Sujets de géométrie algébrique

Joseph Le Potier
Université Paris-Diderot

1 DM1 : Le faisceau des homomorphismes

Soient k un corps algébriquement clos et X une variété algébrique sur k, de faisceau strucutural $\mathcal{O}_X$. Un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules est appelé faisceau algébrique sur X.

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux faisceaux algébriques sur X. Le préfaisceau $U \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$ est un faisceau algébrique, noté $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ et qu'on appelle faisceau des homomorphismes de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{G}$.

Soient x un point de X et $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})_x$ le module des germes de sections de ce faisceau au point x.

(1) Construire un homomorphisme canonique

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})_x \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x)$$

(2) On se propose de démontrer qu'en général, cet homomorphisme n'est pas un isomorphisme. On choisit pour $\mathcal{F}$ le faisceau algébrique somme directe $\mathcal{O}_X^{(\mathbb{N})}$.

(a) Vérifier que $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{O}_X^{(\mathbb{N})}, \mathcal{G})$ est isomorphe à $\mathcal{G}^{\mathbb{N}}$.

(b) Montrer qu'en général l'homomorphisme

$$(\mathcal{G}^{\mathbb{N}})_x \longrightarrow (\mathcal{G}_x)^{\mathbb{N}}$$

n'est pas surjectif. On pourra prendre par exemple pour $\mathcal{G}$ le faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}$ des fonctions régulières sur les ouverts de $\mathbb{A}^1$. Si a_n est une suite infinie de points non nuls de $\mathbb{A}^1$, la suite des germes en 0 des fonctions rationnelles

$$z \longmapsto \frac{1}{z - a_n}$$

ne provient pas de ${\mathcal{G}^{\mathbb{N}}}_0$.

(c) Vérifier qu'en général, l'homomorphisme

$$(\mathcal{G}^{\mathbb{N}})_x \longrightarrow (\mathcal{G}_x)^{\mathbb{N}}$$

n'est pas injectif. Une suite (a_n) de points non nuls deux à deux disctincts de $\mathbb{A}^1$ étant choisie, on pourra prendre pour $\mathcal{G}$ la somme directe de faisceaux algébriques sur $\mathbb{A}^1$ dont le support est le point a_n.

(d) Conclure.

2 DM2 : Variétés algébriques affines

Soit X une variété algébrique sur un corps k algébriquement clos. On désigne par $A = \mathcal{O}(X)$ l'algèbre des sections globales du faisceau structural. Un élément $f \in \mathcal{O}(X)$ définit une fonction continue $X \to k$; on désigne par X_f l'ouvert des points $x \in X$ tels que $f(x) \neq 0$. Soit A_f l'algèbre des fractions à numérateur dans A et dont le dénominateur est une puissance de f.

(1) Contruire un morphisme canonique $A_f \to \mathcal{O}(X_f)$ et démontrer que c'est un isomorphisme. On pourra pour ceci recouvrir X par un nombre fini d'ouverts affines.

On suppose qu'il existe des éléments $F_1, \dots, f_n \in A$ et $u_1, \dots, u_n \in A$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} u_i f_i = 1$$

et que les ouverts X_{f_i} soient affines. On se propose de montrer qu'alors X est une variété affine.

(2) Soit m un entier > 0. Montrer qu'il existe $v_i \in k[u_1, \dots, u_n, f_1, \dots, f_n]$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} u_i f_i^m = 1.$$

(3) Démontrer que A est une k-algèbre de type fini. On pourra remarquer qu'il existe un entier r et des éléments $e_{i,j} \in A$ en nombre fini tels que les fractions $\frac{e_{i,j}}{f_i^r}$ engendrent la k-algèbre $\mathcal{O}(X_{f_i})$. Soit B la sous-algèbre de A engendrée par les éléments f_i, u_i et $e_{i,j}$. Montrer que pour tout $g \in A$, il existe un entier $m > 0$ tels que $f_i^m g \in B$ pour tout $i = 1, \dots, n$. En déduire que $B = A$.

