Feuille 7.

Exercice 1. Montrer que la convolution d'une fonction de $L^1(\mathbb{R})$ et d'une fonction de $L^\infty(\mathbb{R})$ est une fonction continue. Un exemple : calculer $1_{[0,1]} * 1_{[0,1]}$. Une application : montrer que $L^1(\mathbb{R})$ n'a pas d'élément neutre pour l'opération $*$.

Exercice 2. Soit H la fonction d'Heaviside : $H(t) = 0$ si $t < 0$ et $H(t) = 1$ si $t \geq 0$. On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) := H(t) - 2H(t-1) + H(t-2) \quad \text{et} \quad g(t) = 1_{\mathbb{R}}(t) = 1.$$

Montrer que les expressions suivantes ont un sens et calculer leur valeurs

$$H * (f * g) \quad \text{et} \quad (H * f) * g.$$

Exercice 3. Soient $p, q \in [1, +\infty]$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1 + \dfrac{1}{r}$. Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$. Montrer que $f * g$ est définie λ_d-p.p, que $f * g \in L^r(\mathbb{R}^d)$, et que $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Exercice 4. Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ telles que $\lim_{|x|\to+\infty} g(x) = 0$. Montrer que $f * g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Le résultat subsiste-t-il si l'on enlève le contrôle de g en l'infini ?

Exercice 5. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $H(t) := e^{-|t|}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, soit $h_n(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} H(t/n) e^{itx} dt$.

a) Montrer qu'il existe $\varphi \in L^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$ positive, telle que $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx = 1$ et $h_n(x) = n\varphi(nx)$.

b) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\|f * h_n - f\|_{L^1} \leq \int_{\mathbb{R}^2} |f(y + u/n) - f(y)| \, \varphi(u) \, du \, dy$$

c) Soit f continue sur $\mathbb{R}$ à support compact. Soit M tel que f est nulle en dehors du segment $S = [-a, a]$.

i) Expliquez pourquoi il existe une segment $B = [-b, b] \subset \mathbb{R}$ tel que $\int_{\mathbb{R}\setminus B} \varphi \leq \epsilon$.

ii) Montrer que pour $n \geq 1$,

$$\|f * h_n - f\|_{L^1} \leq \int_{(S+B)\times B} \varphi(u) \, |f(y + u/n) - f(y)| \; dydu + \epsilon \sup_{\mathbb{R}} |f|.$$

iii) Monter que $\|f * h_n - f\|_{L^1} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

d) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $\|f * h_n - f\|_{L^1} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

e) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une sous-suite tel que $f * h_{n_k}(x) \to f(x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.