TD1. Inégalités, Espaces vectoriels normés, Espaces de Banach

Exercice 1. (Inégalité triangulaire sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) Faire la démonstration du résultat suivant : si $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, alors,

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|,$$

et de plus, si $\alpha \neq 0$, il y a égalité si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $\beta = \lambda\alpha$.

Exercice 2. (Cas d'égalité dans Cauchy-Schwartz) On travaille sur $\mathbb{R}^n$ avec le produit scalaire usuel $x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ et la norme euclidienne notée $\|x\|_2 = \sqrt{x \cdot x}$.

a) Montrer que pour $x \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\|x\|_2 = \sup_{\|y\|_2 = 1} x \cdot y.$$

b) Montrer que pour $x, y \in \mathbb{R}^n$ on a

$$x \cdot y = \|x\|_2 \quad \text{et} \quad \|y\|_2 = 1$$

si et seulement si $x = \|x\| \, y$.

Exercice 3. (Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire) Soit (X, μ) un espace mesuré et $f : X \to \mathbb{C}$ une fonction μ-intégrable telle que

$$\Big| \int f \, d\mu \Big| = \int |f| \, d\mu.$$

On veut montrer que f est alors une fonction positive fois un nombre complexe fixé. Pour cela, on va utiliser les résultats de l'exercice précédent sur $\mathbb{R}^2$.

a) En écrivant $f = g + ih$ avec $g, h : X \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles μ-intégrables, montrer que

$$\Big\| \Big(\int g \, d\mu, \int h \, d\mu \Big) \Big\|_2 = \int \|(f, g)\|_2 \, d\mu$$

où $\| \cdot \|_2$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^2$.

b) Montrer qu'il existe $v_0 = (\alpha_0, \beta_0) \in \mathbb{R}^2$ avec $\|v_0\|_2 = 1$ tel que

$$\int \big(\|(g, h)\|_2 - v_0 \cdot (g, h) \big) \, d\mu = 0$$

c) En déduire qu'il existe un nombre complexe $\xi_0 \in \mathbb{C}$ avec $|\xi_0| = 1$ tel que

$$f = \xi_0 \, |f| \qquad \mu\text{-presque partout.}$$

Exercice 4. (Un exercice d'analyse réelle) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui vérifie la propriété $(*)$ suivante :

$$(*) \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \qquad \liminf_{r \to 0} \frac{f(t+r) + f(t-r) - 2f(t)}{r^2} > 0$$

On veut montrer qu'alors f est convexe sur $\mathbb{R}$. On se fixe donc $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$, $x_0 < x_1$, et on veut montrer que

$$(**) \qquad \forall s \in [0, 1], \quad f((1-s)x_0 + s x_1) \leq (1-s) f(x_0) + s f(x_1).$$

a) Montrer qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F(x) = f(x) - \alpha(x - x_0) - \beta$$

vérifie $F(x_0) = F(x_1) = 0$. Montrer de plus que F est une fonction continue vérifiant $(*)$ et que $(**)$ est vérifié si $F \leq 0$ sur $[x_0, x_1]$.

b) Montrer qui si l'on a pas $F \leq 0$ sur $[x_0, x_1]$, alors F admet un maximum sur $]x_0, x_1[$. En raisonnant au voisinage de ce maximum, aboutir à une contradiction.

Exercice 5. (Les espaces de fonctions sont, en général, de dimension infinie) Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, montrer que l'espace des fonctions continues sur U à valeur dans $\mathbb{R}$ est de dimension infinie. *Indication : on montrera pour cela que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, sa dimension est supérieure à n.*

Exercice 6. (Une inégalité de Sobolev) On travaille avec la mesure de Lebesgue un un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Étant donné une fonction réelle f de carré intégrable sur $[a, b]$, on note $\|f\|_2 := \big(\int_{[a,b]} f^2\big)^{1/2}$, et pour f bornée on note $\|f\|_\infty = \sup_{[a,b]} |f|$.