(4) Soit $Y = \operatorname{Spec} A$ la variété algébrique associée à l'algèbre de type fini A, et $\varphi : X \to \operatorname{Spec} A$ le morphisme canonique. Montrer que l'image réciproque de l'ouvert Y_{f_i} est l'ouvert X_{f_i} et que le morphisme induit $X_{f_i} \to Y_{f_i}$ est un isomorphisme. En déduire que φ est un isomorphisme, et conclure.

(5) Application : Soient $\mathbb{P}^n$ l'espace projectif de dimension n, et $\pi : \mathbb{A}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{P}^n$ la projection canonique. On désigne par $z_0, \dots, z_n$ les coordonnées sur $\mathbb{A}^{n+1}$. Soit H un polynôme homogène de degré $d > 0$ sur $\mathbb{A}^{n+1}$ et W l'ouvert de $\mathbb{P}^n$ défini par le complémentaire dans $\mathbb{P}^n$ de l'hypersurface d'équation homogène $H = 0$. Montrer que W est affine. Pour ceci, on pourra introduire pour toute suite d'entiers $i_0, \dots, i_n$ telle que $i_0 + \dots + i_n = d$ la fonction régulière sur W définie pour $z \in \pi^{-1}(W)$ par

$$f_{i_0,\dots,i_n}(\pi(z)) = \frac{z_0^{i_0} \dots z_n^{i_n}}{H(z)}$$

et vérifier que ces fonctions satisfont aux conditions demandées ci-dessus.

3 DM3 : Morphismes finis

Question préliminaire : Soit A un anneau factoriel, et K son corps de fractions. Montrer que tout élément de K entier sur A appartient à A.

Soit k un corpts algébriquement clos de caractéristique 0. Soient X et Y des variétés algébriques affines sur k, de même dimension n et $f : X \to Y$ un morphisme fini. On suppose que X et Y sont intègres, et on désigne par $\operatorname{Rat}(X)$ et $\operatorname{Rat}(Y)$ les corps de fonctions rationnelles de X et Y respectivement. La fibre de f au-dessus d'un point $y \in Y$, notée $f^{-1}(y)$, est une sous-variété de X qui n'est pas en général réduite.

(1) Démontre que f est surjectif et que l'extension $\operatorname{Rat}(Y) \to \operatorname{Rat}(X)$ induite par f est une extension algébrique finie.

On désigne par d le degré de cette extension. Le but du problème est d'interpréter géométriquement ce nombre.

(2) Démontrer que tout ouvert non vide de X contient au moins une fibre de f.

(3) Soit y un point lisse de Y, et $m = \#f^{-1}(y)$ le nombre de points dans la fibre $f^{-1}(y)$. On se propose de montrer dans cette question que

$$m = \#f^{-1}(y) \leq d.$$

On utilisera sans démonstration le fait que si y est un point lisse de Y, alors l'algèbre locale de $\mathcal{O}_{Y,y}$ est un anneau factoriel.

(a) Montrer qu'il existe une fonction régulière $u \in \mathcal{O}(X)$ qui prend m valeurs disctinctes sur la fibre $f^{-1}(y)$.

(b) On considère les inclusions

$$\mathcal{O}(Y) \hookrightarrow \mathcal{O}_{Y,y} \hookrightarrow \mathrm{Rat}(Y) \hookrightarrow \mathrm{Rat}(X).$$

Soit $P \in \mathrm{Rat}(Y)[t]$ le polynôme minimal de u, supposé unitaire. Montrer que toutes les racines de P, dans un corps L contenant $\mathrm{Rat}(X)$ où P se scinde en facteurs de degré 1, sont entières sur l'anneau $\mathcal{O}(Y)$. Déduire des relations entre coefficients et racines et de la question préliminaire que les coefficients de P appartiennent à l'anneau local $\mathcal{O}_{Y,y}$.

(c) En déduire qu'il existe un polynôme $\overline{P} \in k[t]$ de degré $\leq d$ et qui a au moins m racines distinctes. Conclure.

(4) On se propose de montrer qu'il existe un ouvert non vide W de Y tel que pour $y \in W$, la fibre $f^{-1}(y)$ soit lisse et que l'on ait exactement $\# f^{-1}(y) = d$. On choisit cette fois un élement $u \in \mathrm{Rat}(X)$ de degré d sur $\mathrm{Rat}(Y)$.

