Feuille 4. Espaces de Hilbert (2)

Exercice 1. Dans l'espace de Hilbert $H = L^2([0,1]^2)$ des fonctions $f(x,y)$ de carré intégrable pour la mesure de Lebesgue sur $[0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$, on considère le sous-espace vectoriel F formé des fonctions qui ne dépendent que de la variable x : la fonction $g \in H$ appartient à F s'il existe une fonction $G(x)$ d'une seule variable, et telle que $g(x,y) = G(x)$ pour presque tout couple $(x,y) \in [0,1]^2$ (On remarquera que G est de carré intégrable sur $[0,1]$).

a) Soit $g \in H$. Montrer que $g \in F$ si et seulement si il existe un ensemble $\mathcal{N}$ de mesure nulle de $[0,1]^2$ tel que $\forall x,y,z \in [0,1]$, si $(x,y) \notin \mathcal{N}$ et $(x,z) \notin \mathcal{N}$ alors $g(x,y) = g(x,z)$.

b) Montrer que F est un sous-espace fermé de H.

c) Montrer que la projection orthogonale P_F est donnée, pour tout $f \in H$ par

$$(P_F f)(x,y) = \int_{[0,1]} f(x,z)\,dz.$$

Exercice 2. (Procédure d'orthonormalisation de Gram-Schmidt) Soit H un espace pré-hilbertien. Désignons par N un entier ≥ 0 ou bien $N = +\infty$. Si on a une suite $(v_n)_{1\leq n<N}$ finie ou dénombrable de vecteurs linéairement indépendants de H, montrer qu'il existe une suite orthonormée $(f_n)_{1\leq n<N}$ telle que

$$\mathrm{vect}(f_k : 1 \leq k \leq n) = \mathrm{vect}(v_k : 1 \leq k \leq n)$$

pour tout entier n tel que $1 \leq n < N$.
On pourra utiliser la projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie bien choisi.

Exercice 3. Soit P_F la projection orthogonale sur un sous-espace fermé F d'un Hilbert H. Montrer que pour tous $x, z \in H$, on a

$$\langle P_F(x), z\rangle = \langle x, P_F(z)\rangle,$$

Exercice 4. (Caractérisation de la densité dans un Hilbert). Soit H un espace de Hilbert H. Pour toute partie $B \subset H$ non vide, on note

$$B^\perp = \{x \in H \;;\; \langle x, a\rangle = 0,\ \forall b \in B\}.$$

a) Soit A, B deux parties de H non vides. Montrer que

$$A \subset B \Longrightarrow B^\perp \subset A^\perp.$$

b) Montrer que pour toute partie $A \subset H$ non-vide, on a $A^\perp = (\overline{A})^\perp$.

c) Soit F un sous-espace de H. Montrer que

$$\overline{F} = H \Longleftrightarrow F^\perp = \{0\}.$$

d) Montrer que pour toute partie $A \subset H$ non vide, on a $A^\perp = (\mathrm{vect}(A))^\perp$.

e) Soit A une partie non vide de H. Établir que

$$\overline{\mathrm{vect}(A)} = H \Longleftrightarrow A^\perp = \{0\}.$$

Exercice 5. (Weierstrass L^2). Let but de cet exercice est de montrer que $\mathbb{C}[X]$, ou plus précisément les fonction polynômes, sont denses dans $L^2(\mu) = L^2([0,2\pi], \frac{dt}{2\pi})$.
Soit g une fonction dans $L^2(\mu)$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \int_{[0,2\pi]} g(x)\, x^k \, \frac{dx}{2\pi} = 0.$$

On se donne aussi un $n \in Z$, $n \neq 0$.

a) Montrer que que la somme (série positive) $\sum_{j\geq 0} \frac{|n\,x|^j}{j!} g(x)$ est une fonction de x (définie presque partout) intégrable sur $[0, 2\pi]$.

b) En déduire que $c_n(f) = 0$.

c) Conclure.

Exercice 6. Calculer les coefficient de Fourier de la fonction périodique f définie par $f(x) = 1-|x|/\pi$ lorsque $|x| \leq \pi$ et en déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$