a) Est-il possible d'avoir, pour une certaine constante $C > 0$, que pour toute fonction continue sur $[a, b]$,

$$\|f\|_\infty \leq C \, \|f\|_2 \; ?$$

b) Soit f une fonction réelle de classe C^1 sur $[a, b]$. Montrer que pour tout $x, y \in [a, b]$ on a

$$|f(x) - f(y)| \leq \|f'\|_2 \sqrt{|x - y|}.$$

c) Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer qu'il existe un $c \in [a, b]$ tel que $|f(c)| \leq \frac{1}{\sqrt{|b-a|}} \|f\|_2$.

d) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ (dépendant seulement de $|b - a|$) tel que pour toute fonction réelle f de classe C^1 sur $[a, b]$ on ait :

$$\|f\|_\infty \leq C \, (\|f\|_2 + \|f'\|_2).$$

Exercice 7. (Inégalité de Hölder inverse) Soit (X, μ) un espace mesuré et soit $p \in]0, 1[$ et $q \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

a) Quel est le signe de q ?

b) Montrer que si f et g sont deux fonctions positives, on a

$$\int fg \, d\mu \geq \Big(\int f^p \, d\mu \Big)^{1/p} \Big(\int g^q \, d\mu \Big)^{1/q}.$$

c) Montrer que pour une fonction positive f on a :

$$\Big(\int f^p \, d\mu \Big)^{1/p} = \inf_{g \geq 0} \frac{\int fg \, d\mu}{\Big(\int g^q \, d\mu \Big)^{1/q}}.$$

Exercice 8. (Généralisation gratuite de Hölder) Soit (X, μ) un espace mesuré et $p, q, r \in]1, +\infty[$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{r}$. Montrer que pour f, g deux fonctions mesurables positives sur X on a

$$\Big(\int (fg)^r \, d\mu \Big)^{1/r} \leq \Big(\int f^p \, d\mu \Big)^{1/p} \Big(\int g^q \, d\mu \Big)^{1/q}.$$

et que de plus, lorsque $\mu(\{f \neq 0\}) \neq 0$, il y a égalité si et seulement si il existe $\lambda \geq 0$ tel que $g^q = \lambda f^p$.

Exercice 9. (Exercice classique d'intégration) Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, et f une fonction positive μ-intégrable. Pour tout $A \in \mathcal{A}$ on pose

$$\nu(A) := \int_A f \, d\mu = \int 1_A \, f \, d\mu.$$

Montrer que cela définit une mesure sur $(X, \mathcal{A})$.
Cette mesure est souvent notée $f\,d\mu$, ou plus précisément, on écrit $d\nu = f\,d\mu$, et on l'appelle la mesure de densité f par rapport à μ.

Exercice 10. (Dualité pour l'entropie) Dans cet exercice, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit f une fonction mesurable positive telle que $f \log(f)$ soit μ-intégrable (i.e. $\int f |\log(f)| \, d\mu < +\infty$) et telle que

$$\int f \, d\mu = 1.$$

a) Soit ϕ une fonction réelle mesurable telle que que $f\phi$ soit μ-intégrable. Montrer que

$$\int f \log\Big(\frac{e^\phi}{f}\Big) \, d\mu = \int f\phi \, d\mu - \int f \log(f) \, d\mu$$

et que

$$\log \int e^\phi \, d\mu \geq \int f \log\Big(\frac{e^\phi}{f}\Big) \, d\mu.$$

Peut-on avoir égalité dans cette inégalité, pour un certain ϕ ?

b) Montrer que

$$\int f \log(f) \, d\mu = \sup_{\int e^\phi \, d\mu \leq 1} \int f\phi \, d\mu,$$

où, pour être plus précis, le sup est pris sur les fonctions réelles ϕ telles que $f\phi$ soit μ-intégrable et $\int e^\phi \, d\mu \leq 1$.