(a) Montrer qu'il existe un ouvert affine lisse et non vide V de Y telle que u soit une fonction régulière sur l'ouvert $U = f^{-1}(V)$.

(b) Démontrer que les coefficients du polynôme minimal (choisi unitaire) $P \in \mathrm{Rat}(Y)[t]$ de u sont des fonctions régulières sur V.

(c) On désigne par H la sous-variété fermée de $V \times \mathbb{A}^1$ définie par l'idéal de $\mathcal{O}(V \times \mathbb{A}^1) = \mathcal{O}(V)[t]$ engendré par P. Montrer que H est intègre. On considère le morphisme

$$\varphi : U \longrightarrow V \times \mathbb{A}^1$$

défini par $x \mapsto (f(x), u(x))$. Montrer que f se factorise par H en un morphisme $U \to H$ birationnel.

(d) On considère le morphisme $\pi : H \to V$ induit par la première projection. Vérifier que π est un morphisme fini. Trouver un ouvert non vide V au-dessus duquel les fibres de π sont lisses et ont exactement d éléments. (On pourra vérifier que le discriminant Δ de P est un élément non nul de $\mathcal{O}(V)$.)

(e) En déduire qu'il existe un ouvert non vide $W \subset V$ au-dessus duquel les fibres de f sont lisses et ont exactement d élements.

(5) On considère le morphisme $X = \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^3$ défini par

$$(x, y) \mapsto (x^2, xy, y^2)$$

Vérifier que ce morphisme est fini. On désigne par Y son image et par $f : X \to Y$ le morphisme induit. Déterminer Y et trouver le degré d de l'extension algébrique

$$\mathrm{Rat}(Y) \hookrightarrow \mathrm{Rat}(X).$$

Préciser pour chaque point $b \in Y$ les nombres $\# f^{-1}(b)$ et $\dim_k \mathcal{O}(f^{-1}(b))$.

4 DM4 : Le groupe de Picard de la grassmannienne

Soit k un corps algébriquement clos. Soient V un k-espace vectoriel de dimension $m + r$, et $G = \mathrm{Grass}(m, V)$ la grassmannienne des sous-espaces vectoriels $h \subset V$ de dimension m. On rappelle que G est une variété projective, lisse et irréductible de dimension mr. On se propose de montrer que le groupe de Picard de G est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

I

Soient X une variété algébrique lisse et irréductible et $E \to X$ un fibré vectoriel de rang n sur X. On désigne par $\mathrm{Grass}(m, E)$ l'ensemble des couples (x, h) formés d'un point x et d'un sous-espace vectoriel $h \subset E_x$ de dimension m, muni de la projection naturelle $\pi : \mathrm{Grass}(m, E) \to X$ définie par $(x, h) \mapsto x$.

(1) Expliquer comment on peut mettre sur $\mathrm{Grass}(m, E)$ une structure naturelle de variété algébrique lisse et irréductible de dimension $m(n-m)+\dim X$. (On pourra commencer par le cas où E est trivial et procéder par recollement.) Vérifier que la projection π est régulière. Cette variété s'appelle la grassmannienne relative associée au fibré vectoriel E.

(2) Soit $f : Y \to X$ un morphisme de variétés, et $F \subset f^*(E)$ un sous-fibré vectoriel de rang m du fibré image réciproque $f^*(E)$. Montrer que l'application $Y \to \mathrm{Grass}(m, E)$ définie par $y \mapsto (f(y), F_y)$ est régulière.

II

On se fixe dans la suite un sous-espace vectoriel $W \subset V$ de dimension r.

(1) Montrer que les points $h \in G$ tels que $h \cap W \neq \{0\}$ constituent un fermé H de G obtenu comme lieu des zéros d'une section non nulle d'un fibré inversible sur G. (Soient S le sous-fibré universel du fibré trivial V_G sur G de fibre V, et W_G le fibré trivial sur G de fibre W. On remarquera que H est le lieu des points $h \in G$ où le morphisme canonique $S \otimes W_G \to V_G$ n'est pas inversible.) En déduire que toutes les composantes irréductibles de H sont de codimension 1.

