résout la question 5 de l'exercice ci-dessus. Un célèbre théorème de Severi affirme que la surface de Veronese est essentiellement la seule surface Y de \mathbb{P}_5 , non contenue dans un hyperplan, qu'on puisse projeter dans \mathbb{P}_4 comme ci-dessus :

THÉORÈME 3.22. — *(Severi) A automorphisme de \mathbb{P}_5 près, la surface de Veronese est la seule surface de \mathbb{P}_5 non contenue dans un hyperplan telle que $\text{Sec}(Y) \neq \mathbb{P}_5$.*

Il en résulte que c'est la seule surface de \mathbb{P}_5 , non contenue dans un hyperplan qu'il est possible de plonger dans \mathbb{P}_4 par une projection de centre un point.

Exercice 3.7

L'image du plongement de Segre $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2 \hookrightarrow \mathbb{P}_5$ est une sous-variété lisse de codimension 2 ; montrer que son fibré normal ne s'étend pas à \mathbb{P}_5 .

Exercice 3.8

Montrer que le morphisme $\mathbb{A}^1 - \{1\} \longrightarrow \mathbb{A}^2$ défini par

$$t \mapsto (t^2 - 1, t(t^2 - 1))$$

est un morphisme injectif dont la différentielle est en tout point injective. Montrer que ce n'est pas un isomorphisme sur son image.

3.4. Systèmes linéaires

Soit X une variété algébrique lisse et connexe.

DÉFINITION 3.23. — *Un système linéaire sur X est la donnée d'un sous-espace vectoriel W de dimension finie de l'espace vectoriel des sections $\Gamma(X, L)$ d'un fibré inversible L sur X . Quand l'espace vectoriel $\Gamma(X, L)$ est de dimension finie, le système linéaire défini par $W = \Gamma(X, L)$ est appelé système linéaire complet.*

Etant donné un tel système linéaire, une section $s \in W$ non nulle définit une hypersurface $V(s)$. Se donner un tel système linéaire revient à se donner un sous-espace projectif $\mathbb{P}(W)$ de l'espace projectif $|\mathbb{L}| = \mathbb{P}(\Gamma(X, L))$ des diviseurs dont le fibré associé est isomorphe à L . Si $\dim \mathbb{P}(W) = 1$ on dit que c'est un pinceau de diviseurs ; si $\dim \mathbb{P}(W) = 2$ on dit que c'est un réseau. Si les hypersurfaces $V(s)$ n'ont pas de point d'intersection en commun, on dit que le système linéaire W est sans point de base. En d'autres termes :

DÉFINITION 3.24. — *Un système linéaire (W, L) est dit sans point de base si le morphisme d'évaluation $\text{ev} : (x, s) \mapsto s(x)$*

$$\text{ev} : X \times W \longrightarrow L$$

est surjectif.

Exemple

Un pinceau de courbes algébriques de degré n dans le plan projectif a toujours des points de base ; en général, il a n^2 points de base. En général, un réseau de courbes de degré n du plan projectif n'a pas de points de base.

Désignons par $m + 1$ la dimension de W . Quand $W \subset \Gamma(X, L)$ est sans point de base, pour tout $x \in X$, $Z_x = \ker \text{ev}_x$ est un hyperplan de W . Le sous-fibré $Z \subset W_X$ défini par le noyau du morphisme d'évaluation fournit alors un morphisme à valeurs dans $\text{Grass}(m, W) = \mathbb{P}(W^*)$

$$\varphi : X \longrightarrow \mathbb{P}(W^*)$$

qui associe au point x l'hyperplan Z_x ; une équation de cet hyperplan peut s'obtenir en choisissant un point dans la droite vectorielle $L_x^* \subset W^*$. Ce morphisme est caractérisé par l'égalité $\varphi^*(S) = Z$, où S est le sous-fibré universel de rang m du fibré trivial de fibre W sur la grassmannienne. Dans l'identification $\text{Grass}(m, W) \simeq \mathbb{P}(W^*)$, le fibré quotient universel devient le fibré $\mathcal{O}(1)$. Ainsi $\varphi^*(\mathcal{O}(1)) \simeq L$. Par le morphisme φ , l'image réciproque de l'hyperplan de $\mathbb{P}(W^*)$ défini par $s \in W - \{0\}$ est l'hypersurface $V(s)$. On se propose de donner des conditions qui permettent d'assurer que φ est un plongement.

DÉFINITION 3.25. — *On dit qu'un système linéaire $W \subset \Gamma(X, L)$ sépare les points si pour tous points a et $b \in X$ distincts il existe une section $s \in W$ telle que $s(a) = 0$ et $s(b) \neq 0$.*

Si le système linéaire W sépare les points, il est sans point de base. Nous aurons besoin d'une condition plus forte, et nous introduisons pour ceci le \mathcal{O}_x -module $\mathcal{O}_x(L)$ des germes de sections régulières de L au voisinage du point x , et l'espace vectoriel

$$J_x(L) = \mathcal{O}_x(L) / \mathfrak{m}_x^2 \mathcal{O}_x(L)$$

appelé espace vectoriel des jets d'ordre un au point x de sections de L . On dispose d'une application k -linéaire canonique $j_x : \mathcal{O}_x(L) \longrightarrow J_x(L)$ qui associe à un germe de section régulière s son jet d'ordre un $j_x(s)$ en x . De plus on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow T_x^* \otimes L_x \longrightarrow J_x \longrightarrow L_x \longrightarrow 0$$

Le jet $j_x(s)$ d'une section s qui s'annule en x est exactement la différentielle $d_x s \in T_x^* \otimes L_x = L(T_x, L_x)$.

DÉFINITION 3.26. — *On dit qu'un système linéaire $W \subset \Gamma(X, L)$ sans point de base sépare les vecteurs tangents, si pour tout $x \in X$ l'application linéaire $W \longrightarrow J_x(L)$ qui associe à une section $s \in W$ son jet $j_x(s)$ est surjective.*

Il revient au même de demander que pour tout $x \in X$, l'application linéaire $Z_x \longrightarrow L(T_x, L_x)$ définie par $s \mapsto d_x s$ est surjective, ou encore que l'application linéaire transposée $T_x \longrightarrow L(Z_x, L_x)$ qui associe au vecteur tangent t l'application linéaire $s \mapsto d_x s.t$ est injective : autrement dit, la définition signifie que pour tout vecteur tangent non nul t , il existe une section $s \in W$ s'annulant en x et telle que $d_x s.t \neq 0$.

THÉOREÈME 3.27. — *Soit X une variété projective et $W \subset \Gamma(X, L)$ un système linéaire qui sépare les points et les vecteurs tangents. Alors le morphisme canonique $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{P}(W^*)$ est un plongement.*

Démonstration. Il est clair que le morphisme φ est injectif : car si a et b sont deux points de x , la condition de séparation des points implique que $Z_a \neq Z_b$. En vertu du corollaire 3.21, il suffit de montrer que f est fini et que l'application linéaire tangente $d_x \varphi$ est injective en tout point $x \in X$; nous admettrons ici la finitude de φ qui sera démontrée plus tard comme conséquence de la théorie des faisceaux algébriques cohérents

(voir section 5.4, chapitre 3). Il reste seulement à se persuader que l'application linéaire tangente

$$d_x\varphi : T_xX \longrightarrow T_x\mathbb{P}(W^*)$$

n'est autre que l'application linéaire $T_xX \longrightarrow L(Z_x, L_x)$ introduite ci-dessus. Pour ceci, choisissons une base e_0, \dots, e_m de W , avec e_1, \dots, e_m base de Z_x . Désignons par e_i^* la base duale. L'identification

$$T_x\mathbb{P}(W^*) \simeq L(Z_x, L_x)$$

s'obtient en prenant la différentielle au point défini par l'hyperplan Z_x de la carte locale $U_0 \longrightarrow L(Z_x, L_x)$ définie sur l'ouvert $U_0 \simeq \mathbb{A}^n$ des points $[e_0^* + \sum_{1 \leq i \leq m} w_i e_i^*] \in \mathbb{P}(W^*)$ par

$$[e_0 + \sum_{1 \leq i \leq m} w_i e_i^*] \mapsto \sum_{1 \leq i \leq m} w_i e_0(x) e_i^*.$$

La section e_0 de L étant non nulle en x , on peut écrire sur un voisinage ouvert V de x

$$e_i = f_i e_0$$

où $f_i \in \mathcal{O}(V)$. L'image de V par φ est contenue dans l'ouvert U_0 de $\mathbb{P}(W^*)$ et φ est donné sur cet ouvert par $\varphi|_V = [e_0^* + \sum_{1 \leq i \leq m} f_i e_i^*]$ de sorte que pour $t \in T_xX$

$$\begin{aligned} d_x\varphi(t) &= \sum_{1 \leq i \leq m} d_x f_i(t) e_0(x) e_i^* \\ &= \sum_{1 \leq i \leq m} d_x e_i(t) e_i^* \end{aligned}$$

Ceci signifie que $d_x\varphi(t)$ est l'application linéaire $Z_x \longrightarrow L_x$ définie par $s \mapsto d_x s(t)$. Ceci achève la démonstration. \square

DÉFINITION 3.28. — *Un fibré vectoriel inversible L sur une variété algébrique X est dit très ample si les sections de L séparent les points et les vecteurs tangents.*

Exercice 3.9

1. Vérifier que sur l'espace projectif $\mathbb{P}(V)$, le fibré $\mathcal{O}(k)$ est très ample dès que $k \geq 1$.
2. L'espace vectoriel des sections de $\mathcal{O}(k)$ est le dual de $S^k V$. Montrer que le plongement

$$\mathbb{P}(V) \hookrightarrow \mathbb{P}(S^k V)$$

associé au système linéaire complet s'identifie au plongement de Veronese.

Exercice 3.10

Soient A et B deux fibrés inversibles sur une variété algébrique X . Montrer que si A est très ample et B engendré par ses sections, le fibré inversible $A \otimes B$ est très ample.

4. Faisceaux algébriques cohérents

Soit X une variété algébrique. La catégorie \mathcal{L} des faisceaux algébriques localement libres est une catégorie additive, mais ce n'est pas une catégorie abélienne.

Considérons par exemple l'idéal \mathcal{J} d'une hypersurface Y sur une variété algébrique lisse X ; dans \mathcal{L} , le morphisme d'inclusion $\mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{O}$ pour noyau et pour conoyau le faisceau nul. Pourtant, le morphisme $\mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{O}$ n'est pas un isomorphisme. Bien entendu, dans la catégorie abélienne des faisceaux algébriques, le conoyau est le faisceau $j_*(\mathcal{O}_Y)$, où $j : Y \hookrightarrow X$ est l'inclusion canonique, et l'image est le faisceau \mathcal{J} lui-même. Pour remédier à cet inconvénient, et pour se limiter aux faisceaux algébriques satisfaisant à certaines conditions de finitude, on introduit la catégorie des faisceaux algébriques cohérents.

4.1. Faisceau associé à un A -module

Soit A une k -algèbre de type fini. Considérons la variété algébrique affine $X = \text{Spec } A$, et un A -module M . Si $f \in A$, le module M_f sur l'anneau des fractions A_f est le module des fractions dont le numérateur est dans M et dont le dénominateur est une puissance de f . Considérons le préfaisceau \tilde{M} sur X défini sur la base d'ouverts principaux X_f par

$$\tilde{M}(X_f) = M_f$$

Si $X_{f'} \subset X_f$ on sait que f divise une puissance convenable de f' ce qui définit des morphismes de restrictions $M_f \longrightarrow M_{f'}$.

Exercice 4.1

Vérifier que le préfaisceau \tilde{M} est un faisceau algébrique. (On pourra calquer la démonstration de la section 2.5 du chapitre 1).

Exercice 4.2

Soit $x \in X$ un point de X , correspondant à un idéal maximal \mathfrak{m} de A . Montrer que le morphisme canonique

$$\tilde{M}_x \longrightarrow M_{\mathfrak{m}}$$

est un isomorphisme. (Calquer la démonstration de la section 2.5 du chapitre 1 qui permet de décrire $\mathcal{O}_{X,x}$ comme algèbre localisée $A_{\mathfrak{m}}$).

Le faisceau \widetilde{M} est aussi le faisceau image réciproque du module constant \underline{M} sur l'espace annelé $(*, \underline{A})$ réduit à un point $*$ défini par le faisceau constant \underline{A} . Autrement dit, c'est le faisceau associé au préfaisceau $U \mapsto M \otimes_A \mathcal{O}_X(U)$, qu'on note habituellement $M \otimes_A \mathcal{O}_X$. En effet, on a bien un homomorphisme canonique de faisceaux algébriques

$$M \otimes_A \mathcal{O}_X \longrightarrow \widetilde{M}$$

et en un point $x \in X$ correspondant à un idéal maximal \mathfrak{m} , le morphisme induit est l'homomorphisme canonique $M \otimes_A A_{\mathfrak{m}} \longrightarrow M_{\mathfrak{m}}$. Par conséquent c'est un isomorphisme.

Si M et N sont des A -modules à toute application A -linéaire $f : M \longrightarrow N$ on associe un morphisme de faisceaux algébriques $\widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{N}$. On désigne par Mod_A la catégorie des A -modules, et Alg_X la catégorie des faisceaux algébriques sur $X = \text{Spec } A$. Ces catégories sont des catégories abéliennes, et on a ainsi obtenu un foncteur additif de la catégorie Mod_A dans la catégorie Alg_X . Remarquons que par définition on a un isomorphisme canonique

$$M \xrightarrow{\sim} \Gamma(\widetilde{M}).$$

PROPOSITION 4.1. — *Considérons le foncteur covariant $\text{Alg}_X \longrightarrow \text{Ens}$ de la catégorie des faisceaux algébriques sur la variété algébrique affine $X = \text{Spec } A$, à valeurs dans la catégorie Ens des ensembles qui associe au faisceau algébrique \mathcal{F} l'ensemble $\text{Hom}_A(M, \Gamma(\mathcal{F}))$. Ce foncteur est représentable par \widetilde{M} muni de l'application linéaire $i : M \longrightarrow \Gamma(\widetilde{M})$.*

Ceci signifie que le couple (\widetilde{M}, i) est solution du problème universel suivant : pour tout faisceau algébrique cohérent \mathcal{F} sur X et toute application A -linéaire $u : M \longrightarrow \Gamma(\mathcal{F})$ il existe un unique morphisme de faisceaux algébriques $v : \widetilde{M} \longrightarrow \mathcal{F}$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} M & & \\ \downarrow i & \searrow & \\ \Gamma(\widetilde{M}) & \xrightarrow{v} & \mathcal{F} \end{array}$$

soit commutatif. Autrement dit, l'application

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\widetilde{M}, \mathcal{F}) \longrightarrow \text{Hom}_A(M, \Gamma(\mathcal{F}))$$

définie par $v \mapsto \Gamma(v)i$ est un isomorphisme.

Démonstration. Le foncteur $\text{Alg}_X \longrightarrow \text{Mod}_A$ défini par $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(\mathcal{F})$ est l'image directe par le morphisme d'espaces annelés $(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (*, A)$. La formule précédente est un cas particulier de l'énoncé qui dit que le foncteur image directe est l'adjoint à droite du foncteur image réciproque. \square

THÉORÈME 4.2. — *Le foncteur $\text{Mod}_A \longrightarrow \text{Alg}_X$ défini ci-dessus est un foncteur exact. Il est pleinement fidèle.*

Démonstration. Ce foncteur est exact parce que si $f \in A$, le foncteur $M \mapsto M_f$ est exact. Il reste à vérifier qu'il est pleinement fidèle, c'est-à-dire que si M et N sont des A -modules, l'application linéaire $\text{Hom}_A(M, N) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\tilde{M}, \tilde{N})$ est un isomorphisme. C'est évident si $M = A$ car alors $\tilde{M} = \mathcal{O}_X$ et l'application linéaire s'identifie l'application linéaire canonique $N \longrightarrow \Gamma(\tilde{N})$ dont on sait que c'est un isomorphisme. Supposons d'abord M de type fini. Les deux membres sont des foncteurs contravariants, additifs en M , exacts à gauche. Ces foncteurs commutent aux sommes directes finies, et donc l'énoncé est vrai pour $M = A^p$. Comme A est noethérien et M de type fini, il existe une suite exacte de A -modules

$$A^q \longrightarrow A^p \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

ce qui fournit une suite exacte de faisceaux algébriques $\mathcal{O}_X^q \longrightarrow \mathcal{O}_X^p \longrightarrow \tilde{M} \longrightarrow 0$ et un diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(M, N) & \longrightarrow & \text{Hom}(A^q, N) & \longrightarrow & \text{Hom}(A^p, N) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(\tilde{M}, \tilde{N}) & \longrightarrow & \text{Hom}(\mathcal{O}_X^p, \tilde{N}) & \longrightarrow & \text{Hom}(\mathcal{O}_X^q, \tilde{N}) \end{array}$$

Puisque les deux dernières flèches verticales sont des isomorphismes, il en résulte que la première flèche verticale est un isomorphisme. Si M n'est plus de type fini, le raisonnement est le même, mais il faut travailler avec des modules libres qui ne sont plus forcément de type fini. \square

Exercice 4.3

1. Démontrer que si $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, pour tout $f \in A$ le morphisme canonique $\bigoplus_{i \in I} (M_i)_f \longrightarrow M_f$ est un isomorphisme.

2. En déduire que sur la catégorie des A -modules le foncteur $M \mapsto \widetilde{M}$ commute aux sommes directes.

3. En déduire que ce foncteur est encore pleinement fidèle sur la catégorie de tous les A -modules.

4.2. Faisceaux algébriques cohérents

Soit $X = \text{Spec } A$ une variété algébrique affine, et \mathcal{F} un faisceau algébrique sur X . La propriété universelle ci-dessus fournit un morphisme de faisceaux algébriques

$$\widetilde{\Gamma(\mathcal{F})} \longrightarrow \mathcal{F}$$

En général, ce morphisme n'a aucune raison d'être un isomorphisme. On verra que ceci est vrai si et seulement si \mathcal{F} est un faisceau quasi-cohérent.

DÉFINITION 4.3. — *Soit X une variété algébrique. Un faisceau algébrique \mathcal{F} sur X est dit quasi-cohérent (resp. cohérent) si pour tout point $x \in X$, il existe un voisinage ouvert affine $U = \text{Spec } A$ et un A -module M (resp. A -module de type fini M) tel que $\mathcal{F}|_U$ soit isomorphe à \widetilde{M} .*

Exemples

1. Le faisceau structural de X est un faisceau algébrique cohérent. Plus généralement, un faisceau localement libre de rang r est un faisceau algébrique cohérent.

2. L'exemple suivant n'est pas en général un faisceau algébrique localement libre. Soit $Y \subset X$ une sous-variété d'une variété algébrique affine $X = \text{Spec } A$, définie par un idéal $I \subset A$. Alors l'idéal de Y est l'idéal \widetilde{I} de \mathcal{O}_X . On verra au paragraphe suivant qu'en fait l'idéal de toute sous-variété algébrique affine est un faisceau algébrique cohérent.

3. Soit X une variété algébrique irréductible et $Y \subset X$ un fermé strict. Considérons l'idéal de \mathcal{O}_X défini par $\mathcal{J}(U) = \mathcal{O}_X(U)$ si U ne rencontre pas Y et $\mathcal{J}(U) = 0$ si U rencontre Y . Alors \mathcal{J} n'est pas un faisceau algébrique cohérent. En effet, on a $\mathcal{J}_x = 0$ pour tout $x \in Y$. Si ce faisceau était cohérent, il existerait un voisinage ouvert affine $U = \text{Spec } A$ de x , et un A -module de type fini M tel que $\mathcal{J}|_U$ soit isomorphe à \widetilde{M} . Si \mathfrak{m} est l'idéal maximal de A correspondant au point x , on aurait $\mathcal{F}_x = M_{\mathfrak{m}} = 0$. Mais alors \mathcal{J} serait nul sur un voisinage de x . Or, la restriction de \mathcal{J} au complémentaire de Y coïncide avec \mathcal{O}_X donc est non nul.

Exercice 4.4

Démontrer que ce faisceau algébrique n'est même pas quasi-cohérent.

THÉORÈME 4.4. — Soit $X = \text{Spec } A$ une variété algébrique affine.

- (i) Si \mathcal{F} est un faisceau algébrique quasi-cohérent sur X , le morphisme canonique $\widetilde{\Gamma}(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{F}$ est un isomorphisme.
- (ii) Si \mathcal{F} est un faisceau algébrique cohérent sur X , le A -module des sections $\Gamma(\mathcal{F})$ est un A -module de type fini.

Cet énoncé implique que le foncteur section induit sur une variété algébrique affine une équivalence de catégorie entre la catégorie des faisceaux algébriques quasi-cohérents sur X et celle de A -modules, et une équivalence de catégories entre la catégorie des faisceaux algébriques cohérents sur X et celle de A -modules de type fini. Plus précisément :

COROLLAIRE 4.5. — Soit $X = \text{Spec } A$ une variété algébrique affine, Mod_A^{TF} la catégorie des A -modules de type fini et Coh_X la catégorie des faisceaux algébriques cohérents sur X . Le foncteur

$$\text{Mod}_A^{\text{TF}} \longrightarrow \text{Coh}_X$$

défini par $M \mapsto \widetilde{M}$ et le foncteur adjoint

$$\Gamma : \text{Coh}_X \longrightarrow \text{Mod}_A^{\text{TF}}$$

sont quasi-inverses l'un de l'autre.

Ceci signifie que les morphismes fonctoriels canoniques $i : M \longrightarrow \Gamma(\widetilde{M})$ et $j : \widetilde{\Gamma(\mathcal{F})} \longrightarrow \mathcal{F}$ sont des isomorphismes, et que le morphisme composé

$$\Gamma(\mathcal{F}) \xrightarrow{i} \Gamma(\widetilde{\Gamma(\mathcal{F})}) \xrightarrow{\Gamma(j)} \Gamma(\mathcal{F})$$

est l'identité. Cette dernière assertion résulte de la propriété universelle satisfaite par (\widetilde{M}, i) .

La démonstration du théorème 4.4 nécessite la description du module des sections des faisceaux cohérents ou quasi-cohérents.

LEMME 4.6. — Soit X une variété algébrique, et \mathcal{F} un faisceau algébrique quasi-cohérent sur X . Considérons une section $f \in \mathcal{O}(X)$ et l'ouvert X_f défini par les points $x \in X$ tels que $f(x) \neq 0$. L'application A_f -linéaire canonique

$$\Gamma(\mathcal{F})_f \longrightarrow \Gamma(X_f, \mathcal{F})$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Si X est affine, et associée à l'algèbre de type fini A et si \mathcal{F} est le faisceau algébrique \widetilde{M} associé à un A -module M , l'énoncé est vrai par définition de \widetilde{M} . Dans le cas quelconque, on considère un recouvrement fini de X par des ouverts affines $U_i = \text{Spec } A_i$ tels que $\mathcal{F}|_{U_i}$ soit isomorphe à \widetilde{M}_i où M_i est un module de type fini sur $A_i = \mathcal{O}(U_i)$. Les ouverts $U_{ij} = U_i \cap U_j$ sont encore affines. Par abus, on désigne encore par f les sections de $\mathcal{O}(U_i)$ ou de $\mathcal{O}(U_{ij})$ obtenues par restriction. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathcal{F})_f & \longrightarrow & \oplus_i \Gamma(U_i, \mathcal{F})_f & \longrightarrow & \oplus_{i,j} \Gamma(U_{ij}, \mathcal{F})_f \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \Gamma(X_f, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \oplus_i \Gamma((U_i)_f, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \oplus_{i,j} \Gamma((U_{ij})_f, \mathcal{F}) \end{array}$$

Il résulte de la définition d'un faisceau et de l'exactitude du foncteur associant à un module le module des fractions dont le dénominateur est une puissance de f que les lignes sont exactes. Les deux dernières flèches verticales sont des isomorphismes. Donc la première l'est aussi. \square

Fin de la démonstration du théorème 4.4

Soit $X = \text{Spec } A$ une variété algébrique affine ; les ouverts X_f forment une base d'ouverts. Donc le lemme ci-dessus entraîne que si \mathcal{F} est un faisceau quasi-cohérent sur X le morphisme canonique

$$\widetilde{\Gamma(\mathcal{F})} \longrightarrow \mathcal{F}$$

est un isomorphisme. Ceci démontre l'assertion (i). Il reste à voir que si \mathcal{F} est un faisceau algébrique cohérent, $\Gamma(\mathcal{F})$ est un A -module de type fini. La démonstration est semblable à celle qui a été donnée pour la proposition 6.6 du chapitre 1. Considérons des ouverts principaux en nombre fini $U_i = X_{f_i}$ de X recouvrant X tels que $\mathcal{F}|_{U_i}$ soit le faisceau associé à un A_{f_i} -module de type fini. Le A_{f_i} -module $\Gamma(\mathcal{F})_{f_i}$ est donc de type fini sur A_{f_i} . On peut donc trouver des générateurs en nombre fini de la forme $\frac{e_{i,j}}{f_i^{n_i}}$, et on peut supposer quitte à changer éventuellement $e_{i,j}$ que l'entier naturel n_i ne dépend pas de i . Considérons le sous-module N de M engendré par les éléments $e_{i,j}$. Si $v \in M$, il existe un entier naturel m tel que pour tout i , on ait $f_i^m v \in N$. D'autre part, puisque les ouverts U_i recouvrent X , l'idéal de A engendré par les f_i^m est (1) . Donc il existe $\alpha_i \in A$ tels que

$$\sum_i \alpha_i f_i^m = 1.$$

Alors $v \in N$. Donc $M = N$ et M est un A -module de type fini. Ceci achève la démonstration. \square

PROPOSITION 4.7. — *Les faisceaux algébriques cohérents (resp. quasi-cohérents) sur X forment une sous-catégorie abélienne de la catégorie des faisceaux algébriques.*

Démonstration.

Il s'agit de montrer que

(1) Si $f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ est un homomorphisme de faisceaux algébriques cohérents le noyau et le conoyau de f sont des faisceaux algébriques cohérents. La question est locale. On peut supposer $X = \text{Spec } A$ et que $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ et $\mathcal{G} = \widetilde{N}$, où M et N sont des A -modules de type fini. Alors d'après le théorème 4.2 le morphisme $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ provient d'une application linéaire bien déterminée $\varphi : M \longrightarrow N$, et, on a alors puisque le foncteur $M \mapsto \widetilde{M}$ est exact $\ker f = \widetilde{\ker \varphi}$ et $\text{coker } f = \widetilde{\text{coker } \varphi}$. Donc le noyau et le conoyau de f sont des faisceaux algébriques cohérents.

