Partiel du 26 février 2016

2h – Documents interdits

La plus grande importance sera accordée à la rigueur de l'argumentation.

Exercice 1. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

a) Soient f et g deux fonctions mesurables positives de X dans $\mathbb{R}^+$ telles que $fg \geq 1$. Montrer que $\int_X f\, d\mu \int_X g\, d\mu \geq \mu(X)^2$.

b) On suppose qu'il existe une fonction intégrable $f : X \to \mathbb{R}^{+*}$ telle que $1/f$ soit intégrable. Que peut-on dire de la mesure μ ?

Solution de l'exercice 1.

a) Les hypothèses $1 \leq fg$, et f, g positives et l'inégalité de Cauchy-Schwarz impliquent :

$$\mu(X) = \int_X 1\, d\mu \leq \int_X f^{1/2} g^{1/2}\, d\mu \leq \left(\int_X f\, d\mu \right)^{1/2} \left(\int_X g\, d\mu \right)^{1/2}.$$

b) On pose $g := 1/f$, alors $f, g \in L^1(\mu)$. De plus, a) implique $1 \in L^1(\mu)$ et donc $\mu(X) < \infty$, i.e. la mesure μ est finie.

Exercice 2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et (x_n) une suite de Cauchy de E. Montrer qu'on peut trouver une sous-suite extraite $(y_k)_{k \geq 0} = (x_{n_k})_{k \geq 0}$ telle que la série $\sum (y_{k+1} - y_k)$ soit normalement convergente.

Solution de l'exercice 2. On montre d'abord qu'on peut trouver une sous-suite (x_{n_k}) telle que

$$\forall k \geq 0, \qquad \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq 2^{-k}.$$

En effet, d'après le caractère de Cauchy, pour tout $k \geq$, il existe un rang $N_k > 0$ tel que $\forall n, m \geq N_k$, $\|x_n - x_m\| \leq 2^{-k}$. On aurait pu forcer la suite N_k à être strictement croissante, mais si on ne l'a pas fait, alors on définit par récurrence $n_0 = N_0$ et pour $k \geq 1$,

$$n_k = \max\{n_{k-1} + 1, N_k\}.$$

La suite (n_k) est alors strictement croissante, et vérifie $n_k \geq N_k$ pour tout $k \geq 0$, ce qui garanti $\|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\| \leq 2^{-k}$ puisque $n_k, n_{k+1} \geq N_k$.
Comme la série positive $\sum 2^{-k}$ est convergente, on peut conclure par théorème de comparaison pour les séries positives que la série $\sum (x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ est normalement convergente.

Exercice 3. On travaille avec la mesure de Lebesgue, notée m, sur $[0,1]$ et les normes $\|\cdot\|_p$ sur $L^p([0,1], m)$.

a) Montrer que $L^\infty([0,1], m) \subset L^1([0,1], m)$.
L'injection canonique correspondante (i.e. l'identité),

$$(L^\infty([0,1], m), \|\cdot\|_\infty) \xrightarrow{\text{Id}} (L^1([0,1], m), \|\cdot\|_1),$$

est-elle continue ? Quelle est sa norme d'opérateur ?

b) La norme $\|\cdot\|_1$ sur l'espace vectoriel $L^\infty([0,1], m)$ est-elle équivalente à la norme $\|\cdot\|_\infty$?

Solution de l'exercice 3.

a) Soit f une fonction fonction mesurable essentiellement bornée sur $[0,1]$. Alors

$$\int_{[0,1]} |f|\, dm = \int_{\{|f|\leq \|f\|_\infty\}} |f|\, dm \leq m(\{|f| \leq \|f\|_\infty\})\|f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$$

ce qui montre l'inclusion, et la continuité de l'injection canonique, qui est de norme inférieure ou égale à 1. Si on prend f constante égale à 1 (par exemple), on voit que la valeur 1 est atteinte, donc l'injection est exactement de norme 1.

b) On souhaite donc savoir s'il existe $M > 0$ tel que

$$\forall L^\infty([0,1], m), \qquad \|f\|_\infty \leq M\, \|f\|_1.$$

La réponse est non, comme on le voit en prenant la suite $(f_k)_{k\geq 1}$ de fonctions continues sur $[0,1]$ donnée par

$$f_k(x) = x^k$$

pour laquelle

$$\frac{\|f\|_\infty}{\|f\|_1} = k \to +\infty$$

lorsque $k \to +\infty$.

Exercice 4. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, et H une fonction positive μ-intégrable. On introduit la mesure $d\nu = H\, d\mu$ sur X définie pour tout partie mesurable $A \in \mathcal{A}$ par $\nu(A) = \int_A H(x)\, d\mu(x)$. On se donne $p \in]1, +\infty[$. Montrer que la multiplication par $H^{1/p}$, à savoir l'application

$$f \to H^{1/p} f$$

est une application linéaire continue de $L^p(X, \nu)$ dans $L^p(X, \mu)$, dont on calculera la norme d'opérateur.

Solution de l'exercice 4. Il faut d'abord vérifier que l'application est bien définie. Si $f \in L^p(X, \nu)$ on a

$$\int |H^{1/p} f|^p\, d\mu = \int |f|^p\, H\, d\mu = \int |f|^p\, d\nu < +\infty$$

et donc $f \in L^p(X, \mu)$.
L'application est évidemment linéaire, et l'égalité ci-dessous dit exactement que c'est une isométrie de $L^p(X, \nu)$ dans $L^p(X, \mu)$, et elle est donc de norme 1.