(2) Soit $\mathbb{P}(W)$ l'espace projectif des droites ℓ de W et D l'ensemble des couples $(\ell, h) \in \mathbb{P}(W) \times G$ tels que $\ell \subset h$.

   (a) Montrer que D est un fermé de $\mathbb{P}(W) \times G$. On pourra remarquer que D est la variété des zéros d'un morphisme de fibrés vectoriels.

   (b) On considère sur l'espace projectif $\mathbb{P}(W)$ le fibré vectoriel quotient Q de rang $m+r-1$ du fibré trivial $V_{\mathbb{P}(W)}$ de fibre V par le sous-fibré de Hopf H. Démontrer que D est isomorphe à $\mathrm{Grass}(m-1, Q)$. (Utiliser la propriété universelle décrite dans la question 2 de la section I.)

   (c) En déduire que D est lisse et irréductible.

(3) On considère la projection sur le deuxième facteur $q : D \to G$ définie par $(\ell, h) \mapsto h$. Montrer que l'image de q est H. En déduire que H est irréductible.

(4) Montrer que l'ouvert complémentaire de H dans G est isomorphe à l'espace affine $\mathbb{A}^{mr}$. En déduire que le groupe de Picard de G est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

5 DM5 : La cohomologie du complémentaire d'un point de $\mathbb{P}^n$

Soient n un entier ≥ 2, V un k-espace vectoriel de dimension $n+1$, et $\mathbb{P}(V)$ l'espace projectif de dimension n associé. On se propose de décrire la cohomologie de l'ouvert $X = \mathbb{P}(V) - \{O\}$ complémentaire d'un point O, à valeurs dans le faisceau des fonctions régulières.

On se fixe un vecteur $e \in V$ non nul et un sous-espace vectoriel W ne contenant pas e, de sorte qu'on a un isomorphisme $k \oplus W \to V$ défini par $(t, y) \mapsto te + y$ pour $t \in k$ et $y \in W$. On désigne par $[t : y]$ la classe du point $x \in V - \{0\}$ dans l'espace projectif $\mathbb{P}(V)$, et par X l'ouvert complémentaire du point $O = [1 : 0]$ de $\mathbb{P}(V)$ défini par la classe de e. Soient $p : X = \mathbb{P}(V) - \{0\} \to \mathbb{P}(W)$ la projection canonique, définie par $[t : y] \mapsto [y]$, et $K \to \mathbb{P}(W)$ le fibré de Hopf sur $\mathbb{P}(W)$. Enfin, on désigne par $\pi : K^* \to \mathbb{P}(W)$ le fibré inversible sur $\mathbb{P}(W)$ dual du fibré de Hopf.

(1) Démontrer qu'une variété algébrique à la fois projective et affine est finie. En déduire que X n'est pas une variété affine. (On pourra constater que X a des sous-variétés projectives qui ne sont pas finies.)

(2) Démontrer que l'image réciproque du fibré de Hopf K par la projection p est canoniquement isomorphe à la restriction à l'ouvert X du fibré de Hopf H sur $\mathbb{P}(V)$. En déduire que la section de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$ associée à la forme linéaire $V \to k$ définie par $(t, y) \mapsto t$ détermine un morphisme de variétés algébriques $f : X \to K^*$ dans l'espace total K^* rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} & K^* \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "p"'] & \mathbb{P}(W) \end{tikzcd}$$

Vérifier que pour $[t : y] \in X$, on a $f([t : y])(y) = t$. En déduire que le morphisme f est un isomorphisme.

(3) Démontrer que

$$\pi_* \mathcal{O}_{K^*} = \bigoplus_{i \geq 0} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(-i)$$

et que les images directes $R^q \pi_* \mathcal{O}_{K^*}$ sont nulles pour $q > 0$. En déduire que la cohomologie $H^q(X, \mathcal{O}_X)$ est nulle si $q \neq 0$ et $n - 1$, et de dimension infinie pour $q = n - 1$.

6 Examen de février 2002 (4 heures)

La section III est indépendante des sections précédentes. Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique $\neq 2$. Les k-algèbres considérées dans le texte sont commutatives et unitaires.

I

Soit A une k-algèbre de type fini.

(1) Montrer que tout idéal premier de A est de hauteur finie.