(2) La somme directe de deux faisceaux algébriques cohérents est un faisceau algébrique cohérent. Ici encore on peut supposer $X = \text{Spec } A$ et que $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ et $\mathcal{G} = \widetilde{N}$, où M et N sont deux A -modules de type fini. Mais alors $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ est le faisceau algébrique associé au A -module $M \oplus N$.

La démonstration est identique pour les faisceaux quasi-cohérents. Il suffit d'oublier les conditions de finitude. \square

Exactitude du foncteur Γ , sur une variété algébrique affine.

Sur la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur un espace topologique X (ou des faisceaux algébriques sur une variété algébrique X) le foncteur section est exact à gauche, mais non à droite :

LEMME 4.8. — *Soit $0 \rightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{f} \mathcal{F} \xrightarrow{g} \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ une suite exacte de faisceaux de groupes abéliens sur un espace topologique X . Alors la 0-suite*

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}') \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}'')$$

est exacte.

Démonstration. Rappelons que l'exactitude de la suite de faisceaux de groupes abéliens $0 \rightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{f} \mathcal{F} \xrightarrow{g} \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ est équivalente à l'exactitude, pour tout point $x \in X$, de la suite de groupes abéliens

$$0 \rightarrow \mathcal{F}'_x \xrightarrow{f} \mathcal{F}_x \xrightarrow{g} \mathcal{F}''_x \rightarrow 0$$

1. Soit s' une section de \mathcal{F}' telle que $f(s') = 0$. Alors pour tout $x \in X$, le germe $f_x(s'_x)$ est nul, et par suite $s'_x = 0$. Ceci entraîne qu'il existe un recouvrement ouvert U_i de X tel que $s|_{U_i} = 0$; ceci entraîne, d'après la définition des faisceaux $s = 0$.

2. Soit s une section de \mathcal{F} dont l'image par g est nulle. Il existe alors un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (U_i)$ et des sections locales $t_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{F}')$ telles que $f(t_i) = s|_{U_i}$. Sur l'intersection $U_{ij} = U_i \cap U_j$ on a alors $t_i|_{U_{ij}} = t_j|_{U_{ij}}$. D'après la définition des faisceaux, on peut alors trouver une section $t \in \Gamma(X, \mathcal{F}')$ telle que $t|_{U_i} = t_i$. On a alors pour tout i $f(t)|_{U_i} = s|_{U_i}$ ce qui entraîne $f(t) = s$. \square

On a déjà vu que ce foncteur n'est pas en général exact à droite : ainsi, on a la suite exacte de faisceaux de groupes abéliens sur un espace topologique localement simplement connexe

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{C} \xrightarrow{\exp} \mathcal{C}^* \longrightarrow (1)$$

où \mathcal{C} est le faisceau des fonctions continues à valeurs dans \mathbb{C} , et \mathcal{C}^* est le faisceau des fonctions continues inversibles. Pourtant, au niveau des sections globales, le morphisme $\exp : \Gamma(X, \mathcal{C}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{C}^*)$ n'est pas en général surjectif. On verra aussi qu'en général, sur une variété algébrique quelconque, le foncteur Γ n'est pas exact sur la catégorie des faisceaux algébrique cohérents (cf. exercice 4.8). Pourtant, dans le cas des faisceaux algébriques cohérents sur une variété algébrique affine X , ce foncteur est en fait exact.

COROLLAIRE 4.9. — Soit $X = \text{Spec } A$ une variété algébrique affine. Etant donnée une suite exacte $\mathcal{F}' \xrightarrow{f} \mathcal{F} \xrightarrow{g} \mathcal{F}''$ de faisceaux algébriques quasi-cohérents sur X la 0-suite de A -modules

$$\Gamma(\mathcal{F}') \longrightarrow \Gamma(\mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{F}'')$$

est exacte.

Démonstration. Considérons la 0-suite $\Gamma(\mathcal{F}') \xrightarrow{f} \Gamma(\mathcal{F}) \xrightarrow{g} \Gamma(\mathcal{F}'')$ et le A -module défini par $M = \ker g / \text{Im } f$. Par application du foncteur $N \mapsto \tilde{N}$ on retrouve la suite exacte de départ. Ce foncteur étant exact, le faisceau algébrique associé \tilde{M} est évidemment nul (cf. lemme 1.1 chapitre 3). Il suffit donc de savoir que si M est un A -module tel que $\tilde{M} = 0$ on a $M = 0$. Mais ceci résulte trivialement de la définition de \tilde{M} . \square

COROLLAIRE 4.10. — Soit X une variété algébrique. Considérons une suite exacte de faisceaux algébriques $0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$. On suppose que \mathcal{F}' et \mathcal{F}'' sont des faisceaux algébriques cohérents. Alors \mathcal{F} est un faisceau algébrique cohérent.

Démonstration. La question est locale. On peut donc supposer que X est affine $X = \text{Spec } A$, où A est une k -algèbre de type fini. Alors $\Gamma(\mathcal{F}')$ et $\Gamma(\mathcal{F}'')$ sont des A -modules de type fini et la suite exacte 4.8 et le fait que A est noethérien montrent que $\Gamma(\mathcal{F})$ est un A -module de type fini. Puisque $\Gamma(\mathcal{F}'')$ est de type fini, on peut supposer de plus, qui au

besoin à diminuer X que l'application linéaire $\Gamma(\mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{F}'')$ est surjective. Considérons alors le diagramme commutatif de faisceaux algébriques

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \widetilde{\Gamma(\mathcal{F}')} & \longrightarrow & \widetilde{\Gamma(\mathcal{F})} & \longrightarrow & \widetilde{\Gamma(\mathcal{F}'')} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow (1) & & \downarrow (2) & & \downarrow (3) \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}' & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F}'' \longrightarrow 0
 \end{array}$$

dans lequel les lignes sont exactes. On sait que les flèches (1) et (3) sont des isomorphismes. Il en résulte que la flèche (2) est un isomorphisme. Donc le faisceau algébrique \mathcal{F} est cohérent. \square

Exercice 4.5

Soit X une variété algébrique.

1. Soit $f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ un morphisme de faisceaux algébriques cohérents et $x \in X$ un point tel que $f_x : \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x$ soit un isomorphisme. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert U de x tel que $f|_U$ soit un isomorphisme.

2. Montrer qu'un faisceau algébrique cohérent \mathcal{F} sur X est localement libre de rang r si et seulement si pour tout x , le $\mathcal{O}_{X,x}$ -module \mathcal{F}_x est libre de rang r .

Exercice 4.6

Soit X une courbe algébrique lisse.

1. Démontrer que tout faisceau algébrique cohérent sur X est somme directe d'un faisceau localement libre et d'un faisceau algébrique de support fini (Utiliser le théorème de structure des modules de type fini sur un anneau principal).

2. Montrer que la catégorie des faisceaux localement libres sur X a des noyaux et des conoyaux, mais que ce n'est pas une catégorie abélienne.

4.3. Image réciproque, image directe

PROPOSITION 4.11. — *Considérons un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ de variétés algébriques.*

- (i) *Pour tout faisceau algébrique cohérent \mathcal{G} sur Y , l'image réciproque $f^*(\mathcal{G})$ est un faisceau algébrique cohérent sur X .*
- (ii) *Soit \mathcal{F} un faisceau quasi-cohérent sur X , alors l'image directe $f_*(\mathcal{F})$ est quasi-cohérent.*
- (iii) *Si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme fini, l'image directe $f_*(\mathcal{F})$ d'un faisceau algébrique cohérent \mathcal{F} sur X est un faisceau algébrique cohérent sur Y .*

Démonstration. (i) La question est locale sur X . On peut donc supposer que $X = \text{Spec } A$ et $Y = \text{Spec } B$; alors $\mathcal{G} = \widetilde{N}$, où N est un module de type fini sur B . Le morphisme $f : X \longrightarrow Y$ provient d'un homomorphisme d'algèbres $\phi : B \longrightarrow A$. L'application B -linéaire $N \longrightarrow \Gamma(f^*(\mathcal{G}))$ fournit une application A -linéaire $N \otimes_B A \longrightarrow \Gamma(f^*(\mathcal{G}))$ et par conséquent un homomorphisme de faisceaux algébriques sur X

$$\widetilde{N \otimes_A B} \longrightarrow f^*(\mathcal{G})$$

Cet homomorphisme est fonctoriel en N et c'est un isomorphisme quand $N = B$, et donc quand $N = B^p$ puisqu'il s'agit de foncteurs additifs. Ces deux foncteurs sont exact à droite. Pour tout B -module N de type fini il existe une suite exacte

$$B^q \longrightarrow B^p \longrightarrow N$$

on voit que ce morphisme fonctoriel est un isomorphisme. Par suite, $f^*(\mathcal{G})$ est un faisceau algébrique cohérent.

(ii) La question est locale sur Y , et on peut encore supposer que X est affine. En effet, soit (U_i) un recouvrement fini de X par des ouverts affines U_i ; considérons les restrictions $f_i = f|_{U_i}$, $f_{ij} = f|_{U_{ij}}$, et les faisceaux quasi-cohérents $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}|_{U_i}$ et $\mathcal{F}_{ij} = \mathcal{F}|_{U_{ij}}$. On a une suite exacte de faisceaux sur Y

$$0 \longrightarrow f_*(\mathcal{F}) \longrightarrow \bigoplus_i f_{i*}(\mathcal{F}_i) \longrightarrow \bigoplus_{i,j} f_{ij*}(\mathcal{F}_{ij})$$

On est donc ramené à prouver l'énoncé dans la cas où X et Y sont affines.

Supposons donc $X = \text{Spec } A, Y = \text{Spec } B$; alors $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ où M est un A -module. Considérons l'homomorphisme d'algèbres $\phi : B \longrightarrow A$ induit par f . L'isomorphisme de A -modules $M \xrightarrow{\sim} \Gamma(f_*(\mathcal{F}))$ peut être vu comme un homomorphisme de B -modules; il définit un morphisme de faisceaux algébriques $\widetilde{M} \longrightarrow f_*(\mathcal{F})$ sur Y . Par passage aux ouverts principaux, on voit immédiatement que c'est un isomorphisme.

(iii) Supposons que f soit un morphisme fini et que \mathcal{F} soit un faisceau algébrique cohérent sur X . On veut montrer que $f_*(\mathcal{F})$ est un faisceau algébrique cohérent sur Y . La question étant locale sur Y on peut supposer que Y est affine. Alors X est affine, et $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ où M est un A -module de type fini. On suppose $X = \text{Spec } A$ et $Y = \text{Spec } B$. Puisque le morphisme d'algèbres $\phi : B \longrightarrow A$ défini par f est fini, on voit que M est un B -module de type fini. Par suite $f_*(\mathcal{F})$ est un faisceau algébrique cohérent. \square

Exercice 4.7

Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de variétés algébriques. Montrer que l'image directe d'un faisceau algébrique cohérent \mathcal{F} sur X par f est un faisceau algébrique sur Y n'est pas en général cohérent (Prendre par exemple Y réduit à un point).

COROLLAIRE 4.12. — *Sur une variété algébrique, le faisceau d'idéaux \mathcal{J} d'une sous-variété algébrique fermée $Y \subset X$ est un faisceau algébrique cohérent.*

Démonstration. Soit $j : Y \hookrightarrow X$ le morphisme d'inclusion. C'est un morphisme fini. Alors $j_*(\mathcal{O}_Y)$ est un faisceau algébrique cohérent sur X . La suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow j_*(\mathcal{O}_Y) \longrightarrow 0$$

montre que \mathcal{J} est un faisceau algébrique cohérent. \square

Comme conséquence, on obtient l'énoncé suivant, promis à la section 2.9 du chapitre 1.

COROLLAIRE 4.13. — *Soit $X = \text{Spec } A$ une variété algébrique affine, et Y une sous-variété algébrique fermée de X . Alors $Y = \text{Spec } A/I$, où I est un idéal de A .*

Démonstration. Considérons l'idéal $I = \Gamma(\mathcal{J})$ de A . Puisque \mathcal{J} est un faisceau cohérent, le morphisme canonique $\tilde{I} \longrightarrow \mathcal{J}$ est un isomorphisme d'après le théorème 4.4. Ceci montre que la sous-variété algébrique Y de X coïncide avec celle qui est définie par l'idéal I . \square

COROLLAIRE 4.14. — *Considérons l'idéal \mathcal{N} des éléments nilpotents d'une variété algébrique X . Alors \mathcal{N} est un faisceau algébrique cohérent sur X*

En effet c'est l'idéal de la sous-variété fermée X_{red} dans X .

Exercice 4.8

Soit X une variété algébrique, et Y une sous-variété algébrique fermée. Soit $j : Y \hookrightarrow X$ l'inclusion canonique. Montrer que le morphisme de restriction

$$\Gamma(\mathcal{O}_X) \longrightarrow \Gamma(j_*(\mathcal{O}_Y))$$

n'est pas en général surjectif.

Exercice 4.9

Soit \mathcal{N} l'idéal des éléments nilpotents d'une variété algébrique X . Montrer qu'il existe un nombre r tel que $\mathcal{N}^r = 0$.

Exercice 4.10

Soit \mathcal{J} un faisceau cohérent d'idéaux de X . Montrer que \mathcal{J} définit une sous-variété fermée de X .

4.4. Produit tensoriel et faisceaux d'homomorphismes

Soit X une variété algébrique.

PROPOSITION 4.15. — Soient \mathcal{F} et \mathcal{G} deux faisceaux algébriques cohérents sur une variété algébrique X . Alors les faisceaux algébriques $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{G}$ et $\underline{\text{Hom}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ sont cohérents.

Démonstration. La question est locale. On peut donc supposer que \mathcal{F} a une présentation $\mathcal{O}^p \longrightarrow \mathcal{O}^q \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$. Par exactitude à droite du foncteur covariant $-\otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{G}$ on obtient les suites exactes

$$\mathcal{G}^p \longrightarrow \mathcal{G}^q \longrightarrow \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{G} \longrightarrow 0$$

ce qui montre que $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{G}$ est le conoyau d'un morphisme de faisceaux algébriques cohérents. Donc il est cohérent. De même, le foncteur contravariant $\underline{\text{Hom}}(-, \mathcal{G})$ est exact à gauche sur la catégorie des faisceaux algébriques, donc on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \longrightarrow \mathcal{G}^q \longrightarrow \mathcal{G}^p$$

et $\underline{\text{Hom}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ est le noyau d'un morphisme de faisceaux algébriques cohérents, donc lui-même cohérent. \square

Exercice 4.11

Soit $X = \text{Spec } A$ une variété algébrique affine, M et N deux A -modules de type fini sur A . On désigne par \mathcal{F} et \mathcal{G} respectivement les faisceaux algébriques cohérents associés sur X . Montrer que les morphismes canoniques

$$\begin{aligned} \widetilde{M \otimes_A N} &\xrightarrow{\sim} \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G} \\ \widetilde{\text{Hom}_A(M, N)} &\xrightarrow{\sim} \underline{\text{Hom}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \end{aligned}$$

sont des isomorphismes.

Exercice 4.12

Montrer que si \mathcal{F} et \mathcal{G} sont deux faisceaux algébriques cohérents sur X , pour tout $x \in X$, l'homomorphisme canonique

$$\underline{\text{Hom}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})_x \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x)$$

est un isomorphisme.

4.5. Faisceaux localement libres sur une variété affine

On considère une k -algèbre de type fini A et la variété algébrique affine $X = \text{Spec } A$.

LEMME 4.16. — *Considérons une suite exacte de faisceaux algébriques cohérents sur la variété affine X*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{f} \mathcal{F} \xrightarrow{g} \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$

Si \mathcal{F}'' est un faisceau localement libre, cette suite exacte est scindable.

Démonstration. Considérons la suite exacte de faisceaux algébriques cohérents

$$\underline{\text{Hom}}(\mathcal{F}'', \mathcal{F}) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}(\mathcal{F}'', \mathcal{F}'') \longrightarrow 0$$

En prenant les sections globales, on obtient une surjection $\text{Hom}(\mathcal{F}'', \mathcal{F}) \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}'', \mathcal{F}'')$ ce qui permet de construire un morphisme $s : \mathcal{F}'' \longrightarrow \mathcal{F}$ tel que $g \circ s = \text{id}_{\mathcal{F}''}$ c'est-à-dire un scindage de la suite exacte ci-dessus. \square

THÉORÈME 4.17. — *Le foncteur $M \mapsto \tilde{M}$ établit une équivalence de catégories entre la catégorie des A -modules projectifs de type fini et celle des faisceaux localement libres.*

Démonstration. Rappelons qu'un A -module M est projectif s'il est facteur direct d'un module libre. Par suite, si \mathfrak{m} est un idéal maximal de A le module des germes $M_{\mathfrak{m}}$ est un module projectif sur l'anneau local $A_{\mathfrak{m}}$. Il est libre d'après le lemme ci-dessus. Ceci implique que le faisceau algébrique cohérent \tilde{M} est localement libre (*cf.* exercice 4.5).

LEMME 4.18. — *Soient A un anneau local noethérien d'idéal maximal \mathfrak{m} , de corps résiduel $K = A/\mathfrak{m}$ et M un A -module projectif de type fini sur A . Alors M est un module libre.*

Démonstration. Soient e_1, \dots, e_d des éléments de M dont les classes dans $M/\mathfrak{m}M$ forment une base de cet espace vectoriel sur K . D'après le lemme de Nakayama, ces éléments engendrent M . Ils définissent une application linéaire surjective $f : A^d \longrightarrow M$. Considérons le noyau $N = \ker f$. On a la suite exacte

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow A^d \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Mais puisque M est projectif, le foncteur $\text{Hom}(M, -)$ est exact. Donc cette suite exacte se scinde. Alors on obtient que $N \otimes_A K = N/\mathfrak{m}N$ est nul. D'après le lemme de Nakayama, N est nul. Donc f est un isomorphisme et M est un module libre. \square

Réciproquement, si \mathcal{F} est un faisceau localement libre, c'est un faisceau cohérent, et $\Gamma(\mathcal{F})$ est un A -module de type fini ; c'est donc un quotient de A^ℓ avec ℓ convenable. Par suite \mathcal{F} est un quotient d'un faisceau \mathcal{O}_X^ℓ pour ℓ convenable. D'après le lemme 4.16 c'est un facteur direct de \mathcal{O}_X^ℓ pour ℓ convenable d'après la proposition ci-dessus. Alors $\Gamma(\mathcal{F})$ est facteur direct de A^ℓ : c'est donc un A -module projectif de type fini. \square

Exercice 4.13

1. Trouver des variétés algébriques affines lisses dont le groupe de Picard n'est pas réduit à l'élément neutre. (Voir l'exercice 3.4).

2. Donner des exemples explicites de modules projectifs de type fini qui ne sont pas libres.

Joseph Le Potier

Chapitre 3

Cohomologie

L'objet principal de ce chapitre est la démonstration du théorème de finitude : si \mathcal{F} est un faisceau algébrique cohérent sur une variété algébrique projective X , l'espace vectoriel des sections de \mathcal{F} est de dimension finie. Auparavant, nous introduirons la cohomologie, dont l'intérêt est de remédier au défaut d'exactitude du foncteur sections.

1. Foncteurs dérivés

1.1. Complexes de cochaînes

On considère deux catégories abéliennes \mathcal{A} et \mathcal{B} . On dit qu'un foncteur covariant additif $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ est exact si toute suite exacte d'objets de \mathcal{A}

$$A' \longrightarrow A \longrightarrow A''$$

est transformée par F en une suite exacte

$$F(A') \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(A'')$$

Exemple

Soit $X = \text{Spec } A$ une variété algébrique affine, $A = \mathcal{O}(X)$ l'algèbre des sections du faisceau structural \mathcal{O}_X et Coh_X la catégorie des faisceaux algébriques cohérents sur X . Le foncteur $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(X, \mathcal{F})$ de la catégorie Coh_X dans la catégorie Mod_A est un foncteur exact.

On appelle *complexe de cochaînes* $K^\bullet = (K^n, d^n)$ de \mathcal{A} les données suivantes
— une suite K^n d'objets de \mathcal{A} ;

— pour tout $n \in \mathbb{Z}$ une flèche $d^n : K^n \rightarrow K^{n+1}$, appelée différentielle. Ces données doivent satisfaire à la condition suivante : $d^{n+1}d^n = 0$. L'objet

$$H^n(K^\bullet) = \ker d^n / \text{Im } d^{n-1}$$

s'appelle n -ième objet de cohomologie du complexe K^\bullet . Etant donné un foncteur covariant additif $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ de la catégorie \mathcal{A} dans la catégorie \mathcal{B} on désigne par $F(K^\bullet)$ le complexe défini par $F(K^n)$, avec pour différentielles les morphismes $F(d^n)$. Souvent, quand il n'y pas risque de confusion, la différentielle sera simplement notée d .

LEMME 1.1. — *Soit $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur additif exact. Pour tout complexe de cochaînes K^\bullet de \mathcal{A} on a un isomorphisme*

$$H^n(F(K^\bullet)) \xrightarrow{\sim} F(H^n(K^\bullet))$$

Démonstration. Soient $Z^n = \ker d^n$, et $B^n = \text{Im } d^{n-1}$. Alors $F(Z^n)$ s'identifie au noyau de $F(d^n)$ et $F(B^n)$ à l'image de $F(d^{n-1})$. En appliquant le foncteur F à la suite exacte $0 \rightarrow B^n \rightarrow Z^n \rightarrow H^n(K^\bullet) \rightarrow 0$ on obtient une suite exacte

$$0 \rightarrow F(B^n) \rightarrow F(Z^n) \rightarrow F(H^n(K^\bullet)) \rightarrow 0$$

ce qui fournit un isomorphisme canonique $H^n(F(K^\bullet)) \simeq F(H^n(K^\bullet))$. \square

On considère désormais un foncteur additif covariant, exact à gauche $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$.

Ceci signifie que toute suite exacte courte $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$ est transformée par F en une suite exacte

$$0 \rightarrow F(A') \rightarrow F(A) \rightarrow F(A'').$$

Outre le foncteur section sur la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur un espace topologique X , ou la catégorie des faisceaux algébriques sur une variété algébrique X , les exemples suivants seront souvent utiles :

Exemples

1. Sur la catégorie Mod_A des A -modules, un A -module M étant fixé, le foncteur

$$\text{Mod}_A \rightarrow \text{Mod}_A$$

défini par

$$N \mapsto \text{Hom}_A(M, N)$$

est exact à gauche. Ce foncteur est exact si M est un A -module projectif.

2. Soit X une variété algébrique, et $A = \mathcal{O}(X)$. Sur la catégorie Alg_X des faisceaux algébriques sur X , un faisceau algébrique \mathcal{F} sur X étant fixé, le foncteur à valeurs dans la catégorie des A -modules

$$\mathcal{G} \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$$

est exact à gauche.

3. Sur Alg_X , un faisceau algébrique \mathcal{F} étant fixé, le foncteur à valeurs dans Alg_X défini par

$$\mathcal{G} \mapsto \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$$

est exact à gauche. Quand \mathcal{F} est un faisceau localement libre, ce foncteur est exact.

1.2. Résolutions injectives

DÉFINITION 1.2. — *Un objet I de \mathcal{A} est appelé injectif si pour toute suite exacte de \mathcal{A}*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\phi} B$$

et tout morphisme $f : A \longrightarrow I$ il existe un morphisme $g : B \longrightarrow I$ tel que $g \circ \phi = f$.

Autrement dit, le foncteur contravariant (toujours exact à gauche) $A \mapsto \text{Hom}(A, I)$ est exact.

DÉFINITION 1.3. — *On dit que la catégorie abélienne \mathcal{A} a assez d'objets injectifs si tout objet A de \mathcal{A} se plonge dans un objet injectif : autrement dit, il existe un objet injectif I et un morphisme $A \longrightarrow I$ dont le noyau est nul.*

Nous allons donner des exemples de catégories qui ont assez d'objets injectifs.

DÉFINITION 1.4. — *Un groupe abélien G est dit divisible si pour tout entier $n \neq 0$ l'homomorphisme $G \longrightarrow G$ défini par $x \mapsto nx$ est surjectif.*

PROPOSITION 1.5. — *Dans la catégorie des groupes abéliens, tout groupe divisible est injectif.*

Démonstration. Soit G un groupe abélien divisible. Soit $A \subset B$ un sous-groupe abélien d'un groupe abélien B , et $f : A \longrightarrow G$ un homomorphisme. D'après le théorème de Zorn, il existe un sous-groupe abélien $B' \subset B$ contenant A et un homomorphisme $f' : B' \longrightarrow G$ prolongeant f , le sous-groupe B' étant maximal parmi les sous-groupes

satisfaisant à cette propriété. Montrons qu'en fait $B' = B$. Si on avait $B' \neq B$, on pourrait trouver $b \notin B'$. Considérons l'inclusion $B' \cap \mathbb{Z}b \hookrightarrow \mathbb{Z}b$. Par divisibilité, l'homomorphisme f' s'étend à $\mathbb{Z}b$ et on obtient un homomorphisme $B' + \mathbb{Z}b \longrightarrow G$ qui prolonge f' . Ceci contredit la maximalité. \square

PROPOSITION 1.6. — *La catégorie des groupes abéliens a assez d'objets injectifs.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que tout groupe abélien se plonge dans un groupe divisible. Considérons pour tout groupe abélien M le groupe \check{M} défini par

$$\check{M} = \text{Hom}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

appelé groupe dual de M . On a un accouplement naturel $\check{M} \times M \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ et par suite un homomorphisme $M \longrightarrow \check{\check{M}}$. Montrons que cet homomorphisme est injectif : si $a \in M$ est non nul, il existe évidemment un homomorphisme $f : \mathbb{Z}a \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tel que $f(a) \neq 0$; du fait que \mathbb{Q}/\mathbb{Z} est un groupe divisible, on voit qu'il existe un homomorphisme $f : M \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tel que $f(a) \neq 0$.