Exercice 5. Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de probabilité et $f : X \to \mathbb{R}^+$ une fonction positive μ-intégrable.
Notation : Pour une fonction réelle mesurable g et $p \in]\mathbf{0}, +\infty[$ on note

$$\|g\|_p := \Big(\int |g|^p\, d\mu\Big)^{1/p}.$$

Attention : vous noterez qu'on convient donc de cette notation même pour $p \leq 1$.

a) Soit $p > 0$. Montrer que $f^p = f^p\, 1_{\{f>0\}}$.

b) En utilisant l'inégalité de Hölder, montrer que si $\mu(\{f > 0\}) < 1$, alors $\|f\|_p \to 0$ quand $p \to 0$.

c) Montrer que pour $p \in]0, 1[$ et $s > 0$ on a $s^p \leq s + 1$.

d) Etablir que

$$\lim_{p\to 0} \int_X f^p\, d\mu = \mu(\{f > 0\}).$$

e) Montrer que pour tout $p \in]0,1[$ et pour tout $y \in]0,+\infty[$, alors

$$\frac{|y^p - 1|}{p} \leq y + |\log y|.$$

Indication : on pourra distinguer les cas $y \leq 1$ et $y > 1$, et utiliser le théorème des accroissements finis.

f) A partir de maintenant, on suppose que $f > 0$ sur X et que $\log f \in L^1(\mu)$. Montrer que

$$\lim_{p\to 0} \int_X \frac{f^p - 1}{p}\, d\mu = \int_X \log f\, d\mu.$$

g) En déduire que

$$\lim_{p\to 0} \|f\|_{L^p} = \exp\left(\int_X \log f\, d\mu\right).$$

Solution de l'exercice 5.

a) Pour $x \in X$, L'égalité est vrai si $f(x) = 0$ et si $f(x) > 0$.

b) Si $1/p > 1$, l'inégalité de Hölder donne

$$\int_X f^p\, d\mu = \int_X f^p \mathbf{1}_{\{f>0\}}\, d\mu \leq \left(\int_X (f^p)^{1/p}\, d\mu\right)^p \mu(\{f > 0\})^{1-p} = \left(\int_X f\, d\mu\right)^p \mu(\{f > 0\})^{1-p},$$

d'où $\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \mu(\{f > 0\})^{1/p-1}$. Comme $\mu(\{f > 0\}) < 1$ et $\mu(\{f > 0\})^{\frac{1}{p}-1} = e^{(\frac{1}{p}-1)\log \mu(\{f>0\})}$, , on en déduit par passage à la limite quand $p \to 0$ que $\|f\|_{L^p} \to 0$.

c) Fixons $p \in]0,1[$. Si $0 < y \leq 1$, alors $y^p \leq 1$ et si $y > 1$, $y^p < y$. Donc pour tout $y > 0$, $y^p \leq y + 1$. On peut aussi dire que la fonction concave $s \to s^p$ sur $0,+\infty[$ est au dessous de sa tangente en 1.

d) Comme $f(x)^p \to \mathbf{1}_{\{f>0\}}(x)$ quand $p \to 0$ et que $f(x)^p \leq f(x) + 1$ pour tout $x \in X$, avec $f + 1 \in L^1(\mu)$ (car μ est une mesure de probabilité), le théorème de convergence dominée assure que

$$\lim_{p\to 0} \int_X f^p\, d\mu = \int_X \mathbf{1}_{\{f>0\}}\, d\mu = \mu(\{f > 0\}).$$

e) Supposons d'abord que $y \in]0,1]$. Pour tout $p \in]0,1[$, le théorème des accroissement finis appliqué à la fonction $p \in]0,1[\mapsto y^p = e^{p(\log y)}$ assure l'existence d'un $p_0 \in]0,p[$ tel que

$$|y^p - 1| = |y^p - y^0| = |(\log y) y^{p_0} p| \leq |\log y| p.$$

On applique ensuite le théorème des accroissements finis à la fonction $y \in]1,+\infty[\mapsto y^p$. Pour tout $p \in]0,1[$ et tout $y > 1$, on en déduit l'existence d'un $y_0 \in]1,y[$ tel que

$$|y^p - 1| = |y^p - 1^p| = |p y_0^{p-1}(y-1)| \leq py.$$

En regroupant les deux cas, on constate que pour tout $p \in]0,1[$ et pour tout $y \in]0,+\infty[$,

$$\frac{|y^p - 1|}{p} \leq y + |\log y|.$$

f) Pour tout $y > 0$

$$\lim_{p\to 0} \frac{y^p - 1}{p} = \lim_{p\to 0} \frac{e^{p\log y} - 1}{p} = \frac{d}{dp} e^{p\log y}|_{p=0} = \log y.$$

Comme on suppose que $f > 0$ sur X, on en déduit que $\frac{f(x)^p - 1}{p} \to \log f(x)$ pour tout $x \in X$. Par ailleurs, la question c) assure que $\frac{|f(x)^p - 1|}{p} \leq |\log f(x)| + f(x)$ pour tout $x \in X$, où, par hypothèse $|\log f| + f \in L^1(\mu)$. Une application du théorème de convergence dominée montre que

$$\lim_{p\to 0} \int_X \frac{f^p - 1}{p}\, d\mu = \int_X \log f\, d\mu.$$

g) On a, lorsque $p \to 0$,

$$\log \int_X f^p\, d\mu = \log\left(1 + p\int_X \frac{f^p - 1}{p}\, d\mu\right) \sim p \int_X \log f\, d\mu,$$

ce qui donne le résultat, en écrivant $\|f\|_p = \exp(\frac{1}{p} \log \int_X f^p\, d\mu)$.