(2) Montrer que si A est un anneau factoriel, tout idéal premier de hauteur 1 est principal.

On se propose dans la suite de la section I de montrer la réciproque. On suppose que tout idéal premier de hauteur 1 de A est principal. Soit X : Spec A la variété algébrique affine associée à A.

(3) Soit $f \in A$ un élément non nul et non inversible, et Y la sous-variété de X définie par l'idéal (f). Décrire, en termes d'idéaux premiers de A, les composantes irréductibles de Y. En déduire qu'il existe au moins un idéal premier $\mathfrak{p}$ de hauteur 1 de A contenant f.

(4) On suppose que f est un élément irréductible de A. En déduire que l'idéal (f) est un idéal premier.

(5) En déduire que A est un anneau factoriel.

II

Soit n un entier ≥ 1. On considère l'hypersurface X de $\mathbb{A}^{n+1} = \mathrm{Spec}(k[x_0, \ldots, x_n])$ définie par l'idéal engendré par le polynôme $\sum_{i=0}^n x_i^2 - 1$. On désigne par A l'algèbre de X.

(1) Montrer que X est lisse et irréductible.

(2) Soit Y l'hypersurface de X définie par l'idéal de A engendré par l'image de $x_0 - 1$ dans A. Quels sont les points singuliers de Y ? Démontrer que Y est intègre si et seulement si $n \geq 3$, et irréductible si et seulement si $n \neq 2$.

(3) Démontrer que l'ouvert U de X défini par le complémentaire $U = X - Y$ est une variété algébrique isomorphe à un ouvert de $\mathbb{A}^n$. On pourra associer à tout point $x \in X$ de coordonnées $(x_0, \ldots, x_n)$ le point d'intersection de la droite affine passant par x et le point a de coordonnées $(1, 0, \ldots, 0)$ avec l'hyperplan d'équation $x_0 = 0$.

(4) En déduire que le groupe de Picard $\mathrm{Pic}(X)$ est trivial si $n \neq 2$.

(5) En déduire que si $n \neq 2$, l'algèbre A est un anneau factoriel (utiliser la section I).

III

Le but de ce problème est de donner la description des courbes elliptiques.

Le plan projectif $\mathbb{P}^2$ étant rapporté aux coordonnées homogènes $[u, v, w]$, on désigne par X_λ la courbe de degré 3 de $\mathbb{P}^2$ définie par l'idéal engendré par le polynôme homogène

$$w^2u - v(v-u)(v-\lambda u)$$

où λ est un scalaire distinct de 0 et 1.

(1) Vérifier que la courbe X_λ est lisse. En déduire que X_λ est intègre et de genre 1.

(2) Démontrer que le morphisme de restriction $H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)) \to H^0(X_\lambda, \mathcal{O}_{X_\lambda}(1))$ est un isomorphisme.

On se propose de montrer que toute courbe projective lisse et irréductible de genre $g = 1$ est isomorphe à l'une des courbes X_λ. Soit donc une courbe projective lisse irréductible et de genre $g = 1$. On se fixe un point a de X ; pour tout entier relatif $i \in \mathbb{Z}$ on désigne par $\mathcal{O}_X(ia)$ le fibré inversible associé au diviseur $D = ia$. Si f est un élément non nul de $H^0(X, \mathcal{O}_X(ia))$, on désigne par $\operatorname{div} f$ le diviseur associé.

(3) Expliquer comment on peut mettre une structure d'algèbre graduée sur la somme directe

$$A = \bigoplus_{i \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(ia)).$$

Vérifier que A est intègre. On considère deux éléments homogènes non nuls f et g de A. Montrer que f divise g si et seulement si $\operatorname{div} f \leq \operatorname{div} g$.

(4) Démontrer que $\dim H^0(X, \mathcal{O}_X(ia)) = i$ pour $i > 0$.

Soit t la section canonique de $\mathcal{O}_X(a)$. On considère des sections $x \in H^0(X, \mathcal{O}_X(2a))$ et $y \in H^0(X, \mathcal{O}_X(3a))$ ne s'annulant pas en a. Montrer qu'un tel choix est possible et qu'alors les sections (t^2, x) forment une base de $H^0(X, \mathcal{O}_X(2a))$, et les sections (t^3, tx, y) une base de $H^0(X, \mathcal{O}_X(3a))$.

