Feuille 5.

Exercice 1. Soit (X,μ) un espace mesuré σ-fini. Montrer que la norme $\|.\|_\infty$ est duale à la norme $\|.\|_1$, c'est-à-dire que pour tout $f \in L^\infty(\mu)$ on a $\|f\|_\infty = \sup_{g\in L^1(\mu)} \frac{\left|\int fg\,d\mu\right|}{\|g\|_1}$.

Exercice 2. Soit (X,μ) un espace mesuré et f une fonction mesurable d'intégrale nulle sur tout sous-ensemble mesurable de X. Montrer qu'alors f est nulle $\mu-$presque partout.

Exercice 3. Soient μ et ν deux mesures sur l'espace mesurable $(X,\mathcal{A})$.

a) On suppose que
$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall A \in \mathcal{A}, \quad \mu(A) \le \eta \Longrightarrow \nu(A) \le \epsilon.$$
Montrer que ν est absolument continue par rapport à μ.

b) Montrer que la réciproque est vraie lorsque ν est une mesure finie.

Exercice 4. Soit μ et ν deux mesures finies sur un espace mesurable $(E,\mathcal{A})$. On suppose que $\nu \le \mu$, au sens où $\nu(A) \le \mu(A)$ pour tout partie mesurable A. Soit φ une fonction mesurable positive telle que $d\nu = \varphi\,d\mu$.
Montrer que φ prend ses valeurs dans $[0,1]$ μ-pp.
Indication : on pourra montrer que la μ-mesure des ensembles $\{\varphi \le -\varepsilon\}$ et $\{\varphi \ge 1+\varepsilon\}$ est nulle pour tout $\varepsilon > 0$.

Exercice 5. On rappelle qu'on a montré dans les exercices sur les espaces de Hilbert que les fonctions polynômes étaient denses dans $L^2([0,1])$. Soit $p \in [1,+\infty[$.

a) Montrer que pour $p \in [1,2]$, les fonctions polynômes sont denses dans $L^p([0,1])$. (En particulier, les fonctions C^∞ sont denses dans $L^p([0,1])$.

b) Montrer que si g est une fonction de $L^p([0,1])$ avec $p \ge 2$ et $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$, on a
$$\|g\|_p = \sup_{P \text{ polynôme}} \frac{\left|\int_0^1 fP\right|}{\|P\|_{L^q([0,1])}}.$$

Exercice 6. Soient μ et ν deux mesures sur un espace mesurable $(X,\mathcal{A})$, ν étant une mesure finie.

a) Montrer qu'il existe $Y \in \mathcal{A}$ tel que
$$\mu(Y) = 0 \text{ et } \nu(Y) = \sup_{\substack{A\in\mathcal{A}\\ \mu(A)=0}} \nu(A).$$

b) Pour tout $A \in \mathcal{A}$, on pose
$$\nu_a(A) := \nu(A\backslash Y) \text{ et } \nu_e(A) := \nu(A \cap Y).$$
Montrer que ν_a et ν_e sont des mesures sur $\mathcal{A}$ et que
$$\nu = \nu_a + \nu_e.$$

c) Montrer que ν_a est absolument continue par rapport à μ.

d) On dit qu'une mesure m est "portée par une partie A" si $m({}^cA) = 0$. Montrer que les mesures ν_e et μ sont étrangères, c'est-à-dire qu'elles sont portées par des parties disjointes.

Exercice 7. Soient $X := \{a,b\}$ et μ la mesure sur $(X,\mathcal{P}(X))$ définie par $\mu(\{a\}) := 1$ et $\mu(\{b\}) := +\infty$ (donc $\mu(X) = +\infty$). Caractériser $L^\infty(\mu)$ et le dual de $L^1(\mu)$, puis conclure.