Supposons que M soit un groupe libre. Alors \check{M} est un produit de groupes isomorphes à \mathbb{Q}/\mathbb{Z} et donc encore divisible. Dans le cas général, le groupe \check{M} est quotient d'un groupe libre L : il suffit de considérer le groupe abélien libre engendré par \check{M} . Alors on obtient la suite exacte

$$0 \longrightarrow \check{\check{M}} \longrightarrow \check{L}.$$

Ainsi, M se plonge dans \check{L} qui est un groupe divisible. \square

PROPOSITION 1.7. — *Soit A un anneau commutatif et unitaire. La catégorie Mod_A des A -modules a assez d'objets injectifs.*

Démonstration. Pour tout A -module M on introduit encore le module

$$\check{M} = \text{Hom}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

muni de la structure de A -modules définie par

$$(a.f)(x) = f(ax)$$

pour $f \in \check{M}, x \in M$ et $a \in A$. On sait que M se plonge dans $\check{\check{M}}$. D'autre part, $\check{\check{M}}$ est un A -module injectif : il suffit de vérifier que l'on a un isomorphisme de A -modules

$$\check{M} = \text{Hom}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_A(M, \check{\check{M}})$$

Mais si $f \in \check{M}$, on peut lui associer l'application $\tilde{f} : M \longrightarrow \check{A}$ définie pour $x \in M$ par $\tilde{f}(x)(a) = f(ax)$. Cette application \tilde{f} est A -linéaire : car pour $b \in A$, on a $\tilde{f}(bx)(a) = f(abx) = \tilde{f}(x)(ab) = (b \cdot \tilde{f}(x))(a)$. L'application $f \mapsto \tilde{f}$ est A -linéaire, et évidemment injective. Vérifions qu'elle est surjective : si $g \in \text{Hom}_A(M, \check{A})$, on lui associe l'application $f : M \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ définie par $f(x) = g(x)(1)$. On vérifie sans difficulté que $\tilde{f} = g$.

Il reste à vérifier que tout A -module se plonge dans un A -module injectif. La démonstration est identique à celle qui a été donnée pour les groupes abéliens, après avoir constaté qu'un produit de A -modules injectifs est encore un A -module injectif. \square

Exercice 1.1

Montrer qu'un A -module M est injectif si et seulement si pour tout idéal $\mathfrak{a} \subset A$, toute application A -linéaire $f : \mathfrak{a} \longrightarrow M$ s'étend à A . (On pourra calquer la démonstration de la proposition 1.5).

PROPOSITION 1.8. — (i) *La catégorie Ab_X de faisceaux abéliens sur un espace topologique X a assez d'objets injectifs.*

(ii) *La catégorie des faisceaux algébriques Alg_X sur une variété algébrique X a assez d'objets injectifs.*

Démonstration. Considérons un faisceau \mathcal{F} de groupes abéliens sur un espace topologique X , et désignons par $I(\mathcal{F}_x)$ le groupe injectif canonique dans lequel on a plongé le groupe abélien \mathcal{F}_x . Considérons le faisceau

$$I(\mathcal{F})(U) = \prod_{x \in U} I(\mathcal{F}_x)$$

On a alors un morphisme injectif $\mathcal{F} \longrightarrow I(\mathcal{F})$. De plus, on a pour tout faisceau de groupes abéliens \mathcal{G}

$$\text{Hom}(\mathcal{G}, I(\mathcal{F})) = \prod_{x \in X} \text{Hom}(\mathcal{G}_x, I(\mathcal{F}_x)).$$

En effet, un morphisme $f : \mathcal{G} \longrightarrow I(\mathcal{F})$ détermine évidemment pour tout $x \in X$ un homomorphisme $f_x : \mathcal{G}_x \longrightarrow I(\mathcal{F}_x)$, et l'application $f \mapsto (f_x)_{x \in X}$ est injective. Vérifions la surjectivité : si $(f_x)_{x \in X}$ est une famille d'homomorphismes $\mathcal{G}_x \longrightarrow I(\mathcal{F}_x)$ et U un ouvert de X , on pose pour $s \in \mathcal{G}(U)$,

$$f(s) = (f_x(s_x))_{x \in U}$$

ce qui définit un morphisme $\mathcal{G} \longrightarrow I(\mathcal{F})$. Il en résulte que $I(\mathcal{F})$ est un objet injectif de Ab_X . Pour la catégorie Alg_X des faisceaux algébriques sur une variété algébrique X le raisonnement est exactement le même. \square

DÉFINITION 1.9. — Soient K^\bullet et L^\bullet deux complexes de cochaînes. Un morphisme de complexes est une famille $f = (f^i)$ de morphismes $f^i : K^i \longrightarrow L^i$ telle que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} K^i & \xrightarrow{d} & K^{i+1} \\ f^i \downarrow & & \downarrow f^{i+1} \\ L^i & \xrightarrow{d} & L^{i+1} \end{array}$$

soient commutatifs.

Un tel morphisme induit en cohomologie un morphisme

$$H^i(K^\bullet) \longrightarrow H^i(L^\bullet).$$

Une suite de complexes de \mathcal{A}

$$0 \longrightarrow K^\bullet \longrightarrow L^\bullet \longrightarrow R^\bullet \longrightarrow 0$$

est une suite exacte courte si, en tout degré i , la suite induite

$$0 \longrightarrow K^i \longrightarrow L^i \longrightarrow R^i \longrightarrow 0$$

est exacte. Si c'est le cas, on peut lui associer une suite exacte longue en cohomologie

$$\dots \longrightarrow H^i(L^\bullet) \longrightarrow H^i(R^\bullet) \longrightarrow H^{i+1}(K^\bullet) \longrightarrow \dots$$

Dans cette suite exacte, le morphisme $\delta : H^i(R^\bullet) \longrightarrow H^{i+1}(K^\bullet)$ est appelé morphisme de liaison ou de connexion. On dit qu'un morphisme de complexes $f : K^\bullet \longrightarrow L^\bullet$ est un *quasi-isomorphisme* si le morphisme induit en cohomologie est un isomorphisme. On dit aussi que (f, L^\bullet) est une *résolution* de K^\bullet .

DÉFINITION 1.10. — Soient f et $g : K^\bullet \longrightarrow L^\bullet$ deux morphismes de complexes de cochaînes. On dit que f et g sont *homotopes* s'il existe une famille de morphismes $h^i : K^i \longrightarrow L^{i-1}$ tels que

$$f^i - g^i = dh^i + h^{i+1}d$$

Cohomologie

Les morphismes sont composés suivant le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 & K^i & \xrightarrow{d} & K^{i+1} \\
 & \swarrow h^i & & \swarrow h^{i+1} \\
 L^{i-1} & \xrightarrow{d} & L^i &
 \end{array}$$

La famille $h = (h^i)$ est appelée une homotopie entre f et g . La terminologie provient du concept d'homotopie introduit de manière usuelle en topologie algébrique. Si les morphismes f et g sont homotopes, ils induisent le même morphisme en cohomologie. En particulier, si f est homotope au morphisme nul, le morphisme induit en cohomologie est nul. La réciproque n'est vraie qu'avec des hypothèses supplémentaires. On considère ici des complexes K^\bullet nuls en degrés négatifs. On dira parfois qu'un tel complexe est positif.

DÉFINITION 1.11. — *Un complexe K^\bullet d'objets de \mathcal{A} est dit exact si $H^i(K^\bullet) = 0$ pour tout i .*

LEMME 1.12. — *Soit $f : K^\bullet \longrightarrow L^\bullet$ un morphisme de complexes nuls en degrés négatifs. On suppose que*

- (i) *tout objet L^i est injectif ;*
- (ii) *le complexe K^\bullet est exact.*

Alors f est homotope à 0.

Démonstration. On construit l'homotopie h^i par récurrence sur i . Supposons construit h^i de sorte que la formule d'homotopie soit vraie en degré $\leq i - 1$ et considérons le morphisme $g^i = f^i - dh^i$. Ce morphisme s'annule sur $\text{Im } d = \ker d$ et par conséquent, compte-tenu de l'injectivité de L^i se factorise suivant le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 & K^i & \xrightarrow{d} & K^{i+1} \\
 & \swarrow h^i & \downarrow g^i & \swarrow h^{i+1} \\
 L^{i-1} & \xrightarrow{d} & L^i &
 \end{array}$$

en un morphisme $h^{i+1} : K^{i+1} \longrightarrow L^i$. Par définition, on a la formule d'homotopie $f^i = dh^i + h^{i+1}d$. Ceci achève la construction. \square

Un objet A de \mathcal{A} définit un complexe \underline{A} dont tous les termes sont nuls, sauf en degré 0 où on pose $\underline{A}^0 = A$. Souvent ce complexe sera simplement noté A . Une *résolution* de A est un morphisme de complexes positifs

$$\epsilon : \underline{A} \longrightarrow R^\bullet$$

induisant un isomorphisme en cohomologie. Ceci signifie donc que pour tout $i > 0$, on a $H^i(R^\bullet) = 0$, et que le morphisme $\epsilon : A \longrightarrow R^0$, dit morphisme d'augmentation, identifie A au noyau de la différentielle $d : R^0 \longrightarrow R^1$. Si les objets R^i sont des objets injectifs, on dit que la résolution est injective.

PROPOSITION 1.13. — *On suppose que la catégorie abélienne \mathcal{A} a assez d'objets injectifs.*

- (i) *Tout objet A de \mathcal{A} a une résolution injective $\epsilon : A \longrightarrow R^\bullet$.*
- (ii) *Soit $\epsilon : A \longrightarrow R^\bullet$ un morphisme de A dans un complexe d'objets injectifs. Pour toute résolution $A \longrightarrow K^\bullet$ de A , il existe un morphisme de complexes $f : K^\bullet \longrightarrow R^\bullet$ rendant commutatif le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & K^\bullet \\ & \searrow \epsilon & \downarrow f \\ & & R^\bullet \end{array}$$

Deux tels morphismes sont homotopes.

Démonstration. (i) Puisque \mathcal{A} a assez d'objets injectifs, on peut plonger A dans un objet injectif R^0 . On considère alors le quotient R^0/A qu'on plonge à nouveau dans un objet injectif R^1 , et ainsi de suite ; ceci définit une résolution injective $\epsilon : A \longrightarrow R^\bullet$.

(ii) On construit f^q par récurrence sur q . Le morphisme f^0 se construit en utilisant la propriété d'injectivité de R^0 . Supposons f^q construit, et considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K^{q-1} & \xrightarrow{d} & K^q \\ & & \downarrow f^q \\ & & R^q \xrightarrow{d} R^{q+1} \end{array}$$

Le morphisme $df^q : K^q \longrightarrow R^{q+1}$ s'annule sur $\text{Im } d = \ker d$, donc se factorise à travers l'image de la différentielle $d : K^q \longrightarrow K^{q+1}$. L'injectivité de R^{q+1} permet de factoriser df^q sous la forme $f^{q+1}d$, où f^{q+1} est un morphisme $K^{q+1} \longrightarrow R^{q+1}$. Considérons maintenant deux morphismes f et $g : K^\bullet \longrightarrow R^\bullet$ comme ci-dessus. Considérons le complexe K^\bullet/A défini par $(K/A)^n = K^n$ pour $n > 0$, et $(K/A)^0 = K^0/A$. Alors $f - g$ se factorise en un morphisme de complexes

$$K^\bullet/A \longrightarrow R^\bullet$$

et ce morphisme est homotope à 0 d'après le lemme 1.12. D'où l'énoncé. \square

1.3. Foncteurs dérivés droits

Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} deux catégories abéliennes ; on suppose que \mathcal{A} possède assez d'objets injectifs. Soit $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un foncteur covariant additif. On suppose choisie une fois pour toutes pour tout objet A de \mathcal{A} une résolution injective $A \longrightarrow R_A^\bullet$. On pose

$$R^q F(A) = H^q(F(R_A^\bullet)).$$

Soit $A \longrightarrow B$ un morphisme de \mathcal{A} . D'après l'assertion (ii) de la proposition 1.13, on peut relever le morphisme f en un morphisme de complexes $g : R_A^\bullet \longrightarrow R_B^\bullet$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & R_A^\bullet \\ \downarrow f & & \downarrow g \\ B & \longrightarrow & R_B^\bullet \end{array}$$

De plus, le morphisme g est déterminé de manière unique à homotopie près. On obtient alors un morphisme

$$R^q F(A) \longrightarrow R^q F(B)$$

indépendant du choix de g . Le foncteur $A \mapsto R^q F(A)$ est appelé le q -ième foncteur dérivé droit de F .

LEMME 1.14. — *Soit $\epsilon : A \longrightarrow R^\bullet$ une résolution injective de A . Alors le morphisme canonique*

$$H^q(F(R^\bullet)) \longrightarrow R^q F(A)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. D'après la proposition 1.13, il existe un morphisme $f : R^\bullet \longrightarrow R_A^\bullet$ compatible avec les morphismes d'augmentation, et inversible à homotopie près. Alors le morphisme de complexes $F(f) : F(R^\bullet) \longrightarrow F(R_A^\bullet)$ est lui aussi inversible à homotopie près. Donc il induit un isomorphisme en cohomologie. \square

Pour $q = 0$, on dispose d'un morphisme fonctoriel $F \longrightarrow R^0F$.

THÉORÈME 1.15. — (i) *Si le foncteur F est exact à gauche, le morphisme fonctoriel $F \longrightarrow R^0F$ est un isomorphisme.*

(ii) *A toute suite exacte $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ d'objets de \mathcal{A} , est associée une suite exacte longue*

$$\dots \longrightarrow R^qF(A') \longrightarrow R^qF(A) \longrightarrow R^qF(A'') \xrightarrow{\delta} R^{q+1}F(A') \longrightarrow \dots$$

Etant donné un morphisme de suites exactes d'objets de \mathcal{A}

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

le diagramme

$$\begin{array}{ccc} R^qF(A'') & \xrightarrow{\delta} & R^{q+1}F(A') \\ \downarrow & & \downarrow \\ R^qF(B'') & \xrightarrow{\delta} & R^{q+1}F(B') \end{array}$$

est commutatif.

(iii) *Pour tout objet injectif I de \mathcal{A} , on a $R^qF(I) = 0$ pour tout $q > 0$.*

La propriété (ii) signifie que la suite exacte longue associée à la suite exacte courte $0 \longrightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \longrightarrow 0$ dépend fonctoriellement de cette suite exacte.

Démonstration. (i) Soit $\epsilon : A \longrightarrow R^\bullet$ la résolution injective choisie. On a alors une suite exacte $0 \longrightarrow A \longrightarrow R^0 \longrightarrow R^1$. En appliquant le foncteur exact à gauche F

on obtient une suite exacte $0 \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(R^0) \longrightarrow F(R^1)$, d'où l'isomorphisme $F(A) \simeq R^0 F(A)$.

(ii) Soit $0 \longrightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \longrightarrow 0$ une suite exacte d'objets de \mathcal{A} . Considérons les deux résolutions injectives R'^{\bullet} et R''^{\bullet} choisies pour A' et A'' . On peut alors construire une résolution injective $A \longrightarrow R^{\bullet}$ en posant $R^q = R'^q \oplus R''^q$; la différentielle est construite par récurrence sur q . Commençons par le morphisme d'augmentation. Le morphisme $\epsilon : A' \longrightarrow R'^0$ s'étend à A en un morphisme $\eta : A \longrightarrow R^0$ par la propriété d'injectivité de R'^0 . On obtient alors un morphisme $\epsilon = (\eta, \epsilon''g) : A \longrightarrow R^0 = R'^0 \oplus R''^0$ qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & R'^0 & \longrightarrow & R^0 & \longrightarrow & R''^0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow \epsilon' & & \uparrow \epsilon & & \uparrow \epsilon'' & & \\
 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{f} & A & \xrightarrow{g} & A'' & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

On obtient alors une suite exacte des conoyaux des flèches verticales. On peut alors recommencer la construction avec la suite exacte des conoyaux, ce qui définit la différentielle $d^0 : R^0 \longrightarrow R^1$. Ainsi de suite. Remarquons que le morphisme canonique $R^{\bullet} \longrightarrow R^{\bullet}_A$ induit un isomorphisme $H^q(F(R^{\bullet})) \longrightarrow R^q F(A)$ d'après le lemme 1.14. La suite exacte de complexes

$$0 \longrightarrow F(R'^{\bullet}) \longrightarrow F(R^{\bullet}) \longrightarrow F(R''^{\bullet}) \longrightarrow 0$$

fournit par passage à la cohomologie la suite exacte longue attendue; le morphisme $\delta : R^q F(A'') \longrightarrow R^{q+1} F(A')$ est le morphisme de liaison associé. Pour vérifier que cette suite exacte est fonctorielle, considérons une suite exacte comme ci-dessus $0 \longrightarrow S'^{\bullet} \longrightarrow S^{\bullet} \longrightarrow S''^{\bullet} \longrightarrow 0$ associée à des résolutions injectives $B' \longrightarrow S'^{\bullet}$ et $B'' \longrightarrow S''^{\bullet}$. Il suffit de constater qu'on peut trouver un morphisme $R'^0 \longrightarrow S'^0$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\eta} & R'^0 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 B & \xrightarrow{\eta} & S'^0
 \end{array}$$

où les morphismes η sont construits comme ci-dessus . Mais ceci résulte de l'injectivité de S^0 . Dès lors, il est possible de construire un morphisme de suites exactes courtes de complexes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & R'^{\bullet} & \longrightarrow & R^{\bullet} & \longrightarrow & R''^{\bullet} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & S'^{\bullet} & \longrightarrow & S^{\bullet} & \longrightarrow & S''^{\bullet} \longrightarrow 0 \end{array}$$

ce qui donne, en appliquant le foncteur F un diagramme commutatif de complexes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & F(R'^{\bullet}) & \longrightarrow & F(R^{\bullet}) & \longrightarrow & F(R''^{\bullet}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & F(S'^{\bullet}) & \longrightarrow & F(S^{\bullet}) & \longrightarrow & F(S''^{\bullet}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

ce qui conduit à la functorialité annoncée. La propriété (iii) est évidente d'après le lemme 1.14. \square

Exemples

1) Soit A un anneau commutatif et unitaire, et M un A -module fixé. Les foncteurs dérivés droits du foncteur $N \mapsto \text{Hom}_A(M, N)$ s'appellent les foncteurs $\text{Ext}_A^q(M, N)$. Ces foncteurs peuvent aussi en fait se calculer en prenant une résolution projective de M , quand il en existe (cf. exercice 2.1).

DÉFINITION 1.16. — *Dans une catégorie abélienne \mathcal{A} un objet P est dit projectif si le foncteur $M \mapsto \text{Hom}(P, M)$ est exact.*

Dans la catégorie Mod_A des modules sur un anneau A les modules projectifs sont ceux qui sont facteurs directs des modules libres.

PROPOSITION 1.17. —

(i) *Si M est un module projectif, ou si N est un module injectif, on a $\text{Ext}_A^q(M, N) = 0$ pour $q > 0$.*

(ii) *Soit $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ une suite exacte de A -modules. Alors on a la suite exacte*

$$\dots \longrightarrow \text{Ext}_A^q(M'', N) \longrightarrow \text{Ext}_A^q(M, N) \longrightarrow \text{Ext}_A^q(M', N) \longrightarrow \text{Ext}_A^{q+1}(M'', N) \longrightarrow \dots$$

Démonstration. (i) Si M est un module projectif, le foncteur $N \mapsto \text{Hom}(M, N)$ est exact. Par conséquent, si $N \longrightarrow R^\bullet$ est une résolution injective de N , on obtient que le morphisme $\text{Hom}(M, N) \longrightarrow \text{Hom}(M, R^\bullet)$ est une résolution. D'où l'assertion (i).

(ii) Etant donnée une résolution injective $N \longrightarrow R^\bullet$ de N , on obtient la suite exacte de complexes

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(M'', R^\bullet) \longrightarrow \text{Hom}(M, R^\bullet) \longrightarrow \text{Hom}(M', R^\bullet) \longrightarrow 0$$

d'où découle la suite exacte longue de l'énoncé en prenant la cohomologie.

Exercice 1.2

Démontrer qu'un A -module N est injectif si et seulement si pour tout idéal de type fini \mathfrak{a} de A on a $\text{Ext}_A^1(A/\mathfrak{a}, N) = 0$.

2) Soit X une variété algébrique, $A = \mathcal{O}(X)$ l'algèbre des fonctions régulières sur X et Alg_X la catégorie des faisceaux algébriques sur X . On sait que cette catégorie a assez de faisceaux injectifs. Considérons le foncteur $F : \text{Alg}_X \longrightarrow \text{Mod}_X$ qui associe au faisceau algébrique \mathcal{F} le A -module $\Gamma(X, \mathcal{F})$ des sections globales de \mathcal{F} . Les foncteurs dérivés droits de F s'appellent les modules de cohomologie et sont notés $H^q(X, \mathcal{F})$. Un faisceau algébrique \mathcal{F} étant fixé, les foncteurs dérivés droits du foncteur exact à gauche $\mathcal{G} \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ s'appellent les foncteurs $\text{Ext}_{\mathcal{O}}^q(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. On peut aussi définir les foncteurs $\underline{\text{Ext}}_{\mathcal{O}}^q(\mathcal{F}, \mathcal{G})$: ce sont les foncteurs dérivés droits $\text{Alg}_X \longrightarrow \text{Alg}_X$ du foncteur $\mathcal{G} \mapsto \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$.

Exercice 1.3

1. Vérifier que si \mathcal{F} et \mathcal{G} sont des faisceaux algébriques cohérents on a pour tout point $x \in X$

$$\underline{\text{Ext}}_{\mathcal{O}}^q(\mathcal{F}, \mathcal{G})_x = \text{Ext}_{\mathcal{O}_{X,x}}^q(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x).$$

2. Démontrer que si \mathcal{F} et \mathcal{G} sont des faisceaux algébriques cohérents, il en est de même des faisceaux algébriques $\underline{\text{Ext}}_{\mathcal{O}}^q(\mathcal{F}, \mathcal{G})$.

3) Soit X un espace topologique, et Ab_X la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur X . Les foncteurs dérivés du foncteur section $\mathcal{F} \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F})$ s'appellent encore les groupes de cohomologie de X à valeurs dans \mathcal{F} et sont encore notés $H^q(X, \mathcal{F})$. Lorsque X est une variété algébrique et \mathcal{F} un faisceau algébrique, ces groupes abéliens sont munis d'une structure naturelle de $\mathcal{O}(X)$ -modules ; nous verrons en effet dans la section suivante que ces groupes abéliens $H^q(X, \mathcal{F})$ coïncident avec les modules de cohomologie définis en 2).

1.4. Foncteurs dérivés gauches

Un complexe de chaînes K_\bullet est une suite K_i d'objets de \mathcal{A} et de différentielles $d_i : K_i \longrightarrow K_{i-1}$ telles que $d_i d_{i+1} = 0$. L'objet $H_i(K_\bullet) = \ker d_i / \text{Im } d_{i+1}$ s'appelle homologie de K_\bullet en degré i . Etant donné un objet $M \in \mathcal{A}$ une résolution projective de M est la donnée d'un complexe d'objets projectifs P_\bullet , nul en degrés négatifs, et d'un morphisme d'augmentation $\epsilon : P_\bullet \longrightarrow M$ qui est un quasi-isomorphisme, c'est-à-dire qu'il induit un isomorphisme en homologie. On dit qu'une catégorie \mathcal{A} a assez d'objets projectifs si tout objet est quotient d'un objet projectif. Si $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ est un foncteur additif covariant, et si \mathcal{A} a assez d'objets projectifs, on définit la notion de foncteurs dérivés à gauche en choisissant une résolution projective $P_\bullet \longrightarrow M$ de M et en posant

$$L_q F(M) = H_q(F(P_\bullet)).$$

Ces foncteurs sont surtout intéressants pour les foncteurs exacts à droite. Dans ce cas, le morphisme d'augmentation naturel $L_0 F \longrightarrow F$ est un isomorphisme. On peut écrire pour les foncteurs dérivés gauche un énoncé analogue au théorème 1.15. En particulier, à toute suite exacte $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ d'objets de \mathcal{A} est associée une suite exacte longue

$$\dots \longrightarrow L_q F(M') \longrightarrow L_q F(M) \longrightarrow L_q F(M'') \longrightarrow L_{q-1} F(M') \longrightarrow \dots$$

qui dépend fonctoriellement de la suite exacte donnée $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$.

Exemple

Soit M un A -module. Sur la catégorie des A -modules, les foncteurs

$$\text{Mod}_A \mapsto \text{Mod}_A$$

définis par $N \mapsto M \otimes_A N$ sont exacts à droite. Les foncteurs dérivés gauche s'appellent $\text{Tor}_i^A(M, N)$.

2. Le théorème de de Rham formel

2.1. Résolutions par des complexes d'objets acycliques

On considère un foncteur covariant additif exact à gauche $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ d'une catégorie abélienne \mathcal{A} possédant assez d'objets injectifs dans une catégorie abélienne \mathcal{B} . La notion de foncteurs dérivés droits a donc un sens pour le foncteur F .

Cohomologie

DÉFINITION 2.1. — Soit A un objet de \mathcal{A} . On dit que A est F -acyclique si $R^q F(A) = 0$ pour $q > 0$.

Les objets injectifs sont des objets F -acycliques.

THÉORÈME 2.2. — Soit $A \longrightarrow K^\bullet$ une résolution de A par un complexe d'objets acycliques. Alors le morphisme canonique

$$H^q(F(K^\bullet)) \longrightarrow R^q F(A)$$

est un isomorphisme.

Ainsi, on peut choisir pour calculer les foncteurs dérivés droits de F une résolution par des objets acycliques au lieu d'une résolution injective. Le morphisme de l'énoncé est défini de la manière suivante : considérons la résolution injective $A \longrightarrow R_A^\bullet$ choisie une fois pour toute pour définir les foncteurs dérivés ; on a alors un morphisme $f : K^\bullet \longrightarrow R_A^\bullet$ bien défini à homotopie près rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & K^\bullet \\ & \searrow & \downarrow f \\ & & R_A^\bullet \end{array}$$

On en déduit un morphisme de complexes $F(K^\bullet) \longrightarrow F(R_A^\bullet)$ bien défini à homotopie près. Le morphisme induit en cohomologie est le morphisme

$$H^q(F(K^\bullet)) \longrightarrow R^q F(A)$$

de l'énoncé.

LEMME 2.3. — Soit K^\bullet un complexe positif d'objets acycliques. Si K^\bullet est exact, le complexe $F(K^\bullet)$ est exact.