Exercice 11. (Jensen implique Hölder)

a) Dans cette question ν est une mesure de probabilité sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$. Soit f une fonction mesurable positive. En utilisant l'inégalité de Jensen, montrer que

$$q \geq p \geq 1 \Longrightarrow \Big(\int f^p \, d\nu\Big)^{1/p} \leq \Big(\int f^q \, d\nu\Big)^{1/q}.$$

Indication : la fonction $t \to t^{q/p}$ est elle convexe sur $\mathbb{R}^+$?

b) Dans cette question, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré quelconque, et $p, q \in]1, +\infty[$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. En appliquant le résultat précédent dans le cas $p = 1$ et avec une mesure bien choisie, retrouver l'inégalité de Hölder.

Exercice 12. (Les espaces ℓ_p^n) Dans cet exercice, on s'intéressera, entre autre, à l'influence de la dimension dans les équivalences entre les normes $\|\cdot\|_p$ sur $\mathbb{R}^n$, c'est pourquoi on gardera parfois la dimension en indice.
Pour $p \in [1, +\infty)$, et $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on pose

$$\|x\|_p := \|x\|_{\ell_p^n} := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p},$$

et pour $p = +\infty$, $\|x\|_\infty := \|x\|_{\ell_\infty^n} = \max_{i \leq n} |x_i|$. L'espace vectoriel normé correspondant est noté $\ell_p^n = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$.

a) Montrer que $\|\cdot\|_p$ définit bien une norme sur $\mathbb{R}^n$.

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\lim_{q\to+\infty} \|x\|_q = \|x\|_\infty.$$

c) Montrer que si $p \in]1,+\infty[$ et $x, y \in \mathbb{R}^n$ sont tels que

$$\|x\| = \|y\|_p \quad \text{et} \quad \left\|\frac{x+y}{2}\right\|_p = \|x\|_p = \|y\|_p$$

alors $x = y$.

Cette propriété reste-t-elle vraie lorsque $p = 1$ ou $p = +\infty$?

d) Montrer que pour $1 \leq p \leq q \leq +\infty$ on a : pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_{\ell_q^n} \leq \|x\|_{\ell_p^n} \leq n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|x\|_{\ell_q^n}.$$

Montrer aussi que les constantes dans les deux inégalités ci-dessous sont optimales.

e) Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$, on ait :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad c\|x\|_{\ell^n_{\log(n)}} \leq \|x\|_{\ell^n_\infty} \leq \|x\|_{\ell^n_{\log(n)}}.$$

Exercice 13. (Dual de ℓ_p^n) On reprend les notations de l'exercice précédent et on note $x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$. Soit $p \in [1,+\infty]$ et $q \in [1,+\infty]$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

a) Montrer que pour $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$|x \cdot y| \leq \|x\|_p \, \|y\|_q$$

et que pour $y \in \mathbb{R}^n$ donné, on peut trouver un $x \in \mathbb{R}^n$ non-nul tel qu'il y a égalité dans cette inégalité.

b) Montrer que le dual de ℓ_p^n s'identifie à est ℓ_q^n.

Exercice 14. (Norme d'opérateur)

a) Soit $\varphi : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels normés $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$. Montrer que

$$\sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|\varphi(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E\leq 1} \frac{\|\varphi(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E\leq 1} \|\varphi(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E=1} \|\varphi(x)\|_F.$$

b) Soit $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ et $(G, \|\cdot\|_G)$ trois espaces vectoriels normés. On se donne des applications linéaires continues $\varphi \in L(E,F)$ et $\psi \in L(F,G)$. Montrer que $\psi \circ \varphi \in L(E,G)$ et que

$$\|\psi \circ \varphi\|_{E\to G} \leq \|\psi\|_{F\to G} \, \|\varphi\|_{E\to F}.$$