(5) Montrer que plus généralement que pour $i \geq 0$, l'espace vectoriel $H^0(X, \mathcal{O}_X(ia))$ est engendré par les monômes $t^p x^q y^r$, où (p, q, r) sont trois entiers naturels tels que $p + 2q + 3r = i$. Vérifier que pour $i \leq 5$, ces monômes constituent une base de $H^0(X, \mathcal{O}_X(ia))$. Montrer que pour $i = 6$, ces sections ne sont pas linéairement indépendantes.

(6) Vérifier qu'il existe une constante non nulle A telle que $y^2 + Ax^3$ s'annule en a. En déduire qu'il existe des éléments α et $\beta \in k$ et un polynôme homogène P de degré 3 en deux variables tels que $P(0, 1) \neq 0$ et

$$(y - \alpha tx - \beta t^3)^2 = P(t^2, x).$$

(7) Montrer que, quitte à changer éventuellement y, cette relation peut s'écrire dans l'espace vectoriel $H^0(X, \mathcal{O}_X(6a))$:

$$y^2 = P(t^2, x).$$

Montrer en étudiant le diviseur de degré 6 associé à cette section que le polynôme P a 3 zéros distincts dans $\mathbb{P}^1$. En déduire que par un choix convenable de x et y, cette relation peut s'écrire

$$y^2 = x(x - t^2)(x - \lambda t^2)$$

où λ est une constante distincte de 0 et 1.

(8) On pose $L = \mathcal{O}_X(3a)$. Montrer qu'il existe un morphisme canonique

$$f : X \longrightarrow \mathbb{P}(H^0(X, L)^*) \simeq \mathbb{P}^2$$

qui envoie le point $m \in X$ sur le point $f(m)$ défini par la droite vectorielle de $H^0(X, L)^*$ engendrée par la forme linéaire $s \mapsto \langle s(m), \eta \rangle$, où $s \in H^0(X, L)$ et où η est un forme linéaire non nulle sur la fibre L_m. Montrer que, pour un choix convenable d'une base de $H^0(X, L)^*$, ce morphisme se factorise à travers la cubique X_λ de $\mathbb{P}^2$ d'équation homogène $uw^2 = v(v-u)(v-\lambda u)$ par un morphisme surjectif. (Introduire la base (t^3, tx, y) de $H^0(X, L)$ considérée dans la question 7, sa duale et trouver les coordonnées homogènes de $f(m)$ dans cette base.)

(9) Montrer que l'on a un isomorphisme canonique de fibrés inversibles sur X

$$f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1) \xrightarrow{\sim} L,$$

et que le morphisme associé sur les sections $f^* : H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)) \to H^0(X, L)$ est un isomorphisme.
Montrer que chaque fibre du morphisme induit $f : X \to X_\lambda$ est une sous-variété réduite à un point lisse (on pourra examiner pour $q \in X_\lambda$ le diviseur d'une section non nulle s de $\mathcal{O}_{X_\lambda}(1)$ s'annulant en q, et le diviseur de son image réciproque $f^*(s)$). En déduire que f est un homéomorphisme et que sa différentielle est injective en tout point.

(10) En déduire que f est un isomorphisme.

7 Examen de février 2003 (4 heures)

La section IV peut se traiter indépendamment des sections II et II.

Dans toute l'épreuve, le corps de base k est supposé algébriquement clos de caractéristique 0. On rappelle que si X est une courbe algébrique lisse et irréductible, l'algèbre locale $\mathcal{O}_{X,a}$ en un point a est munie d'une valuation $\nu_a : \mathcal{O}_{X,a} \to \mathbb{N}$ qui s'étend au corps des fractions rationnelles $\mathrm{Rat}(X)$ en une valuation $\nu_a : \mathrm{Rat}(X) \to \mathbb{Z}$.

I

On considère la sous-variété fermée $Y \subset \mathbb{A}^2$ définie par l'idéal de $\mathcal{O}(\mathbb{A}^2)$ engendré par le polynôme $P(x, y) = y^4 - x^5 + 1$ et on désigne par $A = \mathcal{O}(Y)$ l'algèbre des sections du faisceau structural.

