## FEUILLE DE TD NO. 1

FAISCEAUX, LOCALISATION, PRODUIT TENSORIEL

### Localisation

**Définition 1.** Soit $A$ un anneau. Un sous-ensemble $S \subset A$ est dit *multiplicatif* si, pour tout $s, s' \in S$, $ss'$ appartient à $S$ et $1 \in S$

**Exercice 1.** Soit $A$ un anneau. Montrer que:

(1) Si $f \in A$, le sous-ensemble $\{f^n \in A : n \in \mathbb{N}\}$ est un sous-ensemble multiplicatif.[1]
(2) Si $\mathfrak{p} \subset A$ est un idéal premier de $\mathfrak{p}$, alors $A \smallsetminus \mathfrak{p}$ est un sous-ensemble multiplicatif.
(3) Le sous-ensemble des éléments qui ne sont pas des diviseurs de 0 est une partie multiplicative.[2]

**Définition 2.** Soient $A$ un anneau et $S \subset A$ une partie multiplicative. La *localisation* de $A$ par rapport $S$ est le quotient $S^{-1}A$ de $A \times S$ par la relation d'équivalence

$$(a, s) \sim (a', s') \iff \text{il existe } s'' \in S \text{ tel que } s''(s'a - sa') = 0.$$

La classe d'équivalence de $(a, s)$ est notée $a/s$. La localisation $S^{-1}A$ est muni de la structure d'anneau par

$$\frac{a}{s} + \frac{a'}{s'} = \frac{s'a + sa'}{ss'}, \qquad \frac{a}{s} \cdot \frac{a'}{s'} = \frac{aa'}{ss'}.$$

Si $\mathfrak{p} \subset A$ est un idéal premier, la localisation par rapport à $A \smallsetminus \mathfrak{p}$ est notée $A_{\mathfrak{p}}$. Si $f \in A$ la localisation par rapport à $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ est notée $A_f$ ou $A[f^{-1}]$.

**Exercice 2** (Propriété "universelle" de la localisation)**.** Soient $A$ un anneau et $S$ une partie multiplicative de $A$. Soit $\varphi \colon A \to B$ un homomorphisme d'anneaux tel que $\varphi(s) \in B$ est inversible pour tout $s \in S$. Alors il existe un unique homomorphisme d'anneaux $\tilde{\varphi} \colon S^{-1}A \to B$ tel que, pour tout $a \in A$,

$$\tilde{\varphi}(a/1) = \varphi(a).$$

**Exercice 3** (Idéaux premiers du localisé)**.** Soient $A$ un anneau et $S$ une partie multiplicative.

(1) Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $A$ tel que $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$. Montrer que l'idéal de $S^{-1}A$ engendré par $\mathfrak{p}$ est premier.
(2) Soit $\mathfrak{q}$ un idéal premier de $S^{-1}A$. Montrer que $\mathfrak{q} \cap A$ est premier et ne rencontre pas $S$.

Morale: les idéaux premiers de $S^{-1}A$ sont les idéaux premiers de $A$ qui ne rencontrent pas $S$.

**Exercice 4** (Exemples de localisation)**.** Calculer les localisations dans les cas suivants:

(1) $A$ un anneau, $f = 0$;
(2) $A$ un anneau intègre, $\mathfrak{p} = (0)$;

[1] Ici on utilise la convention $0^0 = 1$.

[2] Noter que dans l'anneau nul, 0 n'est pas un diviseur de zéro...

(3) $A = \mathbb{Z}$, $f = p$;[3]
(4) $A = \mathbb{Z}$, $\mathfrak{p} = (p)$;
(5) $A = \mathbb{C}[t]$, $f = t$;
(6) $A = \mathbb{C}[t]$, $\mathfrak{p} = (t)$;
(7) $A = \mathbb{C}[t^2, t^3]$, $f = t^2$;
(8) $A = \mathbb{C}[t]/(t(t-1))$, $f = t$;
(9) $A = \mathbb{C}[t]/(t(t-1))$, $\mathfrak{p} = (t)$;
(10) $A = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $f = 2$;
(11) $A = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $\mathfrak{p} = (2)$.