Exercice 15. (Espace S_1 et dual de $L(\ell_2^n)$) On travaille sur $\mathbb{R}^n$ avec le produit scalaire usuel, que l'on note $x \cdot y$, et la norme euclidienne usuelle que l'on notera simplement $|\cdot|$. On identifiera, si l'on veut, un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et sa matrice dans la base canonique, qui est une base orthonormée. Pour $\varphi \in L(\mathbb{R}^n)$, on note φ^* son adjoint, qui est caractérisé par la propriété $\varphi(x) \cdot y = x \cdot \varphi^*(y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, ou de façon équivalente en disant que sa matrice, dans une base orthonormée, est donnée est par la transposée de la matrice de φ .

a) Rappelez brièvement pourquoi, étant donné un endomorphisme autodajoint positif φ de $\mathbb{R}^n$, il existe un endomorphisme autoadjoint positif ψ tel que $\psi \circ \psi = \varphi$. On admettra l'unicité de cet endomorphisme ψ que l'on notera $\sqrt{\varphi}$.

b) Montrer que si $f \in L(\mathbb{R}^n)$, alors $f^* \circ f$ est un endomorphisme autoadjoint positif.

Dans la suite, on note $0 \leq s_1(f) \leq \ldots \leq s_n(f)$ la suite croissante des n-valeurs propres (répétées avec leur multiplicité, donc) de l'endomorphisme $\sqrt{f^* \circ f}$. Ainsi, les $(s_i(f)^2)_{1\leq i\leq n}$ sont les valeurs propres de $f^* \circ f$. Pour $f \in L(\mathbb{R}^n)$ on pose

$$\|f\|_1 := \sum_{i=1}^{n} s_i(f).$$

On notera également $\|\cdot\|_{op}$ la norme d'opérateur sur $L(\mathbb{R}^n)$ associé à la norme euclidienne.

c) Montrer que pour $f \in L(\mathbb{R}^n)$ on a $\|f\|_{op} = s_n(f)$.

d) Soit $f \in L(\mathbb{R}^n)$. Montrer que

$$\|f\|_1 = \mathrm{Tr}(\sqrt{f^* \circ f}).$$

e) Soit $f, g \in L(\mathbb{R}^n)$. Montrer que

$$\mathrm{Tr}(g^* \circ f) \leq \|f\|_1 \, \|g\|_{op}$$

et que pour f donné, on peut trouver un g pour lequel cette inégalité devient une égalité.

f) Montrer que pour $f \in L(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\|f\|_1 = \sup_{\|g\|_{op}\leq 1} \mathrm{Tr}(g^* \circ f).$$

En déduire que $\|\cdot\|_1$ défini une norme sur $L(\mathbb{R}^n)$. On notera $S_1^n = (L(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_1)$ l'espace normé correspondant.

g) Montrer que l'on peut identifier le dual de $(L(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{op})$ et S_1^n.

Exercice 16. (Projections) On rappelle qu'une application linéaire P d'un espace vectoriel E dans lui même est une projection (sous-entendu linéaire) si elle vérifie $P \circ P = P$. On voit alors que $\mathrm{Im}(P) = \ker(P - \mathrm{Id})$ et que l'on a une décomposition en somme directe (algébrique) :

$$E = \ker(P - \mathrm{Id}) \oplus \ker(P) = \mathrm{Im}(P) \oplus \ker(P).$$

On dit aussi que P est une projection sur $F = \mathrm{Im}(P)$ parallèlement à $\ker(P)$.
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé (de dimension infinie, sinon il n'y a rien à dire). Montrer que si P une projection (linéaire) tel que $\ker(P)$ est fermé <u>et</u> $\mathrm{Im}(P)$ de dimension finie, alors P est continue, i.e. $P \in L(E)$.