Démonstration. Soit $Z^i = \ker K^i \longrightarrow K^{i+1}$. Puisque K^i est acyclique, la suite exacte longue des foncteurs dérivés appliquée aux suites exactes

$$0 \longrightarrow Z^{i-1} \longrightarrow K^{i-1} \longrightarrow Z^i \longrightarrow$$

fournissent des isomorphismes $R^q F(Z^i) \xrightarrow{\sim} R^{q+1} F(Z^{i-1})$ pour tout i et $q > 0$. Par suite $R^q F(Z^i) \xrightarrow{\sim} R^{q+i} F(Z^0) = 0$. Il en résulte les suites exactes pour tout i

$$0 \longrightarrow F(Z^i) \longrightarrow F(K^i) \longrightarrow F(Z^{i+1}) \longrightarrow 0$$

ce qui entraîne que le complexe $F(K^\bullet)$ est exact. \square

LEMME 2.4. — *Soit $f : K^\bullet \longrightarrow L^\bullet$ un quasi-isomorphisme de complexes positifs d'objets acycliques. Alors le morphisme de complexes $F(K^\bullet) \longrightarrow F(L^\bullet)$ est un quasi-isomorphisme.*

Démonstration. On introduit le complexe M^\bullet suivant, appelé mapping-cône de f , ou plus simplement le cône de f , défini par $M^i = L^i \oplus K^{i+1}$ avec pour différentielle $d : M^i \longrightarrow M^{i+1}$ le morphisme donné par la matrice

$$d = \begin{pmatrix} d & f^{i+1} \\ 0 & -d \end{pmatrix}$$

Considérons le complexe $K[1]^\bullet$ décalé de K^\bullet défini par $K[1]^i = K^{i+1}$, de différentielle $-d$. On a alors une suite exacte courte de complexes

$$0 \longrightarrow L^\bullet \longrightarrow M^\bullet \longrightarrow K[1]^\bullet \longrightarrow 0$$

et le morphisme de liaison associé $H^q(K[1]^\bullet) \longrightarrow H^{q+1}(L^\bullet)$ est le morphisme induit en cohomologie par f . L'hypothèse implique que le complexe M^\bullet est exact. Puisque les objets de M sont acycliques, il résulte du lemme 2.3 que le complexe $F(M^\bullet)$ est exact. Mais ce complexe est évidemment le cône du morphisme $F(f)$. La suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte

$$0 \longrightarrow F(L)^\bullet \longrightarrow F(M)^\bullet \longrightarrow F(K)[1]^\bullet \longrightarrow 0$$

montre que le morphisme de complexes $F(f) : F(K)^\bullet \longrightarrow F(L)^\bullet$ est un quasi-isomorphisme. \square

Démonstration du théorème 2.2

Il suffit d'appliquer le lemme 2.4 au morphisme $K^\bullet \longrightarrow R_A^\bullet$.

Exercice 2.1

Soit \mathcal{C} une catégorie abélienne possédant suffisamment d'objets injectifs. Soit $P_\bullet \longrightarrow M$ une résolution de M . On considère le complexe de cochaînes $\text{Hom}(P_\bullet, M)$. On se propose de montrer que dans certaines conditions, on a un isomorphisme

$$\text{Ext}^q(M, N) \xrightarrow{\sim} H^q(\text{Hom}(P_\bullet, N)).$$

On considère la sous-catégorie pleine \mathcal{A} de \mathcal{C} des objets N tels que $\text{Ext}^q(P_i, N) = 0$ pour $i \geq 0$ et $q > 0$. On pose pour tout objet N de \mathcal{A}

$$S^q(N) = H^q(\text{Hom}(P_\bullet, N))$$

On obtient ainsi un foncteur covariant sur la catégorie \mathcal{A} .

1. Vérifier que le morphisme canonique $\text{Hom}(M, N) \longrightarrow S^0(N)$ est un isomorphisme.

2. On considère une suite exacte $0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$. Démontrer si N' et N sont des objets de \mathcal{A} , il en est de même de N'' . Dans ces conditions, à cette suite exacte courte on peut associer une suite exacte longue de groupes abéliens

$$\dots \longrightarrow S^q(N') \longrightarrow S^q(N) \longrightarrow S^q(N'') \longrightarrow S^{q+1}(N'') \longrightarrow \dots$$

3. Montrer que si N est injectif, $S^q(N) = 0$ pour $q > 0$. Construire par récurrence sur q un isomorphisme pour tout objet N de \mathcal{A} canonique

$$\text{Ext}^q(M, N) \xrightarrow{\sim} S^q(N)$$

On pourra plonger N dans un objet injectif.

Si $P_\bullet \longrightarrow M$ est une résolution projective, tout objet de \mathcal{C} appartient à \mathcal{A} . Ainsi, les foncteurs $\text{Ext}^q(M, N)$ peuvent se calculer indépendamment à partir soit d'une résolution injective de N , soit d'une résolution projective de M .

2.2. Résolutions flasques

Considérons sur un espace topologique X , le foncteur $\text{Ab}_X \longrightarrow \text{Ab}$ de la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur X dans celle des groupes abéliens, qui associe à un faisceau \mathcal{F} le groupe abélien $\Gamma(X, \mathcal{F})$ des sections de \mathcal{F} ; les foncteurs dérivés sont notés $H^q(X, \mathcal{F})$.

DÉFINITION 2.5. — *Un faisceau de groupes abéliens est appelé un faisceau flasque si pour tout ouvert $U \subset X$ le morphisme de restriction $\mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$ est surjectif.*

PROPOSITION 2.6. — Soit un faisceau flasque de groupes abéliens sur un espace topologique X . Alors $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$ pour $q > 0$.

Démonstration. Il est clair que les faisceaux injectifs qui figurent dans la résolution injective canonique sont flasques. On est ramené à prouver l'énoncé suivant :

LEMME 2.7. — Soit

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{f} \mathcal{F} \xrightarrow{g} \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$

une suite exacte de faisceaux de groupes abéliens sur X . On suppose que \mathcal{F}' et \mathcal{F} sont flasques. Alors :

- (1) le morphisme $\Gamma(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}'')$ associé à g est surjectif ;
- (2) le faisceau \mathcal{F}'' est flasque.

Démonstration. Vérifions (1). Soit $s'' \in \Gamma(X, \mathcal{F}'')$. Considérons les couples (U, s) formés d'un ouvert de X et d'une section $s \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ tels que $g(s) = s''|_U$. Ces couples sont ordonnés de manière évidente ; par le théorème de Zorn, on peut trouver un tel couple maximal. Montrons qu'alors $U = X$. Sinon, on pourrait trouver un point $x \in X$ n'appartenant pas à U , et une section locale $t \in \Gamma(V, \mathcal{F})$ sur un voisinage ouvert V , de x telle que $g(t) = s''|_V$. Sur l'ouvert $W = U \cap V$ la section $s - t$ est l'image par f d'une section s' de \mathcal{F}' ; puisque \mathcal{F}' est flasque, cette section est la restriction d'une section notée encore s' définie sur X . Sur l'ouvert W , on a l'égalité $s - f(s') = t$ ce qui montre qu'il existe une section \tilde{s} de \mathcal{F} sur $U_1 = U \cup V$ qui coïncide avec $s - f(s')$ sur U : on a alors $g(\tilde{s}) = s''|_{U_1}$. Ceci contredit la maximalité de (U, s) .

L'assertion (1) est aussi valable sur tout ouvert de X . L'assertion (2) résulte maintenant trivialement du diagramme commutatif pour tout ouvert $U \subset X$

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(X, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathcal{F}'') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma(U, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \Gamma(U, \mathcal{F}'') \end{array}$$

dans lequel les flèches horizontales sont surjectives, ainsi que la première flèche verticale puisque \mathcal{F} est flasque. Donc la deuxième flèche verticale est elle aussi surjective. \square

Il résulte du théorème de de Rham formel que pour calculer les groupes de cohomologie d'un faisceau de groupes abéliens, on peut utiliser une résolution flasque au lieu d'une résolution injective.

LEMME 2.8. — Soit X une variété algébrique, et \mathcal{J} un faisceau injectif dans la catégorie Alg_X des faisceaux algébriques. Alors le faisceau \mathcal{J} est flasque.

Démonstration. Considérons pour tout ouvert $U \subset X$ le faisceau $j_!(\mathcal{O}_U)$ défini par le faisceau associé au préfaisceau qui associe à tout ouvert $V \subset U$ le module $\mathcal{O}(V)$, et 0 à un ouvert non contenu dans U . Ce faisceau algébrique a pour support l'ouvert U , et sa restriction à U est exactement \mathcal{O}_U . Pour tout faisceau algébrique \mathcal{F} on a alors un isomorphisme canonique :

$$\text{Hom}(j_!(\mathcal{O}_U), \mathcal{F}) \simeq \Gamma(U, \mathcal{F}).$$

Puisque le faisceau $j_!(\mathcal{O}_U)$ est un sous-faisceau algébrique de \mathcal{O}_X on voit que si \mathcal{F} est injectif, le morphisme de restriction $\Gamma(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{F})$ est surjectif. Ainsi, le faisceau \mathcal{F} est flasque. \square

COROLLAIRE 2.9. — Soit X une variété algébrique X , et \mathcal{F} un faisceau algébrique. Soit \mathcal{F}_{ab} le faisceau de groupes abéliens sous-jacent à \mathcal{F} . Alors

$$H^q(X, \mathcal{F}) \simeq H^q(X, \mathcal{F}_{\text{ab}})$$

Démonstration. Une résolution injective $\mathcal{F} \longrightarrow \mathbf{R}^\bullet$ dans la catégorie Alg_X fournit une résolution flasque

$$\mathcal{F}_{\text{ab}} \longrightarrow \mathbf{R}_{\text{ab}}^\bullet$$

qui permet le calcul de $H^q(X, \mathcal{F}_{\text{ab}})$ d'après le théorème de de Rham formel. D'où l'énoncé. \square

Exercice 2.2

Soit X un espace topologique, et \mathcal{J} un faisceau injectif dans la catégorie Ab_X des faisceaux de groupes abéliens sur X . Démontrer que \mathcal{J} est flasque.

2.3. Résolutions fines

Cette section illustre le théorème de de Rham formel et justifie la terminologie employée. Elle ne sera pas utilisée dans la suite sauf dans l'exercice 4.2.

Les faisceaux fins sont des faisceaux d'espaces vectoriels sur lesquels on peut faire agir des partitions de l'unité afin de recoller des sections locales. Nous nous contentons d'étudier un exemple qui justifie la terminologie utilisée. Pour plus de détails, on peut consulter le livre de Godement, Théorie des faisceaux (Hermann, 1964).

Soit X une variété différentielle de classe C^∞ , dénombrable à l'infini, et \mathcal{C}_X^∞ le faisceau en algèbres des fonctions différentiables sur X . Si \mathcal{F} est un faisceau de modules sur \mathcal{C}_X^∞ -modules, la cohomologie $H^q(X, \mathcal{F})$ est un module sur l'algèbre des fonctions C^∞ qu'on

peut calculer à partir d'une résolution injective de \mathcal{F} dans la catégorie des faisceaux de modules sur \mathcal{C}_X^∞ : cette catégorie a en effet assez d'injectifs. Comme ci-dessus, on pourrait aussi oublier la structure de \mathcal{C}_X^∞ -modules pour calculer ces modules de cohomologie. En fait, sauf en degré 0, les modules $H^q(X, \mathcal{F})$ sont tous triviaux :

LEMME 2.10. — *Pour tout faisceau de modules sur \mathcal{F} sur \mathcal{C}_X^∞ on a pour $q > 0$*

$$H^q(X, \mathcal{F}) = 0.$$

Démonstration. Il suffit de vérifier que le foncteur section $\mathcal{F} \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F})$ est exact sur la catégorie des faisceaux de \mathcal{C}_X^∞ -modules. Considérons un morphisme surjectif $p : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}''$ et une section $s'' \in \Gamma(X, \mathcal{F}'')$. On peut trouver un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (U_\alpha)$ et des sections $s_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{F})$ telles que $p(s_\alpha) = s''|_{U_\alpha}$. Soit φ_α une partition de l'unité subordonnée au recouvrement \mathcal{U} : ceci signifie que les propriétés suivantes sont satisfaites :

- la famille des supports $\text{Supp } \varphi_\alpha = \overline{\{x \in X, \varphi_\alpha(x) \neq 0\}}$ est localement finie ;
- chacun de ces fermés est contenu dans U_α ;
- $\sum_\alpha \varphi_\alpha = 1$.

Il existe alors une section σ_α de \mathcal{F} telle que

$$\sigma_\alpha|_{U_\alpha} = \varphi_\alpha s_\alpha \quad ; \quad \sigma_\alpha|_{X - \text{Supp } \varphi_\alpha} = 0.$$

Alors la section de \mathcal{F} définie par $\sigma = \sum_\alpha \sigma_\alpha$ a un sens sur tout ouvert relativement compact, et par suite sur X . D'autre part, un point x étant donné, il n'existe qu'un nombre fini d'indices α tels que le support de φ_α rencontre x ; soit A cet ensemble. Considérons le complémentaire dans $W = \bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha$ de la réunion des supports des φ_β qui ne contiennent pas x ; c'est un voisinage ouvert V de x sur lequel on a

$$s|_V = \sum_{\alpha \in A} \sigma_\alpha|_V = \sum_{\alpha \in A} \varphi_\alpha s_\alpha|_V.$$

Il en résulte $p(s)|_V = s''|_V$, et par suite $p(s) = s''$. Ceci démontre l'exactitude du foncteur section sur la catégorie de faisceaux considérée. \square

Cohomologie de de Rham

COROLLAIRE 2.11. — *(De Rham) Soit $H_{\text{DR}}^q(X)$ la cohomologie de de Rham de degré q de X . On a un isomorphisme canonique*

$$H_{\text{DR}}^q(X) \simeq H^q(X, \mathbb{R}).$$

Démonstration. Soit $\mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{A}^\bullet$ la résolution de de Rham par le complexe des formes différentielles de classe C^∞ . Chacun des faisceau \mathcal{A}^i est acyclique d'après l'énoncé ci-dessus. L'énoncé résulte donc du théorème de de Rham formel. \square

Ce corollaire démontre en particulier que la cohomologie de de Rham est un invariant topologique.

Suite exacte exponentielle

COROLLAIRE 2.12. — *Soit X une variété différentielle connexe, \mathcal{C}_X^∞ le faisceau des fonctions différentiables sur X de classe C^∞ à valeurs complexes, et $\mathcal{C}_X^{\infty*}$ le faisceau des fonctions différentiables à valeurs complexes inversibles. On a une suite exacte*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{C}_X^\infty \xrightarrow{f \mapsto \exp(2i\pi f)} \mathcal{C}_X^{\infty*} \longrightarrow (1)$$

et des isomorphismes pour $q > 0$

$$H^q(X, \mathcal{C}_X^{\infty*}) \simeq H^{q+1}(X, \mathbb{Z}).$$

On verra que le groupe $H^1(X, \mathcal{C}_X^{\infty*})$ s'interprète comme le groupe des classes d'isomorphisme de fibrés différentiables de rang un sur X (*cf.* exercice 4.2).

Cohomologie de Dolbeault

Soit X une variété analytique complexe, T le fibré vectoriel tangent. On a un isomorphisme de fibrés vectoriels complexes de classe C^∞

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T, \mathbb{C}) = T^* \oplus \overline{T^*}$$

de sorte que on a

$$\wedge_{\mathbb{C}}^i \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=i} \wedge^{p,q}$$

où $\wedge^{p,q} = \wedge^p T^* \otimes \wedge^q \overline{T^*}$. Alors le module $A^i(X)$ (sur l'algèbre des fonctions différentiables de classe C^∞) des formes différentielles à valeurs complexes se décompose suivant la somme directe

$$A^i(X) = \bigoplus_{p+q=i} A^{p,q}(X)$$

et la différentielle $d : A^i(X) \longrightarrow A^{i+1}(X)$ se décompose en une somme de deux opérateurs d' et d'' de bidegré (1,0) et (0,1) respectivement. On s'intéresse ici à l'opérateur $d'' : A^{p,q}(X) \longrightarrow A^{p,q+1}(X)$. On a évidemment $d''^2 = 0$. Si f est une fonction différentiable

sur X , la forme différentielle de type $(0,1)$ définie par $d''f$ est la partie anti-linéaire de df . Si (z_1, \dots, z_n) sont des coordonnées sur un ouvert U , on a

$$d''f|_U = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} d\bar{z}_i.$$

Ainsi, toute fonction holomorphe appartient au noyau de $d'' : A^{0,0}(X) \longrightarrow A^{0,1}(X)$. Désignons par $\mathcal{A}^{p,q}$ le faisceau $U \mapsto A^{p,q}(U)$ des formes différentielles de type (p,q) . On obtient pour $p = 0$ un complexe de faisceaux $\mathcal{A}^{0,\bullet}$.

LEMME 2.13. — (Dolbeault-Grothendieck) *Le morphisme naturel*

$$\mathcal{O}_{an} \longrightarrow \mathcal{A}^{0,\bullet}$$

est une résolution du faisceau \mathcal{O}_{an} des fonctions analytiques sur X .

La démonstration de cet énoncé ne sera pas donnée ici : on peut consulter par exemple le livre de Griffiths et Harris, ou le livre de Hörmander. Elle consiste à se ramener plus ou moins au cas d'une variable. Dans ce cas, il suffit de vérifier que si g est une fonction de classe C^∞ sur \mathbb{C} , il existe une fonction f de classe C^∞ telle que

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g.$$

On peut en fait supposer que g est à support compact ; on montre que la fonction

$$f = \frac{1}{2i\pi} g * \frac{1}{z}$$

satisfait à l'équation $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g$.

THÉORÈME 2.14. — (Dolbeault) *On a isomorphisme canonique*

$$H^q(X, \mathcal{O}_{an}) \simeq H^q(A^{0,\bullet}(X)).$$

Cet énoncé s'obtient en appliquant le théorème de de Rham formel, compte-tenu du fait que le faisceau $\mathcal{A}^{0,q}$ est un faisceau de modules sur le faisceau des fonctions différentiables ; c'est donc un faisceau acyclique.

Plus généralement, soit E un fibré vectoriel holomorphe sur X . On désigne par $\mathcal{A}^{p,q}(E)$ le faisceau qui associe à l'ouvert U l'espace des sections de classe C^∞ du fibré vectoriel $\wedge^{p,q} \otimes E$. L'opérateur d'' se prolonge en un opérateur

$$d'' : \mathcal{A}^{p,q}(E) \longrightarrow \mathcal{A}^{p,q+1}(E)$$

défini en posant sur un ouvert U où E est muni d'un repère local holomorphe $(e_i)_{i=1,\dots,r}$

$$d''\left(\sum_i \omega_i e_i\right) = \sum_{i=1}^r (d''\omega_i) e_i$$

On vérifie que cette formule ne dépend pas du choix du repère local. On obtient encore de cette manière une résolution du faisceau $\Omega^p(E) = \mathcal{O}(\wedge^p T^* \otimes E)$ des formes différentielles holomorphes de degré p à valeurs dans E

$$\Omega^p(E) \longrightarrow \mathcal{A}^{p,\bullet}(E)$$

et par suite un isomorphisme canonique, appelé isomorphisme de Dolbeault

$$H^q(X, \Omega^p(E)) \simeq H^q(\mathcal{A}^{p,\bullet}(E)).$$

3. Cohomologie des variétés affines

Soit X une variété algébrique affine, et $A = \mathcal{O}(X)$ l'algèbre des fonctions régulières sur X .

LEMME 3.1. — *Soit I un A -module injectif. Pour tout élément non nul q de A , le morphisme canonique $I \longrightarrow I_q$ est surjectif.*

Démonstration. Considérons une fraction $\frac{m}{q^\ell} \in I_q$. Il s'agit de prouver qu'il existe un élément $m' \in I$ tel que

$$\frac{m}{q^\ell} = \frac{m'}{1},$$

c'est-à-dire qu'il existe un entier k convenable tel que $q^k m = q^{k+\ell} m'$. On considère pour tout entier k l'idéal \mathfrak{a}_k de A défini par l'annulateur de q^k . Puisque A est un anneau noethérien, cette suite croissante d'idéaux est stationnaire pour $k \geq k_0$. Pour un tel entier k , considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A/\mathfrak{a}_k & \xrightarrow{q^{k+\ell}} & A \\ & \searrow q^k m & \\ & & I \end{array}$$

La flèche horizontale est injective ; puisque I est un A -module injectif, on peut factoriser : ceci détermine un élément $m' \in I$ tel que $q^{k+\ell} m' = q^k m$. \square

COROLLAIRE 3.2. — Soit I un A -module injectif, et $\mathcal{J} = \tilde{I}$ le faisceau algébrique associé. Alors le morphisme de restriction $\Gamma(X, \mathcal{J}) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{J})$ est surjectif pour tout ouvert U principal de X .

Plus précisément :

PROPOSITION 3.3. — Soit I un A -module injectif. Alors le faisceau algébrique associé \mathcal{J} est flasque.

La démonstration repose sur le lemme précédent, et sur le lemme ci-dessous qui permettra de faire une récurrence.

LEMME 3.4. — Soit I un A -module injectif, et $q \in A$. Alors le noyau K de l'homomorphisme canonique $I \longrightarrow I_q$ est encore un A -module injectif.

Démonstration. D'après l'exercice 1.2, il suffit de démontrer que pour tout A -module de type fini M on a $\text{Ext}^1(M, K) = 0$. En vertu de la suite exacte

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow I \longrightarrow I_q \longrightarrow 0$$

il s'agit de vérifier que l'homomorphisme canonique $\text{Hom}(M, I) \longrightarrow \text{Hom}(M, I_q)$ est surjectif. La démonstration est analogue à celle du lemme 3.1. Puisque M est de type fini, étant donné un homomorphisme $f : M \longrightarrow I_q$, il existe un entier ℓ tel que $q^\ell f$ se factorise par I en un homomorphisme $g : M \longrightarrow I$. Considérons dans M la suite croissante de sous-modules défini par le noyau M_k de l'homothétie $M \longrightarrow M$ de rapport q^k . Puisque A est noethérien et que M est de type fini, cette suite croissante de sous-modules est stationnaire pour $k \geq k_0$. Considérons alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} M/M_k & \xrightarrow{q^{k+\ell}} & M \\ & \searrow x \mapsto g(q^k x) & \\ & & I \end{array}$$

L'entier k étant choisi tel que $k \geq k_0$, la flèche horizontale est injective ; puisque I est un module injectif, il existe un homomorphisme $f' : M \longrightarrow I$ tel que pour tout $x \in M$ on ait $g(q^k x) = f'(q^{k+\ell} x)$. Il en résulte que l'image de l'homomorphisme f' dans $\text{Hom}(M, I_q)$ est f . D'où le lemme. \square

Démonstration de la proposition 3.3

Considérons le support du faisceau algébrique $\mathcal{J} = \tilde{I}$. Ce support, noté $\text{Supp}(\mathcal{J})$, n'a aucune raison d'être fermé. On introduit sa fermeture $Y = \overline{\text{Supp}(\mathcal{J})}$ dans X et on raisonne par récurrence noethérienne sur ce fermé. S'il est vide, l'énoncé est évidemment vrai. On suppose que le support de \mathcal{J} n'est pas vide.

Supposons l'énoncé démontré pour tout A -module injectif K tel que le fermé $\overline{\text{Supp}(\mathcal{K})}$ soit strictement plus petit que Y . Soit s une section de \mathcal{J} sur un ouvert $U \subset X$. Il s'agit de montrer qu'on peut étendre cette section à X . Si U ne rencontre pas Y , la section s est nulle, et le résultat est évident. Si U rencontre Y , on peut trouver un ouvert principal V non vide défini par $q \neq 0$ contenu dans U et qui rencontre le support de \mathcal{J} . D'après le corollaire 3.1 ci-dessus, il existe une section $s' \in \Gamma(X, \mathcal{J})$ telle que $s'|_V = s|_V$. Considérons la section $s - s'|_U$. Cette section s'annule sur V donc elle est définie par une section du faisceau algébrique $\mathcal{K} = \tilde{K}$ associé au module

$$K = \ker I \longrightarrow I_q.$$

La fermeture du support du faisceau \mathcal{K} strictement plus petit que Y , et K est un module injectif d'après le lemme 3.4 ci-dessus. D'après l'hypothèse de récurrence, cette section s'étend à X en une section $s'' \in \Gamma(X, \mathcal{K})$. Alors $(s' + s'')|_U = s$, ce qui achève la démonstration. \square

COROLLAIRE 3.5. — *Soit I un A -module injectif, et \mathcal{J} le faisceau associé. Alors $H^q(X, \mathcal{J}) = 0$.*

THÉORÈME 3.6. — *(Théorèmes A et B de Serre)*

Soit \mathcal{F} un faisceau algébrique quasi-cohérent sur une variété algébrique affine X . Alors

- (A) *le faisceau \mathcal{F} est engendré par ses sections globales ;*
- (B) *la cohomologie $H^q(X, \mathcal{F})$ est nulle pour $q > 0$.*

Démonstration. Le théorème A a déjà été démontré dans la section 4 du chapitre 2. Considérons le module $M = \mathcal{F}(X)$ pour lequel on écrit une résolution injective

$$\epsilon : M \longrightarrow I^\bullet$$

Soit $\mathcal{J}^q = \tilde{I}^q$ le faisceau algébrique associé à I^q . On sait que ce faisceau est flasque, donc acyclique. De plus, par définition, le morphisme $I^q \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{J}^q)$ est un isomorphisme.

On obtient pour le faisceau \mathcal{F} une résolution acyclique $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{J}^\bullet$. D'après le théorème de de Rham formel, on a un isomorphisme

$$\begin{aligned} H^q(X, \mathcal{F}) &= H^q(\Gamma(X, \mathcal{J}^\bullet)) \\ &= H^q(I^\bullet) \end{aligned}$$

Il en résulte que $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$ pour tout $q > 0$. \square

4. Cohomologie de Čech

4.1. Le théorème de Leray

Soit X un espace topologique, $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X , et \mathcal{F} un faisceau de groupes abéliens sur X . Pour $(i_0, \dots, i_p) \in I^{p+1}$, l'intersection des ouverts U_{i_j} pour $j = 0, \dots, p$ est notée U_{i_0, \dots, i_p} .

DÉFINITION 4.1. — On appelle p -cochaîne alternée (de Čech) de \mathcal{U} à valeurs dans \mathcal{F} une famille $f = (f_{i_0, \dots, i_p}) \in \prod_{i_0, \dots, i_p} \mathcal{F}(U_{i_0, \dots, i_p})$ satisfaisant à la condition suivante : pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_{p+1}$ on a

$$f_{i_{\sigma(0)}, \dots, i_{\sigma(p)}} = \epsilon_\sigma f_{i_0, \dots, i_p}$$

Dans cet énoncé, ϵ_σ désigne la signature de la permutation σ . Les p -cochaînes alternées de \mathcal{U} à valeurs dans \mathcal{F} constituent un groupe abélien noté $\check{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. On définit une différentielle $\partial : \check{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \check{C}^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ en posant

$$(\partial f)_{i_0, \dots, i_{p+1}} = \sum_{\alpha=0}^{p+1} (-1)^\alpha f_{i_0, \dots, \hat{i}_\alpha, \dots, i_{p+1}} \Big|_{U_{i_0, \dots, i_{p+1}}}$$

Dans cette formule, le symbole \hat{i}_α signifie que l'on enlève i_α .