## Produit tensoriel

**Définition 3.** Soient $A$ un anneau et $B, C$ des $A$-algèbres.

Une $A$-algèbre $P$ muni de homomorphismes de $A$-algèbres $p\colon B \to P$, $q\colon C \to P$ est le *produit tensoriel* de $B$ et $C$ si, pour tout $A$-algèbre $P'$ et tout homomorphisme de $A$-algèbres $p'\colon B \to P'$, $q'\colon C \to P'$, il existe un unique homomorphisme de $A$-algèbres $\varphi\colon P \to P'$ tel que $p' = \varphi \circ p$ et $q' = \varphi \circ q$.

**Exercice 5.** Soient $A$ un anneau et $B, C$ des $A$-algèbres.

(1) Montrer que si le produit tensoriel de $B$ et $C$ existe, alors il est unique à un unique isomorphisme près.
(2) Montrer que le produit tensoriel de $B$ et $C$ existe.

**Définition 4.** Soient $A$ un anneau et $B, C$ des $A$-algèbres. Le produit tensoriel est noté $B \otimes_A C$.

**Exercice 6.** Soient $A$ un anneau et $B$ une $A$-algèbre.

(1) $B \otimes_A A[t] = B[t]$;
(2) si $I \subset A$ est un idéal, $B \otimes_A A/I = B/IB$;
(3) si $S \subset A$ est une partie multiplicative, $S^{-1}A \otimes_A B = S^{-1}B$.

**Exercice 7.** Calculer les produits tensoriels suivants:

(1) $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour $m, n \in \mathbb{Z}$;
(2) $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[t]/(t^2+1) \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$;

**Exercice 8.** Soient $A = B = \mathbb{R}[t]$. On considère la structure de $A$-algèbre sur $B$ donné par l'homomorphisme $A \to B$, $t \mapsto t^2$. Pour $a \in \mathbb{R}$ montrer que $A/(t-a) \otimes_A B$ est isomorphe à

(1) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ si $a > 0$;
(2) $\mathbb{R}[\varepsilon] = \mathbb{R}[t]/(t^2)$ si $a = 0$;
(3) $\mathbb{C}$ si $a < 0$.

On remarquera $\dim_{\mathbb{R}}(A/(t-a) \otimes_A B) = 2$ dans les trois cas.

## Faisceaux

**Exercice 9** ([Har77, Ex. 1.1 Chap. 1])**.** Soient $X$ un espace topologique et $A$ un groupe abélien. Le *faisceau constant* $\underline{A}_X$ est le faisceau associé au préfaisceau $U \mapsto A$.

(1) Pour tout ouvert $U \subset X$ calculer $\underline{A}_X(U)$.
(2) Déduire que le préfaisceau $U \mapsto A$ n'est pas un faisceau.

**Exercice 10** ([Har77, Ex. 1.2 Chap. 1])**.** Soient $F, G$ des faisceaux en groupes abéliens sur un espace topologique $X$, et soit $\varphi\colon F \to G$ un homomorphisme.

(1) Montrer, pour tout $x \in X$, $(\operatorname{Ker}\varphi)_x = \operatorname{Ker}\varphi_x$ et $(\operatorname{Im}\varphi)_x = \operatorname{Im}\varphi_x$.

[3] Ici l'écriture $\mathbb{Z}[p^{-1}]$ s'impose pour indiquer le localisé de $\mathbb{Z}$ où $p$ est inversible. Avec le symbole $\mathbb{Z}_p$ on désigne les ent

(2) Monter que $\varphi$ est injective (resp. surjective, un isomorphisme) si et seulement si $\varphi_x$ est injective pour tout $x \in X$ (resp. surjective pour tout $x \in X$).
(3) Montrer qu'une suite de faisceaux en groupes abéliens
$$\cdots \longrightarrow F_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} F_i \xrightarrow{\varphi_i} F_{i+1} \longrightarrow \cdots$$
est exacte si et seulement si, pour tout $x \in X$, la suite de groupes abéliens
$$\cdots \longrightarrow F_{i-1,x} \xrightarrow{\varphi_{i-1,x}} F_{i,x} \xrightarrow{\varphi_{i,x}} F_{i+1,x} \longrightarrow \cdots$$
est exacte.