(1) Démontrer que Y est une courbe lisse et irréductible. Vérifier qu'en tout point $a \in Y$, les différentielles $d_a x$ et $d_a y$ engendrent l'espace vectoriel cotangent $T_a^* Y$. En quels points de Y chacune de ces formes différentielles s'annulent-elles ? Préciser, pour chacun de ces points, un générateur de l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{Y,a}$.

(2) On désigne par $\Omega(Y)$ le A-module des formes différentielles régulières de degré 1 sur Y. Trouver une relation dans $\Omega(Y)$ entre les formes différentielles dx et dy.

(3) Déterminer les diviseurs $\mathrm{div}(dx)$ et $\mathrm{div}(dy)$ des formes différentielles dx et dy. On pourra introduire les points d'intersection de Y avec les axes de coordonnées, notés $a_\alpha = (\alpha, 0)$ où α parcourt l'ensemble des racines 5èmes de l'unité, et $b_\beta = (0, \beta)$ où β parcourt l'ensemble des racines du polynôme $y^4 + 1$.

(4) On considère le plongement ouvert $\mathbb{A}^2 \to \mathbb{P}^2$ défini par $(x, y) \mapsto [x, y, 1]$. Déterminer l'adhérence $X = \overline{Y}$ de Y dans $\mathbb{P}^2$, et vérifier que X est une courbe lisse. Préciser le genre de X.

(5) Démontrer que le faisceau canonique ω_X est isomorphe à $\mathcal{O}_X(2)$. Quel est le degré de ω_X ?

(6) On considère la forme différentielle rationnelle sur X définie par dx. Déterminer le diviseur $\mathrm{div}(dx)$ sur X.

(7) Soient i et j deux entiers ≥ 0. On considère les formes différentielles rationnelles

$$\theta_{i,j} = \frac{x^i dx}{y^j}.$$

Calculer le diviseur $\operatorname{div}(\theta_{i,j})$ sur X. En déduire que $\theta_{i,j}$ se prolonge en une forme différentielle régulière sur X si et seulement si $j \leq 3$ et $5j \geq 4i + 5$. En déduire une base de $H^0(X, \omega_X)$.

II

Soit X une courbe algébrique projective lisse et irréductible de genre $g \geq 1$.

(1) On appelle coordonnée sur un ouvert U de X une fonction régulière z sur U dont la différentielle dz ne s'annule pas sur U. Montrer que pour tout point $a \in X$ il existe une coordonnée définie sur un voisinage ouvert U de a.

(2) Soit U un ouvert de X, muni d'une coordonnée z. Pour $f \in \mathcal{O}(U)$ on considère la fonction régulière f' sur U définie par

$$df = f' dz$$

et on définit la dérivée i-ème $f^{(i)}$ de f par rapport à z par récurrence en posant $df^{(i)} = f^{(i+1)} dz$. Soit $(u_1, \ldots, u_g)$ une base de l'espace vectoriel $H^0(X, \omega_X)$ des formes différentielles régulières sur X. On pose $u_i|_U = f_i dz$ où f_i est régulière sur U et on considère la matrice carrée W définie par $W_{i,j} = f_j^{(i-1)}$ pour $1 \leq i, j \leq g$.

Monter qu'il existe une section régulière w du fibré inversible $\omega_X^{\otimes \frac{g(g+1)}{2}}$ telle que

$$w|_U = (\det W) dz^{\otimes \frac{g(g+1)}{2}}.$$

(3) Étudier l'influence d'un changement de base dans l'espace vectoriel $H^0(X, \omega_X)$ sur la section w.

(4) On considère un point $a \in X$. Pour $i \in \mathbb{N}$, on considère le faisceau inversible $\mathcal{O}_X(ia)$ associé au diviseur ia, et son dual $\mathcal{O}_X(-ia)$. On pose $\omega_X(-ia) = \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(-ia)$.

(a) Démontrer que $H^0(X, \omega_X(-ia))$ s'identifie au sous-espace vectoriel de $H^0(X, \omega_X)$ des formes différentielles régulières s'annulant à l'ordre $\geq i$ en a. On pose $m_i = \dim H^0(X, \omega_X(-ia))$.