LEMME 4.2. — On a $\partial^2 = 0$.

Démonstration. On a en effet

$$\begin{aligned} (\partial^2 f)_{i_0, \dots, i_{p+2}} &= - \sum_{\alpha < \beta} (-1)^{\alpha+\beta} f_{i_0, \dots, \hat{i}_\alpha, \dots, \hat{i}_\beta, \dots, i_{p+2}} \Big|_{U_{i_0, \dots, i_{p+2}}} \\ &\quad + \sum_{\alpha < \beta} (-1)^{\alpha+\beta} f_{i_0, \dots, \hat{i}_\alpha, \dots, \hat{i}_\beta, \dots, i_{p+2}} \Big|_{U_{i_0, \dots, i_{p+2}}} \\ &= 0. \quad \square \end{aligned}$$

On désigne par $\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ le complexe de groupes abéliens ainsi obtenu : c'est le complexe de Čech du recouvrement \mathcal{U} à valeurs dans le faisceau \mathcal{F} .

DÉFINITION 4.3. — On appelle q -ième groupe de cohomologie de Čech du recouvrement \mathcal{U} à valeurs dans \mathcal{F} le groupe abélien

$$\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = H^q(\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}))$$

PROPOSITION 4.4. —

(i) Le morphisme canonique $\Gamma(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ est un isomorphisme.

(ii) Soit $0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$ une suite exacte de faisceaux abéliens.

On suppose que $H^1(U_{i_0, \dots, i_p}, \mathcal{F}') = 0$. Alors on a une suite exacte longue de groupes de cohomologie

$$\dots \longrightarrow \check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}') \longrightarrow \check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}'') \longrightarrow \check{H}^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}') \longrightarrow \dots$$

(iii) Si \mathcal{F} est un faisceau flasque, on a pour $q > 0$

$$\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0.$$

Démonstration. L'assertion (i) résulte trivialement de la définition des faisceaux. L'assertion (ii) résulte de la suite exacte des complexes de Čech

$$0 \longrightarrow \check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}') \longrightarrow \check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}'') \longrightarrow 0.$$

Démontrons l'assertion (iii). Soit \mathcal{F} un faisceau de groupes abéliens. Considérons pour chaque ouvert $V \subset X$ le recouvrement $V \cap \mathcal{U}$ par les ouverts $V \cap U_i$. Le préfaisceau $V \mapsto \check{C}^p(V \cap \mathcal{U}, \mathcal{F})$ est un faisceau noté $\check{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. On obtient ainsi un complexe de faisceaux $\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ et on a un morphisme d'augmentation

$$\epsilon : \mathcal{F} \longrightarrow \check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

L'énoncé résulte du lemme suivant

LEMME 4.5. —

(i) Le morphisme $\epsilon : \mathcal{F} \longrightarrow \check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ est une résolution de \mathcal{F} .

(ii) Si \mathcal{F} est flasque, chacun des faisceaux $\check{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ est flasque.

Dès lors, pour obtenir la proposition 4.4, il suffit d'appliquer le théorème de de Rham formel : on obtient en effet si \mathcal{F} est flasque en prenant la cohomologie du complexe des sections globales

$$\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = H^q(X, \mathcal{F}) = 0. \quad \square$$

Démonstration du lemme 4.5

L'assertion (ii) est évidente. Il y a seulement à vérifier (i). Il est clair d'après l'assertion (i) de la proposition 4.4 que le faisceau de cohomologie de $\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ est \mathcal{F} en degré 0. Montrons que les faisceaux de cohomologie sont nuls en degré > 0 . Considérons pour ceci un point $x \in X$ et le complexe des germes $\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})_x$ pour lequel nous allons construire un opérateur d'homotopie. Choisissons un ouvert U_j contenant le point x . On définit une homotopie $h : \check{C}^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})_x \longrightarrow \check{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})_x$ en posant pour $f \in \check{C}^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})_x$

$$h(f)_{i_0, \dots, i_p} = f_{j, i_0, \dots, i_p}$$

Ceci a un sens : en effet, f se représente par une cochaîne de Čech $(f_{i_0, \dots, i_{p+1}}) \in \check{C}^{p+1}(V \cap \mathcal{U}, \mathcal{F})$, où V est un voisinage ouvert convenable du point x . On peut supposer que $V \subset U_j$. Alors $V \cap U_{j, i_0, \dots, i_p} = V \cap U_{i_0, \dots, i_p}$ ce qui montre que $(i_0, \dots, i_p) \mapsto f_{j, i_0, \dots, i_p}$ définit une cochaîne de $\check{C}^p(V \cap \mathcal{U}, \mathcal{F})$ et son germe au point x définit $h(f)$. On vérifie sans difficulté que $\partial h(f) = f - h\partial(f)$, ce qui montre que le complexe de faisceaux $\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ n'a pas de cohomologie en degré > 0 .

DÉFINITION 4.6. — *Soit \mathcal{F} un faisceau de groupes abéliens sur un espace topologique X . Un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ est dit \mathcal{F} -acyclique si pour tout $q > 0$ et tout $(i_0, \dots, i_p) \in I^{p+1}$ on a*

$$H^q(U_{i_0, \dots, i_p}, \mathcal{F}) = 0$$

THÉORÈME 4.7. — *(Leray) Soient X un espace topologique, \mathcal{F} un faisceau de groupes abéliens sur X , et \mathcal{U} un recouvrement ouvert de X .*

(i) *Il existe un morphisme canonique, fonctoriel en \mathcal{F}*

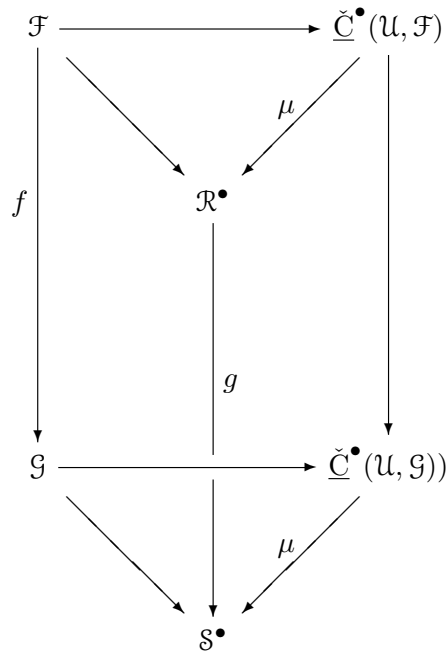
$$\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^q(X, \mathcal{F})$$

(ii) *Si le recouvrement \mathcal{U} est \mathcal{F} -acyclique, ce morphisme est un isomorphisme.*

Démonstration. Comme on l'a vu dans la démonstration de la proposition 4.5, on a une résolution $\epsilon : \mathcal{F} \longrightarrow \check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ par le complexe des cochaînes de Čech. Si $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{R}^\bullet$ est la résolution injective canonique de \mathcal{F} , cette résolution permet de définir la cohomologie de \mathcal{F} : on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \longrightarrow & \check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \\ & \searrow & \downarrow \mu \\ & & \mathcal{R}^\bullet \end{array}$$

dans lequel le morphisme μ est bien défini à homotopie près. On obtient en prenant les sections globales un morphisme de complexes $\mu : \check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{R}^\bullet$ d'où en prenant la cohomologie un morphisme bien défini $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^q(X, \mathcal{F})$. Vérifions que ce morphisme est bien fonctoriel en \mathcal{F} . Soit $f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ un morphisme de faisceaux de groupes abéliens. Considérons des résolutions injectives $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{R}^\bullet$ et $\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{S}^\bullet$, par exemple les résolutions canoniques. On peut alors construire des morphismes de complexes μ et un morphisme de complexes g tel que dans le diagramme



chacune des flèches horizontales est un quasi-isomorphisme, les triangles horizontaux sont commutatifs ; la face verticale gauche, et la face du fond sont des carrés commutatifs ; le carré vertical de droite est commutatif à homotopie près d'après la proposition 1.13. Il en résulte que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H^q(X, \mathcal{F}) & \longrightarrow & H^q(X, \mathcal{G})
 \end{array}$$

est commutatif, ce qui signifie que le morphisme est fonctoriel. En outre, il est compatible avec les suites exactes longues de cohomologie associées aux suites exactes courtes de faisceaux de groupes abéliens : autrement dit, si $0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$

est une suite exacte de faisceaux, et si le recouvrement \mathcal{U} est \mathcal{F}' -acyclique, on a alors un diagramme commutatif de suites exactes longues

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & \check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}') & \longrightarrow & \check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}'') & \longrightarrow & \check{H}^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}') & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \dots & \longrightarrow & H^q(X, \mathcal{F}') & \longrightarrow & H^q(X, \mathcal{F}) & \longrightarrow & H^q(X, \mathcal{F}'') & \longrightarrow & H^{q+1}(X, \mathcal{F}') & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

En effet, en choisissant des résolutions injectives $\mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{R}'^\bullet$ et $\mathcal{F}'' \longrightarrow \mathcal{R}''^\bullet$ on construit comme dans la proposition 1.13 une résolution injective $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{R}^\bullet$ s'insérant dans une suite exacte $0 \longrightarrow \mathcal{R}'^\bullet \longrightarrow \mathcal{R}^\bullet \longrightarrow \mathcal{R}''^\bullet \longrightarrow 0$ et l'argument ci-dessus fournit un diagramme de complexes

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}') & \longrightarrow & \check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}'') & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{R}'^\bullet & \longrightarrow & \mathcal{R}^\bullet & \longrightarrow & \mathcal{R}''^\bullet & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

dans lequel les carrés sont commutatifs à homotopie près. Une chasse au diagramme faisant intervenir les homotopies fournit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}'') & \longrightarrow & \check{H}^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}') \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H^q(X, \mathcal{F}'') & \longrightarrow & H^{q+1}(X, \mathcal{F}')
 \end{array}$$

Démontrons (ii) par récurrence sur q . C'est évidemment trivial pour $q = 0$. On plonge \mathcal{F} dans un faisceau flasque \mathcal{J} . Alors le recouvrement \mathcal{U} est encore acyclique pour le faisceau $\mathcal{G} = \mathcal{J}/\mathcal{F}$. Du fait que \mathcal{J} est flasque, en vertu de la proposition 4.5 dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{G}) & \longrightarrow & \check{H}^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H^q(X, \mathcal{G}) & \longrightarrow & H^{q+1}(X, \mathcal{F})
 \end{array}$$

les flèches horizontales sont des isomorphismes si $q \geq 1$. Par hypothèse de récurrence, la première flèche verticale est un isomorphisme. Il en est de même de la seconde. Dans le cas $q = 0$, dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 \check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{J}) & \longrightarrow & \check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{G}) & \longrightarrow & \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 H^0(X, \mathcal{J}) & \longrightarrow & H^0(X, \mathcal{G}) & \longrightarrow & H^1(X, \mathcal{F}) & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

les lignes sont exactes, et les deux premières flèches verticales sont des isomorphismes, donc aussi la troisième. \square

COROLLAIRE 4.8. — *Soient X une variété algébrique, \mathcal{U} un recouvrement ouvert de X par des ouverts affines, et \mathcal{F} un faisceau algébrique cohérent. Alors le morphisme canonique*

$$\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^q(X, \mathcal{F})$$

est un isomorphisme pour tout entier q .

Démonstration. En effet, soit $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement de X par des ouverts affines. Les intersections U_{i_0, \dots, i_p} sont encore des ouverts affines. Donc si \mathcal{F} est un faisceau algébrique cohérent sur X , un tel recouvrement est \mathcal{F} -acyclique. \square

4.2. Cohomologie de $\mathbb{A}^{n+1} - \{0\}$

On se propose d'utiliser le théorème des recouvrements acycliques de Leray pour calculer la cohomologie $H^q(\mathbb{A}^n - \{0\}, \mathcal{O})$.

Formule de Künneth

Soient K^\bullet et L^\bullet deux complexes d'espaces vectoriels. On définit le complexe $K^\bullet \otimes L^\bullet$ en posant

$$(K \otimes L)^n = \bigoplus_{p+q=n} K^p \otimes L^q$$

muni de la différentielle définie par

$$d(x \otimes y) = dx \otimes y + (-1)^p x \otimes dy$$

pour $x \in K^p$ et $y \in L^q$. Le complexe ainsi obtenu s'appelle le produit tensoriel de K^\bullet et L^\bullet . On a une application linéaire canonique

$$\mu : \bigoplus_{p+q=n} H^p(K^\bullet) \otimes H^q(L^\bullet) \longrightarrow H^n(K^\bullet \otimes L^\bullet)$$

définie par $\mu([x] \otimes [y]) = [x \otimes y]$. On voit en effet que le second membre ne dépend que des classes de cohomologie $[x]$ et $[y]$, ce qui donne un sens à cette formule.

PROPOSITION 4.9. — *L'application linéaire μ ci-dessus est un isomorphisme.*

Démonstration. Soit $Z^i = \ker d : K^i \longrightarrow K^{i+1}$ l'espace vectoriel des cycles de degré i , et $B_i = dK^{i-1}$ l'espace vectoriel des bords de degré i de K^\bullet . On choisit un facteur direct H^i de B^i dans Z^i , et un supplémentaire S^i de Z^i dans K^i , de sorte que $K^i = B^i \oplus H^i \oplus S^i$. La différentielle d induit alors un isomorphisme $\alpha_i : S^i \longrightarrow B^{i+1}$. Considérons le complexe H^\bullet défini par

$$\dots \longrightarrow H^i \xrightarrow{0} H^{i+1} \longrightarrow \dots$$

C'est un sous-complexe de K^\bullet qui a un supplémentaire T^\bullet donné par

$$T^i = B^i \oplus S^i$$

Ce complexe est fait d'injectifs, et sa cohomologie est nulle : ainsi id_{T^\bullet} est homotope à 0. Il en résulte que l'identité du complexe $T^\bullet \otimes L^\bullet$ est elle aussi homotope à 0, et donc sa cohomologie est nulle. On est donc ramené au cas où la différentielle de K^\bullet est nulle. On se ramène de la même façon au cas où la différentielle de L^\bullet est nulle. Dans le cas où les différentielles de K^\bullet et L^\bullet sont nulles, la proposition est triviale. \square

Calcul de $H^q(\mathbb{A}^2 - \{0\}, \mathcal{O})$

Soit $U = \mathbb{A}^2 - \{0\}$. Considérons le recouvrement ouvert \mathcal{U} de $U = \mathbb{A}^2 - \{0\}$ défini par les ouverts $U_0 = \{z = (z_0, z_1), z_0 \neq 0\}$ et $U_1 = \{z = (z_0, z_1), z_1 \neq 0\}$. Ces ouverts sont affines, et par conséquent la cohomologie $H^q(U, \mathcal{O})$ est la cohomologie du complexe

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(U_0) \oplus \mathcal{O}(U_1) \longrightarrow \mathcal{O}(U_{0,1}) \longrightarrow 0$$

où la différentielle est définie par $(f, g) \mapsto f|_{U_{0,1}} - g|_{U_{0,1}}$. Considérons le complexe K^\bullet défini par

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(\mathbb{A}^1) \longrightarrow \mathcal{O}(\mathbb{A}^1 - \{0\}) \longrightarrow 0$$

$$\parallel \qquad \parallel$$

$$K^0 \qquad K^1$$

dont la cohomologie est nulle en degré 0; en degré 1, l'espace vectoriel de cohomologie $H^1(K^\bullet)$ est isomorphe à l'espace vectoriel des fonctions rationnelles $\sum_{i \geq 1} a_i \frac{1}{z^i}$, où $a_i \in k$. Le complexe $K^\bullet \otimes K^\bullet$ est alors isomorphe au complexe

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(U) \longrightarrow \check{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}) \longrightarrow \check{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) \longrightarrow 0$$

D'après la formule de Künneth, on a donc $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) = H^1(K^\bullet) \otimes H^1(K^\bullet)$. On obtient ainsi que le $\mathcal{O}(U)$ -module $H^1(U, \mathcal{O})$ est isomorphe au module des fractions rationnelles engendré par les fonctions rationnelles

$$\frac{1}{z_0^\alpha z_1^\beta}$$

avec $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

Cas général

Soit $U = \mathbb{A}^{n+1} - \{0\}$. On considère le recouvrement ouvert \mathcal{U} par les ouverts affines U_i définis par les points $z = (z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{A}^{n+1}$ tels que $z_i \neq 0$. On a encore comme ci-dessus

$$\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{O}) = H^{q+1}(\underbrace{K^\bullet \otimes K^\bullet \otimes \dots \otimes K^\bullet}_{n+1 \text{ fois}})$$

Il en résulte que $H^q(U, \mathcal{O})$ est nul si $q \neq 0$ et $q \neq n$. Pour $q = 0$, on obtient l'espace vectoriel des polynômes sur \mathbb{A}^{n+1} , et pour $q = n$ la cohomologie $H^n(U, \mathcal{O})$ est isomorphe au $\mathcal{O}(U)$ -module engendré par les fractions rationnelles

$$\frac{1}{z_0^{\nu_0} \dots z_n^{\nu_n}}$$

telles que $\nu_i > 0$. \square

Exercice 4.1

Soit \mathcal{F} un faisceau de groupes abéliens sur un espace topologique X .

1. Montrer que pour tout recouvrement ouvert \mathcal{U} de X , le morphisme canonique

$$\mu_{\mathcal{U}} : \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{F})$$

est injectif.

2. Montrer que la réunion des images de $\mu_{\mathcal{U}}$ quand \mathcal{U} varie est $H^1(X, \mathcal{F})$.

3. En déduire que sur une variété algébrique intègre X le groupe de cohomologie $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ est isomorphe au groupe de Picard $\text{Pic}(X)$ des classes d'isomorphisme de fibrés inversibles.

4. On considère sur une variété algébrique lisse X le faisceau $U \longrightarrow \text{Rat}(U)^*$ des fonctions rationnelles non nulles, noté Rat_X^* et le faisceau $U \longrightarrow \text{Div}(U)$ des diviseurs.

Etablir la suite exacte de faisceaux abéliens $0 \longrightarrow \mathcal{O}_X^* \longrightarrow \text{Rat}_X^* \longrightarrow \text{Div}_X \longrightarrow 0$.

Retrouver à partir de là la suite exacte

$$(1) \longrightarrow \mathcal{O}^*(X) \longrightarrow \text{Rat}(X)^* \longrightarrow \text{Div}(X) \longrightarrow \text{Pic}(X) \longrightarrow 0$$

5. Démontrer que les faisceaux Rat_X^* et Div_X sont flasques. En déduire que

$$H^q(X, \mathcal{O}_X^*) = 0$$

pour $q \geq 2$.

Exercice 4.2

Soit X une variété différentielle de classe C^∞ .

1. Démontrer que le groupe des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels différentiables de rang 1 est isomorphe à $H^1(X, \mathcal{C}_X^{\infty*})$.

2. En déduire que ce groupe est aussi isomorphe au groupe de cohomologie $H^2(X, \mathbb{Z})$.

5. Théorèmes fondamentaux

Ils concernent pour l'essentiel la cohomologie des variétés projectives. Nous commençons d'abord par un théorème qui fournit l'annulation de la cohomologie en degré assez grand.

5.1. Annulation

THÉORÈME 5.1. — (Grothendieck) Soient X un espace topologique noethérien de dimension n , et \mathcal{F} un faisceau de groupes abéliens sur X . Alors

$$H^q(X, \mathcal{F}) = 0$$

pour $q > n$.

Nous ne démontrons ce théorème que pour les faisceaux algébriques cohérents sur une variété projective, seul cas qui nous sera utile dans la suite. Dans ce cas, la démonstration est beaucoup plus facile. Pour le cas général, on pourra consulter le livre de R. Hartshorne.

Démonstration. Soient X une variété projective de dimension n , et \mathcal{F} un faisceau algébrique cohérent sur X . Soit $X \hookrightarrow \mathbb{P}_m$ un plongement de X dans un espace projectif \mathbb{P}_m . On peut trouver un sous-espace projectif P_{m-n-1} qui évite X ; ce sous-espace projectif peut être défini par $n+1$ équations linéaires $f_0 = \dots = f_n = 0$. Considérons l'ouvert affine de X défini par $U_i = \{x \in X, f_i(x) \neq 0\}$. Ces ouverts constituent un recouvrement ouvert de X , et d'après le théorème des recouvrements acycliques de Leray, il existe un isomorphisme canonique

$$\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \simeq H^q(X, \mathcal{F})$$

Or, les cochaînes de Čech étant alternées, on a $\check{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ si $q > n$. Ceci implique immédiatement l'énoncé. \square

Exercice 5.1

Soit \mathcal{F} un faisceau algébrique cohérent sur une variété algébrique projective X . Soit m la dimension du support de \mathcal{F} . Démontrer que pour $q > m$, on a $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$

5.2. Finitude

Pour un faisceau algébrique cohérent \mathcal{F} , sur une variété algébrique X on sait que la cohomologie est un module sur l'algèbre $\mathcal{O}(X)$ des fonctions régulières. En particulier, c'est un espace vectoriel sur k .

THÉORÈME 5.2. — *Soient X une variété algébrique projective, et \mathcal{F} un faisceau algébrique cohérent sur X . Alors, pour tout entier q , on a*

$$\dim_k H^q(X, \mathcal{F}) < \infty.$$

Le théorème des images directes de Leray

Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue, et \mathcal{F} un faisceau de groupes abéliens sur X . Le foncteur image directe $\mathcal{F} \mapsto f_*(\mathcal{F})$ est exact à gauche ; on considère les foncteurs dérivés $R^q f_*(\mathcal{F})$ qui sont appelés images directes supérieures de \mathcal{F} . On peut donner une autre définition, en termes de cohomologie :

LEMME 5.3. — *Le faisceau $R^q f_*(\mathcal{F})$ est le faisceau associé au préfaisceau $V \mapsto H^q(f^{-1}(V), \mathcal{F})$.*

Démonstration. Une telle image directe se calcule en prenant une résolution injective $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{R}^\bullet$. On a par définition

$$R^q f_*(\mathcal{F}) = H^q(f_*(\mathcal{R}^\bullet))$$

Le faisceau qui figure à droite est le faisceau associé au préfaisceau

$$V \mapsto H^q(\Gamma(V, f_*(\mathcal{R}^\bullet))) = H^q(\Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{R}^\bullet)).$$

Par définition le membre de droite est le préfaisceau $V \mapsto H^q(f^{-1}(V), \mathcal{F})$. \square

THÉORÈME 5.4. — *(Leray) Si les images directes supérieures $R^q f_*(\mathcal{F})$ sont nulles pour $q > 0$, on a un isomorphisme canonique*

$$H^q(Y, f_*(\mathcal{F})) \simeq H^q(X, \mathcal{F})$$

Démonstration. Soit $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{R}^\bullet$ une résolution injective de \mathcal{F} . Par image directe, on obtient compte-tenu de l'hypothèse une résolution

$$f_*(\mathcal{F}) \longrightarrow f_*(\mathcal{R}^\bullet)$$

et puisque \mathcal{R}^q est flasque, chacun des faisceaux $f_*(\mathcal{R}^q)$ est flasque. D'après le théorème de de Rham formel, cette résolution peut donc servir pour calculer la cohomologie de $f_*(\mathcal{F})$. On a donc

$$\begin{aligned} H^q(Y, f_*(\mathcal{F})) &\simeq H^q(\Gamma(Y, f_*(\mathcal{R}^\bullet))) \\ &\simeq H^q(\Gamma(X, \mathcal{R}^\bullet)) \\ &\simeq H^q(X, \mathcal{F}) \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. \square

Morphismes finis.

PROPOSITION 5.5. — *Soient $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme fini, et \mathcal{F} un faisceau algébrique cohérent sur X . Alors*

- (i) *l'image directe $f_*(\mathcal{F})$ est un faisceau algébrique cohérent ;*
- (ii) *on a $R^q f_*(\mathcal{F}) = 0$ pour $q > 0$;*
- (iii) *On a $H^q(Y, f_*(\mathcal{F})) = H^q(X, \mathcal{F})$*

Démonstration. L'assertion (i) a déjà été démontrée dans la proposition 4.11 du chapitre 2. L'assertion (ii) résulte du fait que si V est un ouvert affine de Y , l'ouvert $f^{-1}(V)$ est encore affine. Alors, d'après le théorème B de Serre pour les variétés affines $H^q(f^{-1}(V), \mathcal{F}) = 0$ pour $q > 0$, et donc les images directes supérieures sont nulles. L'assertion (iii) résulte de (ii) et du théorème des images directes de Leray. \square

Ceci s'applique en particulier au cas d'une inclusion $X \hookrightarrow Y$ d'une sous-variété algébrique fermée X dans une variété algébrique Y . Ceci nous permet de ramener la démonstration du théorème de finitude 5.2 au cas d'un faisceau algébrique cohérent sur l'espace projectif.

COROLLAIRE 5.6. — *Soit \mathcal{F} un faisceau algébrique cohérent sur une variété algébrique projective $X \subset \mathbb{P}_m$. On désigne par $j : X \hookrightarrow \mathbb{P}_m$ le plongement canonique.*

- (i) *Les images directes $R^q j_*(\mathcal{F})$ sont nulles pour $q > 0$, et le faisceau image directe $j_*(\mathcal{F})$ est un faisceau algébrique cohérent sur \mathbb{P}_m .*
- (ii) *On a un isomorphisme*

$$H^q(\mathbb{P}_m, j_*(\mathcal{F})) \simeq H^q(X, \mathcal{F})$$

Présentation d'un faisceau algébrique cohérent sur une variété projective.

