Feuille 3. Espaces de Hilbert (1)

Exercice 1.

a) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que c'est un espace pré-hilbertien si et seulement si

$$\forall x, y \in E, \qquad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

On appelle cette propriété *l'identité du parallélogramme.*

b) Soit $(H, \|\cdot\|)$ un espace pré-hilbertien. Montrer que pour $x, y \in H$ on a

$$\|x\| = \|y\| \leq \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \Longrightarrow x = y.$$

Comment peut on interpréter géométriquement ce résultat ?

c) Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On suppose qu'il existe deux parties mesurables $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ qui sont disjointes et de mesure finie non-nulle. Montrer que $L^p(\mu)$ n'est pas un Hilbert si $p \neq 2$.

Exercice 2. (Base de Walsh). Soit $n \geq 1$ et $\Omega_n = \{-1, 1\}^n$, que l'on muni de la mesure de comptage normalisée, $\mu_n(\{x\}) = \frac{1}{2^n}$, c'est-à-dire, pour $f : \Omega_n \to \mathbb{R}$,

$$\int f d\mu_n = \frac{1}{2^n} \sum_{x \in \{-1,1\}^n} f(x_1, \ldots, x_n).$$

a) Montrer que $L^2(\mu_n) = \mathbb{R}^{\Omega_n}$, et que c'est un espace de dimension finie que l'on précisera.

b) Montrer que $\mu_n = \mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_1$ où μ_1 est la mesure sur $\{-1, 1\}$ définie par $\mu_1(\{1\}) = \mu_1(\{-1\}) = \frac{1}{2}$.

c) Pour pour une partie $S \subset \{1, \ldots, n\} =: [n]$ une partie non vide, on introduit $\chi_S : \Omega_n \to \mathbb{R}$ qui est défini par $\chi_S(x) = \prod_{i \in S} x_i$. Pour S vide on pose $\chi_\emptyset \equiv 1$. Montrer que $\{\chi_S, S \subset [n]\}$ forme une base orthonormée de $L^2(\mu)$.

Remarque : on vérifie aussi que les $\{\chi_S, S \subset [n]\}$ sont les caractères sur le groupe (abélien) multiplicatif $(\{-1,1\}^n, \times)$. Ils forment le groupe dual (que l'on peut aussi identifier à $(\mathcal{P}([n], \Delta)$). On vient de voir un exemple de groupe dual G^* d'un groupe abélien (fini) G qui forme une base orthonormée de $L^2(G)$.

Exercice 3. (Partition finie, moyennes.) Considérons un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Supposons que $A_1, \ldots, A_N$ soit une partition de Ω en ensembles de la tribu $\mathcal{A}$, tels que $\mu(A_j) > 0$ pour tout $j = 1, \ldots, N$. Soit F l'ensemble des fonctions (réelles) qui sont constantes sur chaque ensemble de la partition.

a) Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des réunions finies d'ensembles A_j, $j = 1, \ldots, N$. Montrer que $\mathcal{C}$ est une sous tribu de $\mathcal{A}$, et qu'une fonction $\mathcal{A}$-mesurable est $\mathcal{C}$-mesurable si et seulement elle appartient à F.

b) Montrer que F est un sous espace vectoriel de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

c) Montrer que la famille de fonctions $f_j = \mu(A_j)^{-1/2}\, 1_{A_j}$, $j = 1, \ldots, N$ est une base orthonormée de F.

d) Donner une formule pour la projection d'une fonction $f \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sur F.

Exercice 4. Soit f une fonction mesurable sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et telle que la restriction de f à $[0, 2\pi]$ soit intégrable. Montrer que pour tout $T \in \mathbb{R}$ on a

$$\int_{[T, T+2\pi]} f(s)\, ds = \int_{[0,2\pi]} f(t)\, dt.$$

Exercice 5. On travaille sur $[0, 2\pi]$ muni de la mesure de Lebesgue dt normalisée pour être une probabilité, i.e. Il est facile de voir que la famille de fonctions $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ où $e_n(t) = e^{int}$, est une famille orthogonale de $L^2([0, 2\pi])$. On notera, pour f intégrable sur $[0, 2\pi]$,

$$c_n(f) = \langle e_n, f\rangle = \int_{[0,2\pi]} f(t)e^{-int}\, dt.$$

Le but de cet exercice est de vérifier que la famille $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$est base hilbertienne, c'est-à-dire que l'espace qu'elles engendrent (qui s'appelle l'espace des polynômes trigonométriques) est dense dans $L^2([0, 2\pi])$. Par un résultat de cours, il suffit de montrer que pour toute fonction $f \in L^2([0, 2\pi])$, si

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f) = 0, \qquad (*)$$

alors $f = 0$ dans $L^2(m)$, i.e. $f = 0$ p.p. *Commentaire : une méthode classique pour montrer cela est de démontrer d'abord la densité des fonctions continues dans L^2, puis dans le cas des fonctions continues, utiliser le théorème de Weierstrass, que l'on peut montrer en utilisant la convolution avec le noyau de Dirichlet. Nous allons utiliser ici une méthode directe qui ne présuppose aucun résultat préalable.*

a) Dans cette question, on suppose que $f \in L^2[0, 2\pi]$ est une fonction réelle vérifiant $(*)$. On va supposer qu'il existe $h > 0$ $(h < \pi)$ et $\alpha > 0$ pour lesquels on a $f \geq \alpha$ sur $[\pi - h, \pi + h]$, et aboutir à une contradiction.

   i) Pour $n \in \mathbb{N}$ on introduit $P_n(t) = \Big(1 + \cos(t - \pi) - \cos(h)\Big)^n$. Montrer que $\langle P_n, f\rangle = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   ii) Discuter, suivant la valeur de $t \in [0, 2\pi]$, la limite de $P_n(t)$ lorsque $n \to +\infty$.

   iii) Montrer que, lorsque $n \to +\infty$,

   $$\int_{[0,\pi-h]} f(t)P_n(t)\, dt \to 0 \quad \text{et} \quad \int_{[\pi+h,2\pi]} f(t)P_n(t)\, dt \to 0.$$

   iv) Montrer que, lorsque $n \to +\infty$,

   $$\int_{[\pi-h,\pi+h]} f(t)P_n(t) \to +\infty.$$

   v) Conclure.

b) Montrer que toute fonction continue sur $[0, 2\pi]$ à valeurs réelles qui vérifie $(*)$ est identiquement nulle.

   Indication : on pourra supposer que f est non-identiquement nulle, prolonger la fonction à $\mathbb{R}$ par périodicité et faire une translation pour se ramener à la situation précédente.

c) Montrer que tout fonction continue (à valeurs complexe) sur $[0, 2\pi]$ qui vérifie $(*)$ est identiquement nulle.

   Indication : on pourra remarquer que si f vérifie $(*)$ alors $\overline{f}$ vérifie aussi $(*)$.

d) Soit $f \in L^2([0, 2\pi]$ avec $\int_{[0,2\pi]} f(t)\, dt = c_0(f) = 0$. Montrer que la fonction

   $$F(x) = \int_{[0,x]} f(t)\, dt.$$

   est continue, et que pour $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ on a

   $$c_n(F) = -\frac{i}{n}\, c_n(f).$$

e) En déduire que si f vérifie $(*)$ alors la fonction F de la question précédente est constante (donc nulle) et que pour tout $x, y \in [0, 2\pi]$,

   $$\int_{]x,y[} f(t)\, dt = 0.$$

f) Conclure.