Feuille 6.

Exercice 1. (Cours) Soit B un borélien de $\mathbb{R}^d$.

a) Montrer qu'il existe un ensemble G qui est une intersection dénombrable d'ouverts de $\mathbb{R}^d$, qui contient B et tel que $\lambda(G) = \lambda(B)$.

b) Montrer qu'il existe un ensemble F qui est une réunion dénombrable de compacts de $\mathbb{R}^d$, contenu dans B et tel que $\lambda(F) = \lambda(B)$.

Exercice 2. (Inégalité de Brunn-Minkowski sur $\mathbb{R}$) Pour $A, B \subset \mathbb{R}$ on note $A+B = \{a+b\,;\ a \in A,\ b \in B\}$. On notera $|\cdot|$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Le but de cet exercice est de montrer que si A et B sont deux boréliens non-vides de $\mathbb{R}$, alors

$$|A+B| \geq |A| + |B|.$$

On supposera dans la suite que $A+B$ est borélien (en fait ce n'est pas nécessaire, car on peut toujours garantir que $A+B$ est Lebesgue-mesurable).

a) Montrer l'inégalité lorsque A et B sont compacts (on montrera qu'on peut se ramener au cas où $\max A = \min B = \{0\}$.).

b) Conclure

Exercice 3. (Continuité de l'action des translations sur $L^p(\mathbb{R}^n)$) Pour toute fonction f sur $\mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^n$, on définit la fonction f_y, translatée de y de f, par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f_y(x) = f(x-y).$$

On se donne $p \in [1, +\infty[$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Montrer que l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & L^p(\mathbb{R}^n) \\ y & \to & f_y \end{array}$$

est uniformément continue. (Implicitement, $\mathbb{R}^n$ est muni de la métrique provenant d'une norme, par exemple la norme euclidienne).

Exercice 4. (Un raisonnement classique à comprendre et à apprendre) Soit f une fonction de $L^1(\mathbb{R})$ à valeurs réelles ou complexes. On définit (la transformée de Fourier) par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \hat{f}(t) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i(t\,x)} dx.$$

a) Montrer que $\hat{f}$ est bien définie, et que c'est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que lorsque $t \to \pm\infty$ on a

$$\hat{f}(t) \to 0.$$

Indication : on pourra d'abord considérer le cas où f est de classe C^1 et à support compact.