Etant donné un faisceau algébrique cohérent \mathcal{F} sur une variété projective $X \subset \mathbb{P}_m$, on désigne par $\mathcal{O}_X(n)$ le faisceau des sections du fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_m}(n)|_X$, et par $\mathcal{F}(n)$ le produit

tensoriel $\mathcal{F}(n) = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n)$. Si $j : X \hookrightarrow \mathbb{P}_m$ est l'inclusion canonique, on a un isomorphisme canonique

$$j_*(\mathcal{F})(n) \xrightarrow{\sim} j_*(\mathcal{F}(n)).$$

C'est un cas particulier de la formule de projection qui s'énonce :

LEMME 5.7. — *Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de variétés algébriques, \mathcal{F} un faisceau algébrique sur X , et \mathcal{G} un faisceau localement libre de rang r sur Y . Alors le morphisme canonique sur Y*

$$\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_Y} f_*(\mathcal{F}) \longrightarrow f_*(f^*(\mathcal{G}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F})$$

est un isomorphisme.

Démonstration. La construction de ce morphisme est évidente à partir des préfaisceaux dont proviennent les deux membres. On obtient ainsi un morphisme de foncteurs additifs en \mathcal{G} . Pour montrer que c'est un isomorphisme, la question étant locale sur Y , on peut supposer que $\mathcal{G} = \mathcal{O}_Y^r$. Il s'agit de foncteurs additifs qui commutent avec les sommes directes finies, et on est ramené au cas où $\mathcal{G} = \mathcal{O}_Y$. Dans ce cas le résultat est trivial. \square

THÉORÈME 5.8. — *(Théorème A)*

Soit \mathcal{F} un faisceau algébrique cohérent sur une variété projective X . Il existe des entiers n et N et un morphisme surjectif

$$f : \mathcal{O}_X(-n)^N \longrightarrow \mathcal{F}$$

Il s'agit de trouver un nombre fini de sections globales qui engendrent $\mathcal{F}(n)$ pour n convenable. On va se ramener à un énoncé déjà démontré pour les variétés affines.

LEMME 5.9. — *Soit \mathcal{F} un faisceau algébrique cohérent sur la variété projective X . Soit f une section non nulle de $\mathcal{O}_X(1)$, et U l'ouvert affine de X défini par $f \neq 0$.*

- (i) *Pour toute section $u \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ s'annulant sur U , il existe un entier n tel que la section $f^n u \in \Gamma(X, \mathcal{F}(n))$ soit nulle.*
- (ii) *Pour toute section $v \in \Gamma(U, \mathcal{F})$, il existe un entier n tel que la section $f^n v$ soit la restriction à U d'une section $w \in \Gamma(X, \mathcal{F}(n))$.*

Démonstration. On recouvre X par un nombre fini d'ouverts affines U_i sur lesquels le faisceau $\mathcal{O}_X(1)$ est trivial ; sur chacun de ces ouverts affines, on applique le lemme 4.6 du chapitre 2. \square

Démonstration du théorème 5.8

On peut recouvrir X par un nombre fini d'ouverts affines U_i définis par $f_i \neq 0$, où f_i est une section convenable de $\mathcal{O}_X(1)$. Sur chacun des ouverts affines U_i , le faisceau $\mathcal{F}|_{U_i}$ est engendré par un nombre fini de sections u_1, \dots, u_{k_i} . On peut alors trouver un entier n et des sections w_1, \dots, w_{k_i} de $\mathcal{F}(n)$ qui étendent les sections $f_i^n u_j$. Ces sections définissent un morphisme

$$\mathcal{O}_X(-n)^N \longrightarrow \mathcal{F}$$

surjectif sur tous les ouverts U_i , ce qui démontre le théorème. \square

Démonstration du théorème 5.2

Soit \mathcal{F} un faisceau algébrique cohérent sur l'espace projectif $X = \mathbb{P}_m$. D'après le théorème 5.8 on peut trouver une suite exacte de faisceaux algébriques cohérents

$$0 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_m}(-n)^N \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

Cette suite exacte fournit en cohomologie une suite exacte

$$\dots \longrightarrow H^q(X, \mathcal{O}_X(-n))^N \longrightarrow H^q(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^{q+1}(X, \mathcal{G}) \longrightarrow \dots$$

On raisonne par récurrence descendante sur q . Le théorème est vrai pour $q > m$ d'après le théorème 5.1. Par hypothèse de récurrence, on a $\dim H^{q+1}(X, \mathcal{G}) < \infty$. Ainsi, le théorème est une conséquence du lemme suivant :

LEMME 5.10. — *Pour tout entier q et tout entier n , on a*

$$\dim H^q(\mathbb{P}_m, \mathcal{O}(n)) < \infty$$

La démonstration consiste à se ramener au calcul de la cohomologie de $\mathbb{A}^{m+1} - \{0\}$ via la projection $\pi : \mathbb{A}^{m+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}_m$.

Démonstration du lemme 5.10

Considérons la projection canonique $\pi : \mathbb{A}^{m+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}_m$. L'ouvert $\mathbb{A}^{n+1} - \{0\}$ s'identifie au complémentaire de la section nulle dans le fibré de Hopf H . Il en résulte que

$$\begin{aligned} \pi_*(\mathcal{O}) &= \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_m}(n) \\ R^q \pi_*(\mathcal{O}) &= 0 \text{ si } q > 0 \end{aligned}$$

La composante $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_m}(n)$ s'obtient en considérant l'action naturelle du groupe multiplicatif k^* sur $\pi_*(\mathcal{O})$ définie par $(\lambda, f) \mapsto \lambda^* f$, où $\lambda^* f$ est la fonction régulière $z \mapsto f(\lambda z)$. On peut maintenant appliquer le théorème des images directes de Leray :

$$H^q(\mathbb{P}_m, \pi_*(\mathcal{O})) = H^q(\mathbb{A}^{m+1} - \{0\}, \mathcal{O})$$

La cohomologie $H^q(\mathbb{P}_m, \mathcal{O}(n))$ se calcule en considérant l'action naturelle de k^* sur l'espace vectoriel $H^q(\mathbb{A}^{m+1} - \{0\}, \mathcal{O})$ et en calculant la composante des éléments homogènes de degré n . La description donnée dans la section 4 en utilisant la cohomologie de Čech fait intervenir un recouvrement par des ouverts invariants par homothétie ; il en résulte que l'isomorphisme de Leray donné par le théorème des recouvrements acycliques est compatible avec l'action de k^* . On obtient alors

$$H^q(\mathbb{P}_m, \mathcal{O}(n)) = 0$$

pour tout n et q , sauf dans les deux cas suivants

— $q = 0$ et $n \geq 0$: on a alors $H^0(\mathbb{P}_m, \mathcal{O}(n)) = S^n W^*$ où $W = k^{m+1}$ (ce qu'on savait déjà)

— $q = m$ et $n \leq -m - 1$: l'espace vectoriel $H^m(\mathbb{P}_m, \mathcal{O}(n))$ est isomorphe à l'espace vectoriel engendré par les fractions rationnelles

$$\frac{1}{z_0^{\nu_0} \dots z_m^{\nu_m}}$$

où $\nu_i > 0$, et $\sum_i \nu_i = -n$. \square

DÉFINITION 5.11. — Soit \mathcal{F} un faisceau algébrique cohérent sur une variété projective X . La caractéristique d'Euler-Poincaré de X à valeurs dans \mathcal{F} est définie par

$$\chi(X, \mathcal{F}) = \sum_i (-1)^i \dim H^i(X, \mathcal{F})$$

PROPOSITION 5.12. — Soit $0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$ une suite exacte de faisceaux algébriques cohérents sur une variété projective X . Alors

$$\chi(X, \mathcal{F}) = \chi(X, \mathcal{F}') + \chi(X, \mathcal{F}'').$$

Démonstration. Ceci résulte de la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte $0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$. \square

5.3. Théorèmes A et B

Il s'agit de montrer que si on considère un faisceau algébrique cohérent \mathcal{F} sur une variété algébrique projective X , la cohomologie de $\mathcal{F}(n)$ s'annule en degré > 0 pour n assez grand. En même temps, nous formulons aussi le théorème A qui précise l'énoncé que nous avons vu dans la section précédente.

THÉOREME 5.13. — Soit X une variété algébrique projective, et \mathcal{F} un faisceau algébrique cohérent sur X . Il existe un entier N tel que pour $n \geq N$

- (A) le faisceau $\mathcal{F}(n)$ est engendré par ses sections globales
- (B) la cohomologie $H^q(X, \mathcal{F}(n))$ est nulle pour $q > 0$.

Démonstration. On a déjà trouvé dans la section ci-dessus un entier m tel que $\mathcal{F}(m)$ soit engendré par ses sections globales. Ainsi le morphisme naturel

$$H^0(X, \mathcal{F}(m)) \otimes \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{F}(m)$$

est surjectif. En tensorisant par $\mathcal{O}(\ell)$ on obtient un morphisme

$$H^0(X, \mathcal{F}(m)) \otimes \mathcal{O}(\ell) \longrightarrow \mathcal{F}(m + \ell)$$

qui est encore surjectif, et puisque $\mathcal{O}(\ell)$ est engendré par ses sections globales pour $\ell \geq 0$, ceci implique l'assertion (A). Pour l'assertion (B) on peut supposer que X est l'espace projectif, et on raisonne par récurrence descendante sur q , l'énoncé étant trivial pour $q > \dim X$. On écrit \mathcal{F} comme quotient d'une somme directe de faisceaux $\mathcal{O}(-m)$, ce qui fournit une suite exacte de faisceaux algébriques cohérents

$$0 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{O}(-m)^k \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

L'énoncé est trivialement vrai pour le faisceau $\mathcal{O}(-m)$ d'après la description donnée ci-dessus de la cohomologie : il suffit de choisir $N \geq m$. On applique l'hypothèse de récurrence au faisceau \mathcal{G} ; il existe donc un entier $N_1 \geq m$ tel que pour $n \geq N$ on ait $H^{q+1}(X, \mathcal{G}(n)) = 0$ pour $n \geq N_1$. La suite exacte

$$H^q(X, \mathcal{O}(-m+n))^k \longrightarrow H^q(X, \mathcal{F}(n)) \longrightarrow H^{q+1}(X, \mathcal{G}(n))$$

montre que $H^q(X, \mathcal{F}(n)) = 0$ pour $n \geq N_2$ où $N_2 = \text{Max}(N, N_1)$. \square

5.4. Cohérence des images directes

En général, l'image directe d'un faisceau algébrique cohérent par un morphisme n'est pas un faisceau algébrique cohérent, mais seulement quasi-cohérent. Le même résultat reste vrai pour les images directes supérieures.

LEMME 5.14. — Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de variétés algébriques, et \mathcal{F} un faisceau quasi-cohérent sur X . Alors

- (i) les images directes $R^q f_*(\mathcal{F})$ sont des faisceaux quasi-cohérents.
- (ii) Si Y est affine et $B = \mathcal{O}(Y)$, l'image directe $R^q f_*(\mathcal{F})$ est le faisceau quasi-cohérent associé au B -module $H^q(X, \mathcal{F})$.

Démonstration. (i) Considérons un recouvrement fini $\mathcal{U} = (U_i)_{1 \leq i \leq \ell}$ de X par des ouverts affines ; on désigne par $\mathcal{F}_{i_0, \dots, i_p}$ la restriction de \mathcal{F} à l'ouvert U_{i_0, \dots, i_p} et par f_{i_0, \dots, i_p} la restriction de f à cet ouvert. Il résulte de la description 5.3 des images directes que $R^q f_*(\mathcal{F})$ et du théorème des recouvrement acycliques de Leray que le morphisme canonique

$$H^q(f_*(\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}))) \longrightarrow R^q f_*(\mathcal{F})$$

est un isomorphisme. Mais $f_*(\check{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})) \simeq \bigoplus_{i_0 < \dots < i_p} f_{i_0, \dots, i_p}(\mathcal{F}_{i_0, \dots, i_p})$. C'est donc un faisceau quasi-cohérent, et par suite $R^q f_*(\mathcal{F})$ est quasi-cohérent.

(ii) Supposons $Y = \text{Spec } B$. Le foncteur section est exact sur la catégorie des faisceaux algébriques quasi-cohérents d'après le corollaire 4.3 du chapitre 2 ; on obtient d'après le lemme 1.1 un isomorphisme de B -modules

$$H^q(\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})) \xrightarrow{\sim} \Gamma(Y, R^q f_*(\mathcal{F}))$$

et par suite un isomorphisme $H^q(X, \mathcal{F}) \simeq \Gamma(Y, R^q f_*(\mathcal{F}))$. Le théorème 4.4 du chapitre 2 entraîne le résultat. \square

Morphismes projectifs

DÉFINITION 5.15. — *Un morphisme de variétés algébriques $f : X \longrightarrow Y$ est appelé projectif s'il se factorise suivant un diagramme*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j} & Y \times \mathbb{P}^m \\ & \searrow f & \downarrow \text{pr}_1 \\ & & Y \end{array}$$

où j est un plongement sur un sous-espace fermé.

Un morphisme projectif est évidemment fermé. Si $Y' \longrightarrow Y$ est un morphisme quelconque, et $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme projectif, le morphisme $f' : X' = Y' \times_Y X \longrightarrow Y'$ obtenu par changement de base est encore projectif.

THÉORÈME 5.16. — *Soient $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme projectif, et \mathcal{F} un faisceau algébrique cohérent sur Y . Les images directes sont des faisceaux algébriques cohérents.*

Démonstration. On se ramène immédiatement au cas où \mathcal{F} est un faisceau algébrique cohérent sur un produit $X = Y \times \mathbb{P}_m$, le morphisme f étant la première projection. On pose $\mathcal{O}_X(1) = \text{pr}_2^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_m}(1))$. La question étant locale, on peut supposer que Y est une variété affine dont on désigne par B l'algèbre des sections du faisceau structural. Il s'agit de montrer d'après le lemme 5.14 que $H^q(X, \mathcal{F})$ est une B -algèbre de type fini. La même démonstration que dans la section 5.2 montre qu'il existe un morphisme surjectif $\mathcal{O}_X(-n)^N \longrightarrow \mathcal{F}$, de sorte que si on désigne par \mathcal{G} le noyau, on a la suite exacte de faisceaux algébriques cohérents sur X

$$0 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{O}_X(-n)^N \longrightarrow \mathcal{F}$$

On raisonne par récurrence descendante sur q , l'énoncé étant évident pour q suffisamment grand.

LEMME 5.17. — *Posons $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(i)$. Alors $R^q f_*(\mathcal{L})$ est un faisceau algébrique cohérent sur Y .*

Posons $\mathcal{H} = \mathcal{P}_m(-n)^N$. Alors l'énoncé ci-dessus entraîne que $H^q(Y, \mathcal{H})$ est un B -module de type fini. Considérons alors la suite exacte de cohomologie

$$H^q(X, \mathcal{H}) \longrightarrow H^q(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^{q+1}(X, \mathcal{G})$$

D'après l'hypothèse de récurrence, $H^{q+1}(X, \mathcal{G})$ est un B -module de type fini. Par suite $H^q(X, \mathcal{F})$ est un B -module de type fini. \square

Démonstration du lemme 5.17

On peut encore supposer que Y est affine, d'algèbre $B = \mathcal{O}(Y)$. On a alors

$$H^q(X, \mathcal{O}_X(i)) = B \otimes_k H^q(\mathbb{P}_m, \mathcal{O}(i))$$

En effet, considérons un recouvrement ouvert \mathcal{U} de \mathbb{P}_m par des ouverts affines U_i ; à ce recouvrement est associé un recouvrement \mathcal{V} de $Y \times \mathbb{P}_m$ par les ouverts affines $Y \times U_i$. On a alors

$$\check{C}^\bullet(\mathcal{V}, \mathcal{O}(i)) = B \otimes_k \check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{O}(i))$$

et l'exactitude du foncteur $B \otimes_k -$ montre que $\check{H}^q(\mathcal{V}, \mathcal{O}(i)) = B \otimes_k \check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{O}(i))$. Le théorème des recouvrements acycliques fournit un diagramme commutatif de B -modules

$$\begin{array}{ccc} \check{H}^q(\mathcal{V}, \mathcal{O}(i)) & \longrightarrow & H^q(Y \times \mathbb{P}_m, \mathcal{O}(i)) \\ \uparrow \wr & & \uparrow \\ B \otimes \check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{O}(i)) & \longrightarrow & B \otimes_k H^q(\mathbb{P}_m, \mathcal{O}(i)) \end{array}$$

dans lequel les flèches horizontales sont des isomorphismes. Il en résulte que la seconde flèche verticale est un isomorphisme, ce qui achève la démonstration. \square

Application

L'application suivante a déjà été utilisée au chapitre 2, section 2.5 dans l'étude des systèmes linéaires.

THÉORÈME 5.18. — *Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme projectif. On suppose que f est injectif. Alors f est un morphisme fini.*

Démonstration. La question est locale sur Y ; on peut donc supposer que Y est une variété affine. La principale difficulté est qu'on ne sait pas à priori que X est une variété affine. Ceci nous impose d'introduire une variété affine auxiliaire Z , dont on montrera en fait qu'elle est isomorphe à X . Le faisceau algébrique $f_*(\mathcal{O}_X)$ est cohérent sur Y . Par suite, le module des sections $\mathcal{O}(X)$ est de type fini sur $\mathcal{O}(Y)$; ainsi l'algèbre $A = \mathcal{O}(X)$ est une $\mathcal{O}(Y)$ -algèbre finie. Elle est donc isomorphe à l'algèbre d'une variété algébrique affine Z , et le morphisme $\mathcal{O}(Y) \longrightarrow A = \mathcal{O}(Z)$ fournit un morphisme fini $\pi : Z \longrightarrow Y$ de variétés algébriques affines. Considérons maintenant l'isomorphisme $\mathcal{O}(Z) \simeq \mathcal{O}(X)$; il fournit un morphisme de variétés algébriques $g : X \longrightarrow Z$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & Z \\ & \searrow f & \downarrow \pi \\ & & Y \end{array}$$

Il est clair que le morphisme g est fermé, et puisque $\mathcal{O}(Z) \longrightarrow \mathcal{O}(X)$ injectif, il est dominant, donc surjectif. Par suite, il est bijectif. De plus :

LEMME 5.19. — *Le morphisme g est projectif.*

Démonstration. Si $(f, h) : X \longrightarrow Y' = Y \times \mathbb{P}_m$ est un plongement sur un sous-espace fermé, le morphisme $(g, h) : X \longrightarrow Z' = Z \times \mathbb{P}_m$ est encore un plongement sur un sous-espace fermé. En effet dans le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} X \times_{Y'} Z' & \xrightarrow{\text{pr}_2} & Z' \\ \text{pr}_1 \downarrow & & \downarrow \pi' \\ X & \xrightarrow{(f, h)} & Y' \end{array}$$

la première flèche horizontale pr_2 est un isomorphisme sur un sous-espace fermé, et le morphisme (g, h) est la composée d'une section du morphisme pr_1 avec le morphisme pr_2 . \square

LEMME 5.20. — *Le morphisme de faisceaux $\mathcal{O}_Z \longrightarrow g_*(\mathcal{O}_X)$ induit par g est un isomorphisme.*

Démonstration. Puisque le morphisme g est projectif, on sait que ces deux faisceaux algébriques sur Z sont cohérents. Pour vérifier que le morphisme ci-dessus est un isomorphisme il suffit de vérifier que c'est un isomorphisme sur les espaces de sections globales. Mais c'est le morphisme $\mathcal{O}(Z) \longrightarrow \mathcal{O}(X)$ donné au départ. \square

Fin de la démonstration

Rappelons que g est bijective et projective : c'est donc un homéomorphisme. L'énoncé ci-dessus dit que le morphisme d'espaces annelés $g : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Z, \mathcal{O}_Z)$ est un isomorphisme. Donc $f = g\pi$ est un morphisme fini. \square

On peut aussi démontrer qu'un morphisme projectif à fibres finies est un morphisme fini ; la démonstration si elle est analogue dans ses grandes lignes à celle qui a été donnée ci-dessus est plus difficile. Le point délicat est dans ce cas de montrer que le morphisme g construit ci-dessus est injectif : voir par exemple Hartshorne, chapitre III, corollaire 11.3.

COROLLAIRE 5.21. — *Soit X une variété projective, et $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme injectif. Alors f est un morphisme fini.*

Un tel morphisme f est en effet projectif.

6. Dualité de Serre et Grothendieck

Soient X une variété algébrique projective lisse irréductible de dimension n , et $T(X)$ son fibré tangent. On appelle faisceau dualisant sur X le faisceau inversible

$$\omega_X = \mathcal{O}(\wedge^n T^*(X))$$

des formes différentielles régulières de degré n .

THÉORÈME 6.1. — (*Dualité de Grothendieck*)

(i) On a

$$\dim H^n(X, \omega_X) = 1$$

(ii) Soit \mathcal{F} un faisceau algébrique cohérent sur X . A toute forme linéaire non nulle $I : H^n(X, \omega_X) \longrightarrow k$ est associé un morphisme de foncteurs contravariants en \mathcal{F}

$$\text{Hom}(\mathcal{F}, \omega_X) \longrightarrow H^n(X, \mathcal{F})^*$$

défini par $f \mapsto I \circ f_*$, où f_* est le morphisme $H^n(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^n(X, \omega_X)$ induit en cohomologie. Ce morphisme est un isomorphisme.

(iii) Ce morphisme fonctoriel s'étend en un isomorphisme fonctoriel en \mathcal{F}

$$D : \text{Ext}^q(\mathcal{F}, \omega_X) \xrightarrow{\sim} H^{n-q}(X, \mathcal{F})^*$$

La démonstration de cet énoncé se ramène au cas de l'espace projectif. On peut en fait choisir canoniquement une forme linéaire sur $H^n(X, \omega_X)$. L'assertion (ii) signifie que le foncteur $\mathcal{F} \mapsto H^n(X, \mathcal{F})^*$ est représentable.

6.1. Le fibré canonique d'une sous-variété

Le calcul du fibré canonique d'une sous-variété Y lisse d'une variété X se fait d'abord de manière locale en utilisant le complexe de Koszul. Il faut alors recoller pour obtenir une formule intrinsèque.

Complexe de Koszul

Soit A un anneau local, noethérien, d'idéal maximal \mathfrak{m} , et de corps résiduel k , et F un A -module libre de rang m , rapporté à une base e_1, \dots, e_m . Un élément $v \in F$ définit un complexe de chaînes $K(v)_\bullet$ appelé complexe de Koszul

$$0 \longrightarrow \wedge^m F^* \longrightarrow \wedge^{m-1} F^* \longrightarrow \dots \longrightarrow F^* \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

où la différentielle $d_p : \wedge^p F^* \longrightarrow \wedge^{p-1} F^*$ est la transposée de la multiplication extérieure par v : elle est définie par la formule

$$d_p(u_1 \wedge \dots \wedge u_p) = \sum_{i=1}^p (-1)^{i-1} \langle u_i, v \rangle u_1 \wedge \dots \wedge \widehat{u}_i \wedge \dots \wedge u_p$$

où \widehat{u}_i signifie que l'on enlève u_i . Le complexe $K(v)_\bullet$ s'appelle le complexe de Koszul associé à v . On désigne par v_1, \dots, v_m les composantes de v dans la base et on pose $A_i = A/(v_1, \dots, v_i)$. Plus généralement, si M est un A -module, on pose

$$M_i = M/(v_1, \dots, v_i)M$$

DÉFINITION 6.2. — Soit M un A -module. On dit qu'une suite (v_1, \dots, v_m) d'éléments de \mathfrak{m} est une suite régulière pour M si pour $0 \leq i \leq m-1$, si l'homothétie de rapport v_{i+1} dans M_i est une application injective.

Exemple

Soit A un anneau local noethérien de dimension n . On suppose que A est régulier : ceci signifie que l'espace cotangent de Zariski $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ est un k -espace vectoriel de dimension n , c'est-à-dire qu'il existe n éléments $(v_1, \dots, v_n) \in \mathfrak{m}$ qui engendrent l'idéal maximal \mathfrak{m} (cf. Atiyah et Macdonald [1]). Alors (v_1, \dots, v_n) est une suite régulière de A . Une telle suite régulière s'appelle système de paramètres de A . Le comportement des anneaux locaux réguliers est semblable à celui de l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ d'une variété algébrique X lisse en x . En particulier, un anneau local régulier est intègre (cf. Atiyah-Macdonald [1], lemme 11.23).