Exercice 17. (Bilinéaire continue, c'est pareil...) Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ et $(G, \|\cdot\|_G)$ trois espaces vectoriels normés. On se donne une application bi-linaire $\varphi : E \times F \to G$. Montrer que φ est continue (sous-entendu pour la topologie produit) si et seulement si il existe $M \geq 0$ tel que

$$\forall v, w \in E, \qquad \|\varphi(v, w)\|_G \leq M \, \|v\|_E \|w\|_F. \qquad (*)$$

Exercice 18. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Étant donné un sous-ensemble non-vide $A \subset \mathbb{R}^n$, on rappelle que pour $x \in E$, la distance de x à A est donnée par

$$d(x, A) = \inf_{a\in A} \|x - a\|.$$

a) Pour $A \subset E$ non-vide et $x \in E$, comment s'interprète le fait que $d(x, A) = 0$?

b) Soit $A \subset E$ non-vide et $x \in E$ tel que $d(x, A) > 0$. Montre que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $a \in A$ tel que

$$\|x - a\| \leq (1 + \epsilon) d(x, A).$$

c) Soit F un sous-espace de E. Montrer que pour $\lambda > 0$, $x \in E$ et $z \in F$ on a

$$d(\lambda x, F) = \lambda d(x, F) \quad \text{et} \quad d(x + z, F) = d(x, F).$$

d) Soit $F \subsetneq E$ un sous-espace fermé strict de E. Montrer que pour tout $\epsilon \in (0, 1)$ on peut trouver un vecteur $v \in E$ tel que

$$\|v\| = 1 \quad \text{et} \quad d(v, F) \geq 1 - \epsilon.$$

e) Montrer que si E est de dimension infinie, alors sa boule unité n'est pas compacte.

Exercice 19. (Théorème de Hahn-Banach)

a) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et H un hyperplan de E. On se donne une forme linéaire continue sur H, c'est-à-dire une application linéaire continue $\alpha : H \to \mathbb{R}$. Pour simplifier les notations, on supposera (sans perte de généralité) que sa norme est 1, c'est-à-dire

$$\|\alpha\|_{H \to \mathbb{R}} = \sup_{x \in H, \|x\| \leq 1} \alpha(x) = 1.$$

On souhaite prolonger α en une forme linéaire continue sur E sans en augmenter la norme. On se fixe $u \notin H$, de sorte que $E = H \oplus \mathbb{R}u$ (somme directe algébrique).

i) Montrer que

$$\sup_{x \in H} \{\alpha(x) - \|x - u\|\} \leq \inf_{y \in H} \{\alpha(y) + \|y - u\|\}.$$

ii) En déduire qu'il existe un $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x, y \in H, \quad \alpha(x) - \|x - u\| \leq a \leq -\alpha(y) + \|y + u\|.$$

iii) On définit $\tilde{\alpha} : E \to \mathbb{R}$ en posant, pour $x \in H$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$\tilde{\alpha}(x + tu) = \alpha(x) + ta.$$

Montrer que $\tilde{\alpha}$ est une forme linéaire sur E qui vérifie

$$\tilde{\alpha}(z) = \alpha(z) \text{ si } z \in H \quad \text{et} \quad \|\tilde{\alpha}\|_{E \to \mathbb{R}} = 1.$$

(On pourra commencer par majorer $\tilde{\alpha}(x + u)$ et $\tilde{\alpha}(x - u)$ pour $x \in H$.)

b) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie et F un sous espace vectoriel de E. On se donne une forme linéaire (continue) α sur F. Montrer qu'il existe une forme linéaire $\tilde{\alpha}$ sur E avec $\tilde{\alpha} = \alpha$ sur F et telle que

$$\sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} \tilde{\alpha}(x) = \sup_{x \in F, \|x\| \leq 1} \alpha(x).$$

On admettra que le résultat reste vrai pour un espace vectoriel normé quelconque (sans faire l'hypothèse de dimension finie).

c) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et $(E^*, \|\cdot\|_*)$ son dual. Montrer que pour tout $x \in E$, $x \neq 0$ il existe un $v \in E^*$

$$\|v\|_* = 1 \quad \text{et} \quad v(x) = \|x\|.$$

En déduire que pour tout $x \in E$,

$$\|x\| = \sup_{v \in E^*, \|v\|_* \leq 1} v(x)$$

(et que ce sup est un max).