Feuille 8.

Exercice 1.

a) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $xf(x) \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $\hat{f}$ est dérivable et que

$$(\hat{f})'(\xi) = -i \int_{\mathbb{R}} x f(x) e^{-i\xi x} dx\,.$$

b) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ une fonction de classe C^1, telle que $f' \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $\widehat{(f')}(\xi) = -i\xi \hat{f}(\xi)$. (On montrera d'abord que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ existent, puis on calculera l'intégrale $\widehat{(f')}$ par parties).

c) Soit $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ une fonction C^∞ à support compact. Montrer que $\widehat{f^{(n)}}(\xi) = (-i)^n \xi^n \hat{f}(\xi)$.

d) Soit $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme et $D = -i\frac{\partial}{\partial x}$. On note $P(D)$ le polynôme différentiel obtenu en remplaçant X par D. Montrer que $(\widehat{P(D) f})(\xi) = P(\xi)\hat{f}(\xi)$.

Exercice 2.

a) Soit $k(x) = 2\frac{\sin(x)}{x}$. Montrer que k est une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}$.

b) Soit $A > 0$. Montrer que $\widehat{1_{[-A,A]}}$ est bien défini et

$$\widehat{1_{[-A,A]}}(x) = k_A(x)$$

où $k_A(x) := Ak(Ax)$.

c) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que f et k_A sont convolables, et que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-A}^{A} \hat{f}(x) e^{ixt}\, dx = f * k_A(t).$$

Exercice 3.

a) Montrer que si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$, alors les $\hat{f}g$ et $f\hat{g}$ sont intégrables, et

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)\, g(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} f(x)\hat{g}(x)\, dx.$$

b) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que f et $\hat{f}$ sont dans $L^2(\mathbb{R})$ et

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}|^2.$$