PROPOSITION 6.3. — Soit v un élément de F dont les composantes appartiennent à \mathfrak{m} et forment une suite régulière de A . Le morphisme d'augmentation

$$K(v)_\bullet \longrightarrow A_m$$

est un quasi-isomorphisme.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur m . Le résultat est évident pour $m = 1$. On pose $w = \sum_{i=1}^{m-1} v_i e_i$, et $E = \sum_{i=1}^{m-1} A e_i$. On considère le complexe de Koszul $K(w)$ associé. Le dual E^* est identifié à l'orthogonal de e_m . Soit e_i^* la base duale de la base e_i . On a alors $K(w)_i = K(w)_i \oplus K(w)_{i-1} \otimes e_m^*$ et la différentielle est donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} d & (-1)^i v_m \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

et donc une suite exacte de complexes

$$0 \longrightarrow K(w)_\bullet \longrightarrow K(v)_\bullet \longrightarrow K(w)_\bullet[-1] \longrightarrow 0$$

où $K(w)[-1]_\bullet$ est le complexe décalé $K(w)_\bullet$, définie par $K(w)[-1]_p = K(w)_{p-1}$. D'après l'hypothèse de récurrence, on a $H_p(K(v)_\bullet) = 0$ pour $p \geq 2$. La suite exacte d'homologie associée se réduit à

$$0 \longrightarrow H_1(K(v)_\bullet) \longrightarrow H_0(K(w)_\bullet) \xrightarrow{\partial} H_0(K(w)_\bullet) \longrightarrow H_0(K(v)_\bullet) \longrightarrow 0.$$

où l'application ∂ se calcule au moyen du diagramme du serpent : c'est évidemment l'application induite en homologie par la multiplication par $(-1)^i v_m$. Il résulte de

l'hypothèse de récurrence que $H_0(K(v)_\bullet) = A_{m-1}$ et du fait que la suite u_1, \dots, u_m est régulière que ∂ est injective et a pour conoyau A_m . \square

COROLLAIRE 6.4. — *Soit $v \in F$ un élément donc les composantes v_1, \dots, v_m dans une base forment une suite régulière d'éléments de \mathfrak{m} . Soit $A_m = A/(v_1, \dots, v_m)$. Alors*

(i) *pour $q \neq m$, $\text{Ext}^q(A_m, A) = 0$;*

(ii) *on a un isomorphisme $\Lambda^m F \otimes_A A_m \xrightarrow{\sim} \text{Ext}^m(A_m, A)$ et cet isomorphisme ne dépend pas que de l'idéal engendré par les composantes de v .*

Démonstration. Le complexe de Koszul est une résolution libre du A -module A_m . Il résulte de l'exercice 2.1 que $\text{Ext}^q(A_m, A)$ est le faisceau de cohomologie du complexe dual

$$\dots \longrightarrow \Lambda^p F \xrightarrow{v} \Lambda^{p+1} F \longrightarrow \dots$$

dont la différentielle est le produit extérieur par v . Mais ce complexe est isomorphe à $K(v)_\bullet \otimes_A \Lambda^m F^*[m]$, où $K(v)_\bullet$ est défini par $K(v)^p = K(v)_{-p}$, est le complexe décalé vers la droite. Par conséquent sa cohomologie est nulle en degré $\neq m$ et isomorphe à $A_m \otimes_A \Lambda^m F$ en degré m . Puisque le complexe $K(v)$ ne dépend pas du choix de la base, l'isomorphisme n'en dépend pas non plus. \square

COROLLAIRE 6.5. — *Soit X une variété algébrique lisse, et $Y \subset X$ une sous-variété fermée lisse de codimension r . Soit $N_{Y/X}$ le fibré normal de Y dans X . Considérons l'inclusion canonique $j : Y \hookrightarrow X$.*

(i) *On a $\underline{\text{Ext}}^q(j_*(\mathcal{O}_Y), \mathcal{O}_X) = 0$ si $q \neq r$;*

(ii) *On a un isomorphisme canonique de \mathcal{O}_Y -modules*

$$\underline{\text{Ext}}^r(j_*(\mathcal{O}_Y), \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\sim} j_*(\mathcal{O}(\Lambda^r N_{Y/X}))$$

Compte-tenu de la formule d'adjonction, l'isomorphisme (ii) peut aussi se lire

$$j_*(\omega_Y) = \underline{\text{Ext}}^r(j_*(\mathcal{O}_Y), \omega_X)$$

Démonstration. Localement, la sous-variété Y est définie sur un voisinage affine U d'un point de Y par la sous-variété des zéros d'une section v transverse à la section nulle d'un fibré vectoriel F . Au voisinage d'un point $x \in U \cap Y$, les composantes de v dans une trivialisatation définissent une suite régulière de $\mathcal{O}_{X,x}$. Le fibré normal $N_{Y/X}|_U$ est isomorphe à $F|_{U \cap Y}$. On obtient donc sur cet ouvert $\underline{\text{Ext}}^q(j_*(\mathcal{O}_Y), \mathcal{O}_X)|_U = 0$ si $q \neq r$ et par conséquent (i) en recouvrant X par de tels ouverts U . De plus on obtient

$$\Lambda^r F|_{U \cap Y} \xrightarrow{\sim} \underline{\text{Ext}}^q(j_*(\mathcal{O}_Y), \mathcal{O}_X)|_{U \cap Y}$$

On va montrer que ces isomorphismes se recollent. Considérons un autre ouvert affine U' , sur lequel on dispose d'une section v' transverse à la section nulle d'un fibré F' dont la variété des zéros est $Y \cap U'$. Le long de $Y \cap U$ la différentielle de v induit un isomorphisme

$$dv : N_{Y/X}|_U \xrightarrow{\sim} F|_{Y \cap U}$$

et la même chose pour v' . Alors on peut trouver sur $W = U \cap U'$ un morphisme $f : F|_W \longrightarrow F'|_W$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & F|_{Y \cap W} \\ & \nearrow dv & \downarrow f|_{Y \cap W} \\ N_{Y/X} & & \\ & \searrow dv' & F'|_{Y \cap W} \end{array}$$

soit commutatif. Cet homomorphisme f est un isomorphisme le long de $Y \cap W$ donc c'est un isomorphisme au voisinage de $Y \cap W$. Il induit un isomorphisme de complexes $K(fv) \longrightarrow K(v)$ et par suite un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & \Lambda^r F|_{Y \cap W} & \\ & \nearrow & \searrow (1) \\ \Lambda^r N_{Y/X}|_{Y \cap W} & \Lambda^r f \quad (\underline{\text{Ext}}^r(j_*(\mathcal{O}_Y), \mathcal{O}_X))|_{Y \cap W} & \\ & \searrow & \nearrow (2) \\ & \Lambda^r F'|_{Y \cap W} & \end{array}$$

dans lequel toutes les flèches sont des isomorphismes. L'isomorphisme (2) est relatif à la section fv , ou ce qui revient au même à v' puisque l'idéal engendré par les composantes de ces sections est l'idéal de Y dans X . Finalement, on voit que les isomorphismes obtenus sur les ouverts $U \cap Y$ se recollent pour donner un isomorphisme global

$$\Lambda^r N_{Y/X} \xrightarrow{\sim} j^*(\underline{\text{Ext}}^r(j_*(\mathcal{O}_Y), \mathcal{O}_X)).$$

Il en découle l'énoncé \square

6.2. Foncteurs cohomologiques

On a besoin de quelques généralités sur les foncteurs cohomologiques. Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} deux catégories abéliennes.

DÉFINITION 6.6. — *Un foncteur cohomologique (contravariant) de \mathcal{A} dans \mathcal{B} est la donnée*

— *d'une suite de foncteurs contravariants $S^q : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$*

— *pour toute suite exacte $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ de \mathcal{A} d'un morphisme dit de liaison*

$$\delta^i : S^i(A') \longrightarrow S^{i+1}(A'')$$

Ces données doivent satisfaire aux conditions suivantes :

1. *Pour toute suite exacte courte $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ la suite*

$$\dots \longrightarrow S^i(A) \longrightarrow S^i(A') \longrightarrow S^{i+1}(A'') \longrightarrow S^{i+1}(A) \longrightarrow \dots$$

est exacte.

2. *Pour tout morphisme de suites exactes de \mathcal{A}*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

le diagramme

$$\begin{array}{ccc} S^i(A) & \xrightarrow{\delta^i} & S^{i+1}(A'') \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^i(B') & \xrightarrow{\delta^i} & S^{i+1}(B'') \end{array}$$

est commutatif.

Si X est une variété algébrique lisse de dimension n de fibré canonique ω_X , sur la catégorie des faisceaux algébriques, les foncteurs à valeurs dans la catégorie des k -espaces vectoriels $\mathcal{F} \mapsto \text{Ext}^q(\mathcal{F}, \omega_X)$ et $H^{n-q}(X, \mathcal{F})^*$, munis des morphismes de liaison évidents sont des foncteurs cohomologiques. Ce sont les seuls foncteurs cohomologiques que nous aurons à considérer dans la suite.

DÉFINITION 6.7. — *Un foncteur contravariant $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ est dit effaçable si pour tout objet A de \mathcal{A} il existe un morphisme surjectif $P \longrightarrow A$ tel que $F(u) : F(A) \longrightarrow F(P)$ soit nul.*

On verra par exemple que sur l'espace projectif pour $q > 0$, les foncteurs $\text{Ext}^q(\mathcal{F}, \omega_X)$ et $H^{n-q}(X, \mathcal{F})^*$ sont effaçables. Ceci reste vrai sur une variété projective lisse quelconque, mais pour le voir, on a besoin du théorème de dualité de Serre, ce qui ne nous sera donc d'aucune utilité.

THÉORÈME 6.8. — *Soient S et T deux foncteurs cohomologiques. On suppose que pour tout $i > 0$, le foncteur S^i est effaçable. Alors tout morphisme fonctoriel $f^0 : S^0 \longrightarrow T^0$ s'étend en un unique morphisme fonctoriel $f^i : S^i \longrightarrow T^i$ compatible avec les morphismes de liaison.*

Démonstration. On définit f^i par récurrence sur i . Soit A un objet de \mathcal{A} , et $P \xrightarrow{u} A$ un morphisme surjectif tel que $S^{i+1}(u) = 0$. Soit $B = \ker u$. La suite exacte $0 \longrightarrow B \longrightarrow P \longrightarrow A \longrightarrow 0$ fournit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} S^i(P) & \longrightarrow & S^i(B) & \xrightarrow{\delta^i} & S^{i+1}(A) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow f^i & & \downarrow f^i & & & & \\ T^i(P) & \longrightarrow & T^i(B) & \xrightarrow{\delta^i} & T^{i+1}(A) & & \end{array}$$

dans lequel les lignes sont exactes. Le morphisme f^i se factorise de manière unique par un morphisme $f^{i+1} : S^{i+1}(A) \longrightarrow T^{i+1}(A)$. On laisse au lecteur le soin de vérifier que le morphisme obtenu ne dépend pas du choix de P , et qu'il est bien fonctoriel en A . \square

COROLLAIRE 6.9. — *Soient S et T deux foncteurs cohomologiques tels que les foncteurs S^i et T^i soient effaçables pour $i \geq 1$. Tout isomorphisme fonctoriel $S^0 \longrightarrow T^0$ s'étend en un isomorphisme fonctoriel*

$$S^i \longrightarrow T^i.$$

6.3. La dualité

Soit X une variété algébrique lisse de fibré canonique ω_X . Commençons par un lemme qui ramène dans le cas où \mathcal{F} est localement libre le calcul de $\text{Ext}^q(\mathcal{F}, \omega_X)$ à un calcul de cohomologie.

LEMME 6.10. — *Soit \mathcal{F} un faisceau localement libre sur X . Alors*

$$\mathrm{Ext}^q(\mathcal{F}, \omega_X) = \mathrm{H}^q(X, \mathcal{F}^* \otimes \omega_X).$$

Démonstration. Considérons une résolution injective $\omega_X \longrightarrow \mathcal{J}^\bullet$ de ω_X . Par tensorisation par \mathcal{F}^* on obtient encore une résolution $\mathcal{F}^* \otimes \omega_X \longrightarrow \mathcal{F}^* \otimes \mathcal{J}^\bullet$; il suffit de voir que chacun des faisceaux $\mathcal{F}^* \otimes \mathcal{J}^k$ est un faisceau injectif. Mais on a pour tout faisceau algébrique \mathcal{G} sur X

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{F}^* \otimes \mathcal{J}^k) = \mathrm{Hom}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}, \mathcal{J}^k)$$

et par suite le foncteur $\mathcal{G} \mapsto \mathrm{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{F}^* \otimes \mathcal{J}^k)$ est exact, ce qui signifie que $\mathcal{F}^* \otimes \mathcal{J}^k$ est un faisceau algébrique injectif. \square

La démonstration du théorème 6.1 se fait en deux étapes. La première donne la démonstration dans le cas de l'espace projectif et s'appuie sur la notion de foncteur cohomologique. La seconde ramène la démonstration du théorème de dualité sur la variété X à celle du théorème de dualité sur une variété Y dans laquelle X est plongée et s'appuie sur la description du fibré canonique donnée au paragraphe 6.1.

Le cas de l'espace projectif.

Considérons l'espace projectif $X = \mathbb{P}_n$. On sait que $\omega_X \simeq \mathcal{O}_X(-n-1)$ et il résulte de la description de la cohomologie de l'espace projectif à valeurs dans un fibré inversible que $\dim \mathrm{H}^n(X, \omega_X) = 1$. Le choix d'une base de $\mathrm{H}^n(X, \omega_X)$ fournit alors un morphisme fonctoriel

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \omega_{\mathbb{P}_n}) \longrightarrow \mathrm{H}^n(\mathcal{F})^*$$

Il s'agit de prouver que c'est un isomorphisme. Les deux membres sont des foncteurs contravariants exacts à gauche. On est ramené par le théorème A de Serre à prouver que c'est un isomorphisme quand \mathcal{F} est un faisceau inversible $\mathcal{L} = \mathcal{O}(-\ell)$. Il s'agit de prouver le lemme suivant :

LEMME 6.11. — *L'accouplement*

$$\mathrm{H}^0(X, \mathcal{L}^* \otimes \omega_X) \times \mathrm{H}^n(X, \mathcal{L}) \longrightarrow \mathrm{H}^n(X, \omega_X) = k$$

est une application bilinéaire non dégénérée.

Démonstration. Remarquons d'abord que les espaces vectoriels $H^0(X, \mathcal{L}^* \otimes \omega_{\mathbb{P}^n})$ et $H^n(X, \mathcal{L})$ ont même dimension (cf. page 179). De plus, d'après le calcul de la page 179, en cohomologie de Čech, dans le recouvrement ouvert \mathcal{U} standard de $\mathbb{A}^{n+1} - \{0\}$ on obtient une base de la cohomologie $H^n(\mathcal{L})$ en considérant dans $\check{H}^n(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ les classes de cohomologie de Čech des cocycles g_{ν_0, \dots, ν_n} homogènes de degré $-\ell$ dont la composante dans $\Gamma(U_{0, \dots, n}, \mathcal{O})$ par la projection $\check{C}^n(\mathcal{U}, \mathcal{O}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(U_{0, \dots, n}, \mathcal{O})$ est donnée par

$$\frac{1}{z_0^{\nu_0} \dots z_n^{\nu_n}} \in \Gamma(U_{0, \dots, n}, \mathcal{O})$$

où $\nu_i > 0$, et $\sum_i \nu_i = -\ell$. De même, les sections $f_{\lambda_0, \dots, \lambda_n}$ de $\mathcal{L}^* \otimes \omega_X$ définies par les polynômes homogènes $z_0^{\lambda_0-1} \dots z_n^{\lambda_n-1}$, où $\lambda_i \geq 1$ et $\sum_i \lambda_i = \ell$ fournissent une base de $H^0(X, \mathcal{L}^* \otimes \omega_X)$.

Par l'accouplement de l'énoncé, on obtient un cocycle $f_{\lambda_0, \dots, \lambda_n} g_{\nu_0, \dots, \nu_n}$; ce cocycle est un cobord si $\lambda \neq \nu$, et si $\lambda = \nu$, la classe du cocycle obtenu fournit un générateur de la partie homogène de degré $-n - 1$ de $\check{H}^n(\mathcal{U}, \mathcal{O})$. En effet, supposons par exemple $\lambda \neq \nu$, et choisissons un indice $0 \leq i \leq n$ tel que $\lambda_i > \nu_i$. Alors la $n - 1$ -cochaîne de Čech définie par la fraction rationnelle, homogène de degré $-n - 1$

$$c_{0 \dots \hat{i} \dots n} = z_0^{\lambda_0 - \nu_0 - 1} \dots z_n^{\lambda_n - \nu_n - 1} \in \Gamma(U_{0, \dots, \hat{i}, \dots, n}, \mathcal{O})$$

et $c_{0 \dots \hat{s} \dots n} = 0$ pour $s \neq i$ a pour cobord $(-1)^i f_{\lambda_0, \dots, \lambda_n} g_{\nu_0, \dots, \nu_n}$. Donc la classe de cohomologie de ce cocycle est nulle. Si $\lambda = \nu$ le cocycle $f_{\nu_0, \dots, \nu_n} g_{\nu_0, \dots, \nu_n}$ fournit bien le générateur de $H^n(X, \omega_X)$. On a donc bien obtenu une forme bilinéaire non dégénérée. \square

Ceci prouve l'assertion (ii) du théorème 6.1 dans le cas de l'espace projectif. D'après le corollaire 6.9, il reste à prouver pour obtenir l'assertion (iii) que les foncteurs contravariants $\text{Ext}^q(\mathcal{F}, \omega_X)$ et $H^{n-q}(X, \mathcal{F})^*$ sont effaçables pour $q > 0$. D'après le théorème A de Serre, un faisceau algébrique cohérent sur X est un quotient d'une somme directe finie de faisceaux inversibles $\mathcal{O}(-\ell)$, où ℓ est un entier positif. Soit ℓ un entier > 0 ; considérons le fibré inversible $\mathcal{L} = \mathcal{O}(-\ell)$. Il suffit de prouver que $\text{Ext}^q(\mathcal{L}, \omega_X) = 0$ et $H^{n-q}(\mathcal{L}) = 0$ pour $q > 0$. Mais d'après le lemme 6.10 on a $\text{Ext}^q(\mathcal{L}, \omega_X) = H^q(\mathcal{L}^* \otimes \omega_X)$. Ces groupes de cohomologie sont nuls pour $q > 0$ d'après la description de la cohomologie des fibrés inversibles sur l'espace projectif.

Cas général

On considère une variété algébrique projective lisse irréductible X de dimension n , plongée comme sous-variété fermée dans une variété algébrique projective lisse et irréductible Y de dimension $n + r$. On désigne par $j : X \longrightarrow Y$ le morphisme canonique.

Cohomologie

LEMME 6.12. — *Considérons, dans la catégorie des faisceaux algébriques sur Y , une résolution injective $\omega_Y \longrightarrow \mathcal{R}^\bullet$. Soit \mathcal{J}^\bullet le sous-complexe de \mathcal{R}^\bullet défini en degré ℓ par les sections locales de \mathcal{R}^ℓ annihilées par l'idéal de X dans Y . Le complexe $j^*(\mathcal{J}^\bullet)$ est un complexe de faisceaux injectifs dont la cohomologie $\mathcal{H}^q(j^*(\mathcal{J}^\bullet))$ est nulle sauf en degré r et l'on a*

$$\mathcal{H}^r(j^*(\mathcal{J}^\bullet)) = \omega_X$$

Démonstration. Montrons d'abord que $j^*(\mathcal{J}^\ell)$ est un faisceau algébrique injectif sur X . Pour tout faisceau algébrique \mathcal{F} sur X on a

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, j^*(\mathcal{J}^\ell)) = \mathrm{Hom}(j_*(\mathcal{F}), \mathcal{R}^\ell)$$

Le foncteur $\mathcal{F} \mapsto j_*(\mathcal{F})$ est exact. En effet, pour tout point $x \in X$, on a

$$j_*(\mathcal{F})_x = \lim_{V, x \in V} \Gamma(V \cap X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}_x.$$

Il résulte du fait que \mathcal{R}^ℓ est injectif que le foncteur $\mathcal{F} \mapsto \mathrm{Hom}(j_*(\mathcal{F}), \mathcal{R}^\ell)$ est exact. Par suite, $j^*(\mathcal{J}^\ell)$ est un faisceau injectif. On a d'autre part un isomorphisme de faisceaux algébriques $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(j_*\mathcal{O}_X, \mathcal{R}^\bullet) \simeq j_*j^*(\mathcal{J}^\bullet)$ sur Y . Les faisceaux de cohomologie du complexe $j^*(\mathcal{J}^\bullet)$ sont donc les faisceaux $j^*(\underline{\mathrm{Ext}}^q(j_*(\mathcal{O}_X), \omega_Y))$ ⁽¹⁾. D'après le lemme 6.5, ces faisceaux sont nuls sauf en degré $q = r$ où l'on obtient ω_X . \square

Fin de la démonstration

Soit \mathcal{F} un faisceau algébrique cohérent sur X . Considérons la résolution injective $\omega_Y \longrightarrow \mathcal{R}^\bullet$ introduite ci-dessus, et le sous-complexe $\mathcal{J}^\bullet \subset \mathcal{R}^\bullet$ associé. Dans le complexe $\mathcal{K}^\bullet = j^*(\mathcal{J}^\bullet)$ le faisceau des cobords \mathcal{B}^q est injectif pour $q \leq r$, et il en est de même de $\mathcal{K}^r/\mathcal{B}^r$. On a donc une résolution injective de ω_X donnée par le complexe

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}^r/\mathcal{B}^r \longrightarrow \mathcal{K}^{r+1} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{K}^{n+r} \longrightarrow 0$$

Cette résolution injective nous permet de calculer les espaces vectoriels $\mathrm{Ext}^{q+r}(\mathcal{F}, \omega_X)$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^q(\mathcal{F}, \omega_X) &= \mathrm{H}^{q+r}(\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, j^*(\mathcal{J}^\bullet))) \\ &= \mathrm{H}^{q+r}(\mathrm{Hom}(j_*(\mathcal{F}), \mathcal{R}^\bullet)) \\ &= \mathrm{Ext}^{q+r}(j_*(\mathcal{F}), \omega_Y) \end{aligned}$$

⁽¹⁾ Le foncteur (exact) j_* identifie les \mathcal{O}_X -modules avec les \mathcal{O}_Y -modules annihilés par l'idéal de X dans Y ; l'inverse est le foncteur j^* qui coïncide sur ces faisceaux avec j^{-1} . Souvent, on oublie d'écrire j_* à cause de cette identification.

On suppose que le théorème de dualité est démontré pour Y . Alors $\dim H^{n+r}(Y, \omega_Y) = 1$ et le choix d'une forme linéaire non nulle sur $H^{n+r}(Y, \omega_Y)$ fournit sur la catégorie des faisceaux algébriques cohérents \mathcal{G} sur Y un isomorphisme de foncteurs cohomologiques $D : \text{Ext}^{q+r}(\mathcal{G}, \omega_Y) \xrightarrow{\sim} H^{n-q}(Y, \mathcal{G})^*$. Puisque le foncteur $\mathcal{F} \mapsto j_*(\mathcal{F})$ est exact, on obtient un isomorphisme de foncteurs cohomologiques sur la catégorie des faisceaux algébriques cohérents sur X

$$D : \text{Ext}^q(\mathcal{F}, \omega_X) \longrightarrow H^{n-q}(X, \mathcal{F})^*$$

Cet énoncé entraîne pour X évidemment (i) puisque X est irréductible ; il fournit aussi une forme linéaire non nulle sur $H^n(X, \omega_X)$. On obtient pour cette forme linéaire l'assertion (ii) en faisant $q = 0$.

Bien entendu, le résultat reste vrai pour toute autre forme linéaire. Pour obtenir le théorème, il suffit de prendre pour Y un espace projectif dans lequel on plonge la variété X . \square

6.4. Dualité de Serre

Il s'agit d'un cas particulier de l'énoncé ci-dessus :

THÉORÈME 6.13. — *Soient \mathcal{F} un faisceau localement libre sur X , et \mathcal{F}^* le dual de \mathcal{F} . Le choix d'une forme linéaire non nulle sur $H^n(X, \omega_X)$ détermine pour $p + q = n$ un accouplement canonique*

$$H^p(X, \mathcal{F}) \times H^q(X, \mathcal{F}^* \otimes \omega_X) \longrightarrow k$$

qui fait d'un de ces espaces vectoriels le dual de l'autre.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème de dualité de Grothendieck et le lemme 6.10. \square

COROLLAIRE 6.14. — *Soit X une courbe algébrique projective lisse et irréductible. Alors*

$$g = \dim H^0(X, \omega_X) = \dim H^1(X, \mathcal{O}_X).$$

Ce nombre s'appelle le genre de la courbe.

Quand $k = \mathbb{C}$, ce nombre est en fait un invariant topologique de la courbe. En effet, on dispose alors la résolution de de Rham en géométrie analytique pour les faisceaux de formes différentielles holomorphes sur la courbe analytique lisse compacte X_{an} associée

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{O}_{X_{an}} \longrightarrow \Omega_{X_{an}}^1 \longrightarrow 0$$

Un théorème classique de Serre de comparaison entre géométrie algébrique et analytique assure que $\chi(X, \mathbb{C}) = \chi(X, \mathcal{O}_X) - \chi(X, \omega_X)$. Compte-tenu du théorème de dualité de Serre, $\chi(X, \mathcal{O}_X) = -\chi(X, \omega_X)$ et par suite $\chi(X, \mathbb{C}) = 2 - 2g$. Du point de vue réel, la courbe X est une surface compacte réelle orientée, et $\chi(X, \mathbb{C})$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré usuelle :

$$\chi(X, \mathbb{C}) = \sum_i (-1)^i b_i(X)$$

Le nombre de Betti $b_1(X)$ est un invariant topologique, relié au genre par la formule $b_1(X) = 2g$.

Exercice 6.1

Soit X une courbe lisse de degré d dans le plan projectif.

- 1) Montrer que X est irréductible.
- 2) Son genre est donné par la formule

$$g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$$

Si f est la section de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(d)$ dont le schéma des zéros est X , on pourra calculer $\chi(X, \mathcal{O}_X)$ en utilisant la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(-d) \xrightarrow{f} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2} \longrightarrow j_*(\mathcal{O}_X) \longrightarrow 0$$

où $j : X \hookrightarrow \mathbb{P}_2$ est l'inclusion canonique.

DÉFINITION 6.15. — *On appelle diviseur canonique sur une variété algébrique lisse X un diviseur K dont le faisceau inversible associé est isomorphe à ω_X .*

COROLLAIRE 6.16. — *Soit D un diviseur sur une courbe algébrique projective lisse X , et L_D le fibré inversible associé. On pose $\ell(D) = \dim H^0(X, L_D)$. Alors, si K est un diviseur canonique sur X ,*

$$\chi(L_D) = \ell(D) - \ell(K - D)$$

Il existe une interprétation traditionnelle de cette formule qui évite de faire intervenir le fibré inversible associé au diviseur D . En effet, le fibré L_D possède une section régulière canonique s_D , dont le diviseur des zéros est D . Alors cette section induit un isomorphisme

$$L(D) \xrightarrow{\sim} H^0(X, L_D)$$

entre l'espace vectoriel $L(D)$ des fonctions rationnelles $f \in \text{Rat}(X)$ dont le diviseur $\text{div}(f)$ satisfait à la condition

$$\text{div} f \geq -D$$

(ce qui signifie que le diviseur $\text{div}(f) + D$ est un diviseur effectif) et l'espace vectoriel $H^0(X, L_D)$. Cet isomorphisme est donné par $f \mapsto f s_D$. L'espace vectoriel $L(D)$ est donc de dimension finie et on a $\ell(D) = \dim L(D)$.

COROLLAIRE 6.17. — Soient X une variété algébrique lisse de dimension n , et Ω_X^p le faisceau des p -formes différentielles régulières sur X . On considère les nombres de Hodge $h^{p,q}(X) = \dim H^q(X, \Omega_X^p)$. Alors

$$h^{p,q}(X) = h^{n-p,n-q}(X)$$

Démonstration. L'accouplement canonique $\Omega_X^p \times \Omega_X^{n-p} \longrightarrow \omega_X$ induit un isomorphisme de faisceaux localement libres $\Omega_X^p \simeq (\Omega_X^{n-p})^* \otimes \omega_X$. Il suffit donc d'appliquer le théorème de dualité de Serre. \square

Chapitre 4

La formule de Riemann-Roch

Soit E un fibré vectoriel algébrique de rang r sur une variété algébrique projective, lisse et irréductible X . La caractéristique d'Euler-Poincaré de E est par définition celle du faisceau localement libre associé.

On se fixe une courbe algébrique projective irréductible et lisse X de genre g .

