Feuille 2. Espaces L^p

Exercice 1. Soit (X, μ) un espace mesuré et $p \in [1, +\infty]$. Montrer que si $f, g \in L^p(\mu)$, alors $\max(|f|, |g|) \in L^p(\mu)$.

Exercice 2. Soit dt la mesure de Lebesgue, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$. Pour tout $p \in]1, \infty]$, montrer que la forme $\varphi : L^p([0,1], dt) \to \mathbb{K}$ définie par

$$\varphi(f) = \int_0^1 t f(t)\, dt$$

pour tout $f \in L^p([0,1], dt)$ est une forme linéaire continue et calculer sa norme.
L'application $\varphi(f) = f(0)$ définit-elle une forme linéaire sur $L^p([0,1],)$?

Exercice 3. Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini. On notera simplement $\mathrm{d}t$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour $p \geq 1$ et $f \in L^p(\mu)$ on a

$$\int_X |f|^p \, d\mu = p \int_0^{+\infty} t^{p-1} \mu(\{x \in X \; ; \; |f(x)| \geq t\}) \mathrm{d}t.$$

On pourra s'intéresser la fonction $(x, t) \to p t^{p-1} 1_{\{|f| \geq t\}}$ *sur* $\mathbb{R}_+ \times X$.

Exercice 4. Donnez un exemple d'une suite bornée de $L^1(\mathbb{R})$ convergeant simplement vers 0 mais n'ayant pas de limite dans $L^1(\mathbb{R})$.

Exercice 5. Soient $p, q \in [1, +\infty]$ avec $p \neq q$. Donner un exemple de fonction f appartenant à $L^p(\mathbb{R}^+)$ mais n'appartenant pas à $L^q(\mathbb{R}^+)$.

Exercice 6.

a) Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $f \in L^1(\mu)$ et $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions positives de $L^1(\mu)$ convergeant presque partout vers f, et telle que $\lim_{n \to \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$. Montrer que (f_n) converge vers f dans $L^1(\mu)$. (*Indication* : on pourra considérer $g_n = \min(f, f_n)$.)

b) Soit $f_n \in L^1(\mathbb{R}) = L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ définie par $f_n = n \mathbb{1}_{]0,1/n[} - n \mathbb{1}_{]-1/n,0[}$. Montrer que

   i) $(f_n)_{n \geq 1}$ converge p.p. vers 0 et que

   ii) $\lim_{n \to \infty} \int f_n \, d\lambda = 0$.

   La suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge-t-elle vers 0 dans $L^1(\mathbb{R})$?

Exercice 7. Soit $p \geq 1$ et $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions de $L^p(\mu)$ qui converge presque partout vers $f \in L^p(\mu)$.

a) Soit $g_n = 2^{p-1}(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p$. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $g_n \geq 0$.

b) Montrer que f_n converge vers f dans $L^p(\mu)$ si et seulement si $\lim_{n \to \infty} \|f_n\|_{L^p} = \|f\|_{L^p}$. (*Indication* : appliquer le lemme de Fatou à la fonction g_n.)

Exercice 8. On travaille sur $\mathbb{R}^+$ avec la mesure de Lebesgue.

a) Construire $\chi : \mathbb{R}^+ \to [0,1]$ continue, à support inclus dans $[0,2]$ et égal à 1 sur $[0,1]$.

b) Pour $k \geq 1$ on définit $\chi_k(x) := \chi\chi(\frac{x}{k})$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$. Quel est le support de χ_k ? Montrer que $\chi_k \to 1$ simplement sur $\mathbb{R}^+$.

c) Montrer que pour $p \geq 1$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^+)$, la suite $\chi_k f$ converge vers f dans $L^p(\mathbb{R}^+)$.

Exercice 9. Soit $p \in]1,+\infty[$. À toute fonction $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, on associe la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$.

a) Montrer que F est bien définie.

b) On suppose que $f \in C_c(\mathbb{R}_+^*;\mathbb{R}_+)$ (fonction continue sur $\mathbb{R}^+$, à support compact et positive). Montrer que $\int_0^{+\infty} F(x)^p\,dx = -p\int_0^{+\infty} xF(x)^{p-1}F'(x)\,dx$, puis que $\int_0^{+\infty} F(x)^p\,dx = \frac{p}{p-1}\int_0^{+\infty} f(x)F(x)^{p-1}\,dx$.

c) En déduire l'*inégalité de Hardy* pour $f \in C_c(\mathbb{R}_+^*;\mathbb{R}_+)$:

$$\|F\|_{L^p} \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_{L^p}.$$

d) Montrer que l'inégalité reste vraie pour une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ à support compact.

Exercice 10.

Soit (X,μ) un espace mesuré et $p \in]1,+\infty[$. On se donne deux fonction $f,g \in L^p$ (à valeurs complexes).

a) Montrer que pour $t \in]0,1[$ et pour (presque tout) $x \in X$ on a

$$|f(x)|^p - |f(x)-g(x)|^p \leq \frac{1}{t}\left[|f(x)+tg(x)|^p - |f(x)|^p\right] \leq |f(x)+g(x)|^p - |f(x)|^p.$$

On pourra utiliser deux fois la convexité sur $\mathbb{R}^+$ d'une fonction bien choisie en des points et des coefficients bien choisis.

b) Montrer que pour $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ la fonction $\mathbb{R} \ni t \to |\alpha + t\beta|^p$ est dérivable en $t=0$ et calculer sa dérivée.

c) Montrer que la fonction

$$N(t) = \int |f(x)+tg(x)|^p\,d\mu(x)$$

est dérivable en 0^+ avec

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0^+} N = \frac{p}{2}\int |f(x)|^{p-2}\left[\overline{f(x)}g(x) + f(x)\overline{g(x)}\,d\mu(x).\right.$$