(b) Vérifier que $i \mapsto m_i$ est décroissante, et que $m_i - m_{i+1} \leq 1$. Dessiner l'allure de la suite m_i.

(c) Démontrer que $\dim H^0(X, \omega_X(-ia)) = m_i + i + 1 - g$.

(d) Démontrer que $m_1 = g - 1$.

(5) Soit $a \in X$. On dit qu'un entier $i \geq 1$ est un trou de Weierstrass en a si $m_i < m_{i-1}$. Soit $T(a)$ l'ensemble des trous de Weierstrass en a.

(a) Vérifier que $\#T(a) = g$.

On numérote les trous de Weierstrass en a :

$$1 = i_1 < i_2 < \cdots < i_g$$

et on pose $\nu(a) = \sum_{1 \leq \ell \leq g} i_\ell - \ell$. Un point $a \in X$ tel que $\nu(a) > 0$ est appelé point de Weierstrass.

(b) Montrer qu'il existe une base $(\theta_1, \ldots, \theta_g)$ de $H^0(X, \omega_X)$ telle que si z est une coordonnée au voisinage de a, s'annulant en a, on puisse écrire

$$\theta_\ell = \varphi_\ell z^{i_\ell - 1} dz,$$

où φ_ℓ est une fonction régulière définie au voisinage de a, et ne s'annulant pas en a.

(c) Vérifier que sur un voisinage ouvert convenable U de a, on a

$$w|_U = Az^{\nu(a)} dz^{\otimes \frac{g(g+1)}{2}},$$

où A est une fonction régulière sur U, non nulle au point a.

(d) En déduire que les points de Weierstrass sont en nombre fini. Montrer plus précisément que

$$\sum_a \nu(a) = (g-1)g(g+1).$$

(6) Montrer que si a n'est pas un point de Weierstrass, on a pour $i \geq 1$

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_X(ia)) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq i \leq g; \\ i+1-g & \text{si } i \geq g. \end{cases}$$

(7) On dit qu'une base $(\theta_1, \ldots, \theta_g)$ de $H^0(X, \omega_X)$ est une base adaptée au point a si la suite $\ell \mapsto \nu_a(\theta_\ell)$, où ν_a est la valuation au point a, est strictement croissante. Montrer que la connaissance d'une base adaptée en a suffit pour déterminer les trous de Weierstrass au point a. En déduire que si $(\theta_1, \ldots, \theta_g)$ est une telle base adaptée en a, on a

$$\nu(a) = \sum_\ell \nu_a(\theta_\ell) - \frac{g(g-1)}{2}.$$

III

On considère à nouveau la courbe projective plane X de la section I dont on conserve les notations.

(1) Déterminer une base adaptée au point $\infty = [0,1,0]$ de X.

(2) Calculer les trous de Weierstrass relatifs au point ∞ et la multiplicité $\nu(\infty)$. En déduire que ∞ est un point de Weierstrass de la courbe X.

(3) Calculer pour tout $i \in \mathbb{Z}$ la dimension $\dim H^0(X, \mathcal{O}_X(i\infty))$.

(4) Trouver une base de $H^0(X, \omega_X)$ adaptée au point a_α et une base adaptée au point b_β. On pourra introduire les formes différentielles rationnelles

$$\frac{(x-\alpha)^i dx}{y^j}$$

et

$$\frac{x^i (y-\beta)^j dx}{y^3}.$$

En déduire que les points a_α et b_β sont des points de Weierstrass de X.

(5) Existe-t-il des points de Weierstrass sur X autres que ∞, a_α, b_β ?

IV

Soit Y la courbe algébrique affine introduite dans la section I, et $X = \overline{Y}$ sa complétion.

(1) Comparer le groupe de Picard de Y et celui de X.

(2) Montrer que la restriction de $\mathcal{O}_X(1)$ à l'ouvert Y est un fibré trivial. En déduire que le module des différentielles $\Omega(Y)$ est un A-module libre de rang 1. (Utiliser la question 5 de la section I.)

(3) Retrouver ce résultat à partir de la question 7 de la section I.