1. Degré des fibrés inversibles

Soit $D = \sum_{a \in X} \nu_a a$ un diviseur sur X . Le degré de D est le nombre

$$\deg(D) = \sum_a \nu_a.$$

THÉORÈME 1.1. — *Soient X une courbe algébrique projective lisse et irréductible, de genre g , D un diviseur de degré d sur X , et L le fibré inversible associé. Alors*

$$\chi(L) = d + 1 - g \tag{1.1}$$

Démonstration. Supposons d'abord que D soit un diviseur effectif, de support $|D|$; désignons par f la section du fibré inversible L associé à D . La sous-variété des zéros de f est une sous-variété de dimension 0 qu'on note encore D . Soit $j : D \hookrightarrow X$ l'inclusion canonique. Le faisceau inversible $\mathcal{O}(L^*)$ est isomorphe à l'idéal des fonctions régulières qui s'annulent en tout point $a \in |D|$ avec la multiplicité ν_a . On a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(L^*) \xrightarrow{f} \mathcal{O} \longrightarrow j_*(\mathcal{O}_D) \longrightarrow 0 \tag{1}$$

LEMME 1.2. — *On a un isomorphisme de k -algèbres*

$$H^0(\mathcal{O}_D) = \bigoplus_{a \in |D|} \mathcal{O}_{X,a}/\mathfrak{m}_a^{\nu_a}$$

Cet énoncé est un cas particulier du théorème de décomposition d'une algèbre artinienne en produit d'algèbres locales artiniennes.

Démonstration. Pour tout point $a \in |D|$ l'algèbre $\mathcal{O}_{X,a}/\mathfrak{m}_a^{\nu_a}$ est une algèbre de type fini, locale et artinienne. Soit $j_a : \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,a}/\mathfrak{m}_a^{\nu_a}) \hookrightarrow D$ l'inclusion canonique. On a alors un isomorphisme de faisceaux algébriques sur D

$$\mathcal{O}_D \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{a \in |D|} j_{a*}(\mathcal{O}_{X,a}/\mathfrak{m}_a^{\nu_a})$$

En prenant les sections globales, on obtient l'isomorphisme attendu. \square

On a donc $\dim H^0(\mathcal{O}_D) = \sum_{a \in |D|} \nu_a = \deg(D)$. De plus, la variété algébrique D est de dimension 0 ; d'après le théorème d'annulation (*cf.* section 5.1, chapitre 3) le faisceau structural \mathcal{O}_D n'a pas de cohomologie en degré ≥ 1 ; sa caractéristique d'Euler-Poincaré est donc donnée par $\dim H^0(\mathcal{O}_D) = \sum_{a \in |D|} \nu_a = \deg(D)$. Puisque le faisceau L est trivial sur D , par la formule de projection appliquée à l'inclusion $D \hookrightarrow X$ on a un isomorphisme $\mathcal{O}_D \otimes \mathcal{O}(L) \simeq \mathcal{O}_D$ et par conséquent en tensorisant la suite exacte (1) par le faisceau localement libre $\mathcal{O}(L)$ on obtient encore une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}(L) \longrightarrow j_*(\mathcal{O}_D) \longrightarrow 0$$

et par suite $\chi(L) = \chi(\mathcal{O}_X) + \deg(D)$ ce qui est la formule attendue.

Supposons maintenant que D soit un diviseur quelconque. On écrit $D = A - B$, où A et B sont des diviseurs effectifs, et on désigne par L_A , L_B et $L_D = L_A \otimes L_B^*$ les fibrés inversibles associés respectivement à A , B et D . Soit $j : B \hookrightarrow X$ l'inclusion canonique. La suite exacte $0 \longrightarrow \mathcal{O}(L_B^*) \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}_B \longrightarrow 0$ donne par tensorisation par le faisceau inversible $\mathcal{O}(L_A)$ la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(L_D) \longrightarrow \mathcal{O}(L_A) \longrightarrow j_*(\mathcal{O}_B) \longrightarrow 0.$$

Par suite

$$\begin{aligned} \chi(L_D) &= \chi(L_A) - j_*(\deg(B)) \\ &= \deg(A) - \deg(B) + \chi(\mathcal{O}_X) \\ &= \deg(D) + \chi(\mathcal{O}_X) \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration. \square

COROLLAIRE 1.3. — *Soient X une courbe projective lisse irréductible et L un fibré inversible, muni d'une section rationnelle f non nulle de diviseur associé D . Le nombre $\deg(D)$ est indépendant de f . En particulier, le degré d'un diviseur principal est nul.*

La formule de Riemann-Roch

DÉFINITION 1.4. — Soit L un fibré inversible sur une courbe projective lisse irréductible X . On appelle degré de L le nombre

$$\deg(L) = \chi(L) - \chi(\mathcal{O}_X).$$

Ainsi, le degré du fibré inversible L_D associé à un diviseur D est le degré de D .

COROLLAIRE 1.5. — Soit L un fibré inversible sur une courbe projective lisse irréductible X . Si L a une section régulière non nulle, le degré de L est ≥ 0 .

PROPOSITION 1.6. — L'application $\text{Pic}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$ définie par $L \mapsto \deg(L)$ est un homomorphisme de groupes.

Démonstration. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Div}(X) & \longrightarrow & \text{Pic}(X) \\ & \searrow \text{deg} & \downarrow \text{deg} \\ & & \mathbb{Z} \end{array}$$

La flèche horizontale $\text{Div}(X) \longrightarrow \text{Pic}(X)$ est surjective, et l'application $\text{Div}(X) \xrightarrow{\text{deg}} \mathbb{Z}$ est évidemment un homomorphisme de groupes ; par suite l'application $\text{Pic}(X) \xrightarrow{\text{deg}} \mathbb{Z}$ est un homomorphisme de groupes. \square

COROLLAIRE 1.7. — Soit L un fibré inversible sur X de degré $d > 2g - 2$. Alors

$$\dim H^0(X, L) = d + 1 - g$$

Démonstration. Il suffit de prouver que $H^1(X, L) = 0$. Par dualité de Serre, $H^1(X, L)$ est le dual de $H^0(X, L^* \otimes \omega_X)$. On a d'après le corollaire ci-dessus $\deg(L^* \otimes \omega_X) = \deg \omega_X - d$.

Il suffit d'après le corollaire 1.5 de prouver que ω_X est de degré $2g - 2$. On a $\chi(\omega_X) = \dim H^0(X, \omega_X) - \dim H^1(X, \omega_X)$ et par suite, d'après le théorème de dualité de Serre $\chi(\omega_X) = g - 1$. La formule 1.1 montre alors que $\deg \omega_X = 2g - 2$. \square

Courbes de genre 0

La droite projective \mathbb{P}_1 est évidemment de genre 0. C'est la seule, à isomorphisme près :

COROLLAIRE 1.8. — Soit X une courbe algébrique projective lisse irréductible. Les conditions suivantes sont équivalentes

(i) la courbe X est de genre 0;

(ii) tout fibré inversible L de degré 1 sur X a 2 sections régulières linéairement indépendantes.

(iii) il existe un fibré inversible L de degré 1 sur X ayant deux sections régulières linéairement indépendantes.

Supposons ces conditions satisfaites et considérons un fibré inversible de degré 1 ayant 2 sections linéairement indépendantes. Alors L est engendré par ses sections, et le morphisme canonique

$$f : X \longrightarrow \mathbb{P}(H^0(X, L)^*) = \mathbb{P}_1$$

est un isomorphisme

Démonstration. Supposons X de genre 0. Soit L un fibré inversible de degré 1 sur X . Il résulte du corollaire ci-dessus que $\dim H^0(X, L) = 2$. D'où l'assertion (ii). Evidemment (ii) entraîne (iii). Pour voir que (iii) \Rightarrow (i), il suffit de montrer que si X possède un fibré inversible L ayant deux sections linéairement indépendantes, X est isomorphe à la droite projective. Montrons d'abord qu'un tel fibré L est engendré par ses sections. Soit s une section non identiquement nulle de L . Le diviseur D des zéros de s est alors réduite à un point a ; la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}(L) \longrightarrow \mathcal{O}_D \longrightarrow 0$$

montre qu'il existe une section régulière t de L qui ne s'annule pas en a . Donc L est engendré par ses sections.

Considérons le morphisme surjectif de fibré vectoriels $H^0(X, L) \otimes_{\mathcal{O}_X} \xrightarrow{ev} L$ sur la courbe X . Le fibré dual L^* est un sous-fibré vectoriel de rang 1 du fibré trivial de fibre $H^0(X, L)^*$ sur X , et la propriété universelle de la droite projective $\mathbb{P}(H^0(X, L)^*)$ fournit une application régulière

$$f : X \longrightarrow \mathbb{P}(H^0(X, L)^*)$$

qui associe au point x la droite vectorielle $L_x^* \subset H^0(X, L)^*$. L'image réciproque par f du fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(1)$, quotient du fibré trivial $H^0(X, L) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}}$ est le fibré quotient L . Les sections de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(1)$ fournissent dans cette identification des sections de L , et l'application linéaire obtenue

$$f^* : \Gamma(X, \mathcal{O}(1)) \longrightarrow \Gamma(X, L)$$

est un isomorphisme. La variété des zéros d'une section non identiquement nulle s de $\mathcal{O}(1)$ a alors pour image inverse la variété des zéros de la section correspondante $f^*(s)$ de L .

Puisque L est de degré 1, une telle variété est forcément lisse et réduite à un point. Par suite, les fibres de f sont lisses et réduites à un point. Il en résulte que le morphisme f est un morphisme injectif, et que son application linéaire tangente est injective. Puisque X est projective, le morphisme f est un morphisme fini d'après le corollaire 5.2 du chapitre 3. Il résulte alors du théorème 3.20 du chapitre 2 que c'est un isomorphisme. \square

COROLLAIRE 1.9. — *Soit X une courbe algébrique projective irréductible de genre $g \geq 1$. Alors l'application $X \longrightarrow \text{Pic}(X)$ qui associe au point x le fibré inversible $\mathcal{O}(x)$ est injective.*

Démonstration. Soit L fibré inversible de degré 1 sur X . D'après le corollaire ci-dessus, $\dim H^0(X, L) \leq 1$. Si L provient de X , on a donc $\dim H^0(X, L) = 1$, ce qui détermine de manière unique le point $x \in X$. \square

Exercice 1.1

Soit X une courbe projective lisse et irréductible de genre g . Soit T le fibré tangent.

- 1) Démontrer que $\deg(T) = 2 - 2g$.
- 2) En déduire que si $g > 1$, il n'existe pas de champ de vecteurs régulier non nul sur X .

Exercice 1.2

Soient C et D deux courbes de \mathbb{P}_2 de degré p et q n'ayant pas de composante irréductible commune. Soient $f \in H^0(\mathcal{O}(p))$ (resp. $g \in H^0(\mathcal{O}(q))$) des sections régulières dont la variété des zéros est C (resp. D).

1. Montrer que le conoyau du morphisme

$$\mathcal{O}(-p) \oplus \mathcal{O}(-q) \xrightarrow{(f,g)} \mathcal{O}$$

est un faisceau $\mathcal{O}/(f, g)$ de support fini.

2. On appelle nombre d'intersection de C et D en $x \in C \cap D$ le nombre

$$I_x(C, D) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_x / (f, g)$$

Montrer que ce nombre a un sens.

3. Vérifier que si C et D sont lisses en x et se coupent transversalement en x , on a $I_x(C, D) = 1$.

4. Le nombre $C.D = \sum_{x \in C \cap D} I_x(C, D)$ s'appelle le nombre d'intersection de C et D . Démontrer que ce nombre ne dépend pas de f et g .

Démontrer le théorème de Bézout :

$$\sum_{x \in C \cap D} I_x(C, D) = pq.$$

Exercice 1.3

Soit X une courbe projective lisse irréductible X plongée dans \mathbb{P}_3 .

1. Montrer qu'un hyperplan général H rencontre C suivant une sous-variété $C \cap H$ de dimension 0. Soit $\mathcal{O}_C(1)$ la restriction du fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_3}(1)$ à la courbe C . Démontrer que

$$\dim_k H^0(\mathcal{O}(C \cap H)) = \deg \mathcal{O}_C(1).$$

Ce nombre est donc indépendant de H . On l'appelle le degré de la courbe C .

2. Calculer le degré et le genre de l'image de \mathbb{P}_1 dans \mathbb{P}_3 par le plongement de Veronese

$$[x, y] \mapsto [x^3, x^2y, xy^2, y^3].$$

3. Montrer que l'intersection de 2 surfaces générales Y et Z de \mathbb{P}_3 de degrés respectifs s et t est une courbe lisse irréductible C . Calculer en fonction de s et t , le degré et le genre de C .

Exercice 1.4

Soit X une courbe projective lisse et irréductible de genre g . Soit L un fibré inversible sur X de degré d . On pose pour $i = 0$ et 1

$$h^i(L) = \dim H^i(X, L)$$

1. Vérifier que $h^0(L) \geq \max(0, d + 1 - g)$. Montrer que si l'un des deux nombres $h^0(L)$ et $h^1(L)$ est nul, $h^0(L) = \max(0, d + 1 - g)$.

2. On dit L est spécial si $h^0(L)$ et $h^1(L)$ sont non nuls. Montrer que si L est un fibré spécial, on a $0 \leq d \leq 2g - 2$.

3. On se propose de démontrer le théorème de Clifford : si L est spécial on a

$$h^0(L) \leq \frac{d}{2} + 1.$$

a) Montrer que le noyau de l'application linéaire naturelle

$$H^0(X, L) \otimes H^0(X, T^* \otimes L^*) \longrightarrow H^0(X, T^*)$$

ne contient pas de tenseur décomposé.

b) Soit $\Sigma \subset \mathbb{P}(H^0(X, L) \otimes H^0(X, T^* \otimes L^*))$ les classes des tenseurs décomposés, c'est-à-dire l'image du plongement de Segre. Dédurre de la question a) qu'il existe un morphisme fini $\Sigma \longrightarrow \mathbb{P}(H^0(X, T^*))$.

c) Evaluer la dimension de Σ . Dédurre de b) et de la formule de Riemann-Roch que l'on a

$$h^0(L) \leq \frac{d}{2} + 1.$$

2. Fibrés vectoriels de rang quelconque

La formule 1.1 relie le degré d'un fibré inversible L sur X à la caractéristique d'Euler-Poincaré. On se propose de l'étendre aux fibrés vectoriels de rang quelconque.

DÉFINITION 2.1. — Soit E un fibré vectoriel algébrique de rang r sur une courbe algébrique projective lisse X . On appelle degré de E le degré du fibré inversible $L = \wedge^r E$.

THÉORÈME 2.2. — (Formule de Riemann-Roch) Soit E un fibré vectoriel algébrique de rang r et de degré d sur une courbe algébrique projective irréductible et lisse X de genre g . On a

$$\chi(X, E) = d + r(1 - g)$$

La démonstration se ramène au cas des fibrés inversibles.

LEMME 2.3. — Soit E un fibré vectoriel algébrique de rang r et de degré d sur une courbe algébrique projective lisse X . Le fibré E a une filtration croissante $F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_r = E$ par des sous-fibrés F_i de rang i .

Démonstration. On raisonne par récurrence sur le rang r . Pour $r = 1$, il n'y a rien à démontrer. Considérons un plongement $X \subset \mathbb{P}_m$ et désignons par $\mathcal{O}_X(1)$ le fibré inversible induit par $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_m}(1)$. Soit $E(n) = E \otimes \mathcal{O}_X(n)$. D'après le théorème A de Serre, on sait qu'il existe un entier n tel que le fibré $E(n)$ soit engendré par ses sections. D'après la proposition 1.16 du chapitre 2, le fibré $E(n)$ a une section partout non nulle, ce qui signifie que le fibré E a un sous-fibré F_1 de rang 1 isomorphe à $\mathcal{O}_X(-n)$. Considérons le fibré quotient $E' = E/F_1$, et désignons par $\pi : E \longrightarrow E'$ la projection canonique. Ce fibré est de rang $r - 1$ et a donc par hypothèse de récurrence une filtration croissante par des sous-fibrés F'_i ($2 \leq i \leq r$) de rang $i - 1$. Considérons les sous-fibrés $F_i = \pi^{-1}(F'_i)$. On a $F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_r = E$ ce qui définit la suite croissante de sous-fibrés attendue.

Démonstration du théorème 2.2

On a déjà vu que la formule est vraie pour les fibrés inversibles, d'après le théorème 1.1. En vertu du lemme 2.3 ci-dessus, il suffit de vérifier qu'étant donnée une suite exacte de fibrés vectoriels algébriques $0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0$ sur X si la formule est vraie pour E' et E'' , elle est vraie pour E . Mais ceci résulte de l'additivité du rang : si r, r' et r'' sont les rang respectifs de E, E' et E'' , on a $r = r' + r''$, et de l'isomorphisme $\wedge^r E \simeq \wedge^{r'} E' \otimes \wedge^{r''} E''$ ce qui montre que $\deg(E) = \deg(E') + \deg(E'')$. Puisque $\chi(X, E) = \chi(X, E') + \chi(X, E'')$ la formule est vraie pour E si elle l'est pour E' et E'' . \square

Le but des exercices qui suivent est de montrer que tout fibré vectoriel algébrique sur la droite projective est somme directe de fibrés inversibles. Par contre, sur toute courbe de genre $g \geq 1$, il existe des fibrés vectoriels algébriques qui ne sont pas somme directe de fibrés inversibles.

Exercice 2.1

Soit X une variété algébrique projective et F un fibré de rang 2 possédant une section régulière f partout non nulle.

- 1) Montrer qu'on peut associer à la section f une suite exacte de fibrés vectoriels

$$0 \longrightarrow \wedge^2 F^* \longrightarrow F^* \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

2) La suite exacte longue de cohomologie associée à cette suite exacte permet de construire canoniquement une classe $\omega \in H^1(X, \wedge^2 F^*)$. Démontrer que cette suite exacte se scinde si et seulement si $\omega = 0$.

Exercice 2.2

On considère sur \mathbb{P}_1 un fibré vectoriel algébrique F de rang 2, de degré d .

- 1) Vérifier que $\deg(F(i)) = \deg(F) + 2i$. (Utiliser le lemme 2.3)
- 2) On suppose désormais que $d = 0$ ou -1 . En utilisant le théorème de Riemann-Roch, montrer que F a une section non identiquement nulle. Montrer qu'il existe un diviseur ≥ 0 tel que le fibré $E = F \otimes L_{-D}$ ait une section partout non nulle.
- 3) Calculer le degré de E . En déduire que $H^1(\mathbb{P}_1, \wedge^2 E^*) = 0$.
- 4) En déduire E est somme directe de deux fibrés inversibles, et que c'est aussi le cas pour F .
- 5) Étendre ce résultat au cas où F est de rang r quelconque.

Exercice 2.3

On considère un faisceau inversible \mathcal{L} sur une variété algébrique X ; on considère un plongement $\mathcal{L} \hookrightarrow \mathcal{R}$ dans un faisceau algébrique acyclique.

- 1) Démontrer que $H^1(X, \mathcal{L})$ est isomorphe au conoyau de la flèche naturelle

$$\Gamma(X, \mathcal{R}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{R}/\mathcal{L}).$$

2) Soit $u \in \Gamma(X, \mathcal{R}/\mathcal{L})$. On considère le faisceau algébrique \mathcal{F} noyau du morphisme $(p, u) : \mathcal{R} \oplus \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{R}/\mathcal{L}$ où $p : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}/\mathcal{L}$ est la projection canonique. Montrer qu'on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

et que la classe de cohomologie $\omega \in H^1(X, \mathcal{L})$ associée à cette suite exacte s'identifie à l'image de u par l'isomorphisme de la question 1.

3) Montrer que le faisceau algébrique \mathcal{F} est localement libre de rang 2. Vérifier que la classe d'isomorphisme de \mathcal{F} ne dépend que de l'image de u dans $H^1(X, \mathcal{L})$.

Exercice 2.4

Soit X une courbe algébrique projective irréductible et lisse de genre $g \geq 1$, et L un fibré inversible de degré -1 .

1) Rappeler pourquoi $H^1(X, L) \neq 0$.

2) Soit $\omega \in H^1(X, L)$ une classe de cohomologie non nulle, à laquelle on associe une extension comme ci-dessus

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow F \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

bien définie à isomorphisme près. Montrer que pour tout sous-fibré $L' \subset L$, on a $\deg L' < 0$. En déduire que F n'est pas somme directe de fibrés de rang 1.

3. Faisceaux algébriques cohérents sur les courbes

Commençons par définir le rang et le degré d'un faisceau algébrique cohérent sur une variété algébrique réduite.

LEMME 3.1. — *Soit X une variété algébrique réduite et \mathcal{F} un faisceau algébrique cohérent sur X . L'ensemble des points $x \in X$ tels que \mathcal{F}_x soit un module libre sur l'algèbre $\mathcal{O}_{X,x}$ est un ouvert $U \subset X$ partout dense, et la restriction $\mathcal{F}|_U$ est un faisceau localement libre.*

Démonstration. Si \mathcal{F}_x est un module libre de rang r , on a un isomorphisme $\mathcal{O}_{X,x}^r \simeq \mathcal{F}_x$ qui s'étend en un morphisme $\mathcal{O}_V^r \longrightarrow \mathcal{F}_V$ au voisinage de x . Le noyau de ce morphisme est un faisceau algébrique cohérent sur V qui est nul en x , et donc au voisinage de x . Donc ce morphisme est un isomorphisme. Ceci démontre que l'ensemble des points où \mathcal{F}_x est libre est un ouvert ; reste à voir qu'il est partout dense.

Pour tout $x \in X$, il existe un voisinage V sur lequel le faisceau \mathcal{F} a une présentation $\mathcal{O}(E_1) \longrightarrow \mathcal{O}(E_0) \longrightarrow \mathcal{F}|_V$ où E_1 et E_0 sont des fibrés vectoriels sur V . Soit r le rang maximum du morphisme $f : E_1 \longrightarrow E_0$ défini par f . Alors l'ensemble des points $x \in V$ où $f(x)$ est de rang r est un ouvert non vide $W \subset V$, sur lequel l'image est un sous-fibré vectoriel de E_0 . Le conoyau est un fibré vectoriel sur W dont le faisceau des sections est isomorphe à $\mathcal{F}|_W$. Ainsi, $\mathcal{F}|_W$ est localement libre. \square

DÉFINITION 3.2. — *On suppose que X est une variété algébrique intègre. Sur l'ouvert des points où le $\mathcal{O}_{X,x}$ -module \mathcal{F}_x est libre, le rang de \mathcal{F}_x reste constant. On l'appelle le rang de \mathcal{F} . Il est noté $\text{rg}(\mathcal{F})$.*

Exercice 3.1

Soit \mathcal{F} un faisceau algébrique cohérent sur X , de rang r . Montrer que pour tout $x \in X$, la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k$ est $\geq r$.

Exercice 3.2

Soit $0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$ une suite exacte de faisceaux algébriques cohérents sur une variété irréductible X . Montrer que

$$\operatorname{rg}(\mathcal{F}) = \operatorname{rg}(\mathcal{F}') + \operatorname{rg}(\mathcal{F}'').$$

Exercice 3.3

Montrer que si une courbe irréductible est non réduite X en tout point, il existe des faisceaux algébriques cohérents \mathcal{F} tels qu'en tout point $x \in X$ le module \mathcal{F}_x ne soit pas un $\mathcal{O}_{X,x}$ -module libre.

Etant donné un faisceau localement libre \mathcal{E} sur une courbe algébrique projective lisse et irréductible X , le degré de \mathcal{E} est le degré du fibré vectoriel algébrique associé.

THÉORÈME 3.3. — *Soit \mathcal{F} un faisceau algébrique sur une courbe algébrique projective lisse et irréductible X de genre g .*

(i) *Il existe une résolution*

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathcal{E}_0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

par un complexe de faisceaux localement libres \mathcal{E}_i .

(ii) *Le nombre $\deg(\mathcal{E}_0) - \deg(\mathcal{E}_1)$ est indépendant du choix de la résolution. On l'appelle le degré de \mathcal{F} , et on le note $\deg(\mathcal{F})$.*

(iii) *Soit r le rang de \mathcal{F} . Alors*

$$\chi(X, \mathcal{F}) = \deg(\mathcal{F}) + r(1 - g)$$

Démonstration. On sait d'après le théorème A de Serre que \mathcal{F} est un quotient d'un faisceau localement libre \mathcal{E}_0 . Il suffit donc de montrer que le faisceau noyau du morphisme $\mathcal{E}_0 \longrightarrow \mathcal{F}$ est localement libre. Il suffit de vérifier que pour tout point $x \in X$ le module $\mathcal{E}_{1,x}$ est un $\mathcal{O}_{X,x}$ -module libre. Mais on sait que l'algèbre locale $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau principal. Sur un anneau principal, tout sous-module d'un module libre est un module libre : ainsi, $\mathcal{E}_{1,x}$ est un module libre. Ceci démontre (i).

Par additivité de la caractéristique d'Euler-Poincaré et du rang, on obtient $\chi(X, \mathcal{F}) = \deg(\mathcal{E}_0) - \deg(\mathcal{E}_1) + r(1 - g)$ ce qui montre à la fois (ii) et (iii). \square

COROLLAIRE 3.4. — *Soit \mathcal{F} un faisceau algébrique cohérent à support fini sur une courbe algébrique projective et lisse de genre g . On a*

$$\deg(\mathcal{F}) = \dim H^0(X, \mathcal{F}).$$

RÉFÉRENCES

- [1] M.F. ATIYAH ET I.G. MACDONALD, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publishing Company (1969).
- [2] R. GODEMENT, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, Paris (1958).
- [3] R. HARTSHORNE, *Algebraic geometry*, Springer (1977).
- [4] S. LANG, *Algebra*, Addison-Wesley (1984).
- [5] J. LE POTIER, *Cours de maîtrise de géométrie différentielle*, cours polycopié Paris 7 (1996).
- [6] J. LE POTIER, *Lectures on vector bundles*, Cambridge studies in advanced mathematics, 54 (1997)
- [7] D. PERRIN, *Géométrie algébrique, Une introduction*, Savoirs actuels, InterEditions et CNRS Editions (1995)
- [8] I.R. SHAFAREVICH, *Basic algebraic geometry*, Springer (1977).
- [9] J.P. SERRE, *Faisceaux algébriques cohérents*, Ann. of maths 61 (1955) p.197-278.
- [10] J.P. SERRE, *Géométrie algébrique et géométrie analytique*, Ann. Inst. Fourier (1956) p. 1-42.
- [11] J. P. SERRE, *Un théorème de dualité*,