**Exercice 11** ([Har77, Ex. 1.3 Chap. 1], [EH00, Exercise I-10])**.** Soit $\varphi\colon F \to G$ un homomorphisme de faisceaux en groupes abéliens sur un espace topologique $X$.
(1) Montrer que $\varphi$ est surjective si et seulement si, pour tout ouvert $U \subset X$ et toute section $g \in G(U)$, il existe un recouvrement $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ de $U$ et pour tout $i \in I$ des sections $f_i \in F(U_i)$ telles que $\varphi(f_i) = g_{|U_i}$.
(2) On va donner plusieurs exemples dans lequels l'application induite sur les sections globales $\varphi\colon F(X) \to G(X)$ n'est pas surjective.
  (a) Soient $X = \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$, $F = G = \mathcal{H}_X$ le faisceau des fonctions holomorphes et $\varphi(f) = f^2$.
  (b) Soit $X = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et $G = \mathcal{H}_X$ le faisceau des fonctions sur $X$. Soient $F_0, F_\infty$ les sous-faisceaux de $G$ des fonctions holomorphes s'annulant respectivement en $0$ et en $\infty$. Soient $F = F_0 \oplus F_\infty$ et $\varphi\colon F \to G$ l'application donnée par l'addition.
  (c) Trouver un exemple où $X$ a trois points.

**Exercice 12** ([Har77, Ex. 1.8 Chap. 1])**.** Soit $0 \to F \to F' \to F''$ une suite exacte courte de faisceaux en groupes abéliens sur un espace topologique $X$. Montrer, pour tout ouvert $U \subset X$, que la suite de groupe abéliens
$$0 \longrightarrow F(U) \longrightarrow F'(U) \longrightarrow F''(U),$$
est exacte.

**Exercice 13** ([Liu02, Ex. 2.13 Chap. 2])**.** Soit $f\colon X \to Y$ une application continue entre espace topologiques. Soit $F$ un faisceau sur $X$ et $G$ un faisceau sur $Y$.
(1) Montrer qu'il existe des homomorphismes canoniques de faisceaux
$$\varphi\colon f^{-1}f_*F \longrightarrow F, \qquad \psi\colon G \to f_*f^{-1}G.$$
Si $f$ est une immersion fermée ou ouverte, $\varphi$ est un isomorphisme.
(2) Donner des exemples d'une immersion fermée et d'une ouverte où $\psi$ n'est pas un isomorphisme.
(3) Montrer que l'application
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(f^{-1}G, F) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(G, f_*F) \\ \alpha & \longmapsto & f_*\alpha \circ \psi \end{array}$$
est une bijection d'inverse $\beta \mapsto \varphi \circ f^{-1}\beta$.

**Exercice 14** ([Liu02, Ex. 2.9 Chap. 2])**.** Soit $F$ un faisceau en groupes abéliens sur $X$ tel que $F_x = 0$ pour tout $x \in X$ sauf un nombre fini de points fermés. Un tel faisceau $F$ est dit *faisceau gratteciel*.
(1) Montrer, pour tout ouvert $U \subset X$,
$$F(U) = \bigoplus_{x\in U} F_x.$$
(2) En déduire $F = 0$ si et seulement si $F(X) = 0$.

## References

[EH00] David Eisenbud and Joe Harris, *The geometry of schemes*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 197, Springer-Verlag, New York, 2000. MR 1730819

[Har77] Robin Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977, Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

[Liu02] Qing Liu, *Algebraic geometry and arithmetic curves*, Oxford Graduate Texts in Mathematics, vol. 6, Oxford University Press, Oxford, 2002, Translated from the French by Reinie Erné, Oxford Science Publications. MR 1917232