# Examen du 16 mai 2019. Durée : 2h

*Une grande importance sera accordée à la rigueur et à la clarté de l'argumentation. Barème approximatif : 6-7-7*

**Exercice 1.** On travaillera dans cet exercice avec des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$ et on notera simplement $\ell_p$ les espaces $\ell_p^{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$ correspondants. Soient $p, q \in ]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

On fixe une suite $v = (v_n)_{n\geq 0} \in \ell_q$.

a) Montrer que si $u \in \ell_p$ alors la suite $u \times v$ définie par $(u \times v)_n = u_n v_n$ pour tout $n \geq 0$, appartient à $\ell_1$, et que l'application

$$\begin{array}{rcl} \psi : (\ell_p, \|\cdot\|_p) & \longrightarrow & (\ell_1, \|\cdot\|_1) \\ u & \longrightarrow & u \times v \end{array}$$

est une application linéaire continue dont on calculera la norme d'opérateur.

b) L'application linéaire $\psi$ définie ci-dessus peut-elle être une isométrie ?
*On pourra étudier l'image par $\psi$ des vecteurs de la base canonique $(e^k)_{k\geq 0}$.*

*Solution de l'exercice* 1.

a) Pour $u \in \ell_p$ on a par l'inégalité de Hölder,

$$\sum |u_n v_n| \;\leq\; \|u\|_p \|v\|_q < +\infty$$

par conséquent $u \times v \in \ell_1$ et l'application $\psi$ est donc bien définie. Elle est linéaire (par distributivité de l'addition par rapport à la multiplication). Par ailleurs l'inégalité précédente, qui s'écrit

$$\forall u \in \ell_p, \quad \|\psi(u)\|_1 \leq \|v\|_q \, \|u\|_p,$$

montre que $\psi$ est bien continue, avec de plus que $\|\psi\|_{\ell_p \to \ell_1} \leq \|v\|_q$. Si $v = 0$ (suite identiquement nulle), alors $\psi$ est l'application nulle et sa norme vaut zéro. Si $\|v\|_q > 0$, alors il y a égalité dans l'inégalité ci-dessus pour la suite $u \in \ell_p \setminus \{0\}$ donnée par $u_n = |v_n|^{q-1}$, ce qui montre que $\|\psi\|_{\ell_p \to \ell_1} = \|v\|_q$.

b) Si on note $(e^n)$ la base canonique, donnée par $e^n = (\delta_{mn})_{m\geq 0}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\psi(e^n) = v_n e^n.$$

Par conséquent, pour tout $n$ fixé on a $\|\psi(e^n)\|_1 = |v_n| \, \|e^n\|_1 = |v_n|$ et comme $\|e_n\|_p = 1$, pour que $\psi$ soit une isométrie de $\ell_p$ dans $\ell_1$ il faut donc que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |v_n| = 1.$$

Mais une telle suite n'est pas dans $\ell_q$, $q < \infty$. Par conséquent $\psi$ ne peut pas être une isométrie.

**Exercice 2.** Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle, \|\cdot\|)$ un espace de Hilbert (complexe), et $(v_k)_{k\geq 1}$ une suite de vecteurs de $H$ qui vérifie la propriété suivante : il existe une constante $A > 0$ tel que, pour tout $N \geq 1$ et tout $x \in H$,

$$\sum_{k=1}^{N} |\langle v_k, x\rangle|^2 \leq A \, \|x\|^2.$$

a) Montrer que pour toute famille finie de scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{C}$, $N \geq 1$, on a que

$$\Big\| \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \, v_k \Big\|^2 \leq A \sum_{k=1}^{N} |\alpha_k|^2.$$

*On pourra introduire le vecteur* $x := \sum_1^N \alpha_k \, v_k$ *et montrer que* $\langle x, x\rangle = \sum_1^N \overline{\alpha}_k \langle v_k, x\rangle$.

b) Montrer si on se donne $(\alpha_k)_{k\geq 1} \in \ell_2(\mathbb{N}^*)$ une suite complexe de carré du module sommable, alors la série $\sum \alpha_k \, v_k$ converge dans $(H, \|\cdot\|)$.

c) Montrer que pour tout $x \in H$, la série $\sum \langle v_k, x\rangle v_k$ converge dans $(H, \|\cdot\|)$.

*Solution de l'exercice* 2.

a) En posant $x := \sum_1^N \alpha_k \, v_k$ on a

$$0 \leq \langle x, x\rangle = \sum_1^N \overline{\alpha}_k \langle v_k, x\rangle \leq \sqrt{\sum_1^N |\alpha_k|^2 \sum_1^N |\langle v_k, x\rangle \;|^2} \leq \sqrt{\sum_1^N |\alpha_k|^2 A \|x\|^2},$$

ce qui donne le résultat.

b) On montre que la suite des sommes partielles $V_N := \sum_{k=1}^N \alpha_k \, v_k$ est de Cauchy. En effet, pour tout $N \geq 1$ et $p \geq 1$, on a

$$\Big\| V_{N+p} - V_N \Big\|^2 = \Big\| \sum_{k=N+1}^{N+p} \alpha_k \, v_k \Big\|^2 \leq A \sum_{k=N+1}^{N+p} |\alpha_k|^2 = A\Big(U_{N+p} - U_N\Big)$$

où $U_n := \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2$ pour $n \geq 1$. Par hypothèse, la suite $(U_n)$ converge, donc elle est de Cauchy, ce qui permet de montrer, via l'inégalité ci-dessus, que la suite $(V_N)$ est bien de Cauchy dans $(H, \|\cdot\|)$, donc convergente, puisque $H$ est complet.

c) L'hypothèse nous permet de dire que la série positive $\sum |\langle v_k, x\rangle|^2$ a des sommes partielles majorées, donc qu'elle est convergente. Ainsi, on a $(\langle v_k, x\rangle)_k \in \ell_2$. La question précédente permet alors de conclure.

**Exercice 3.** On travaillera avec la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On considère sur $\mathbb{R}$ la fonction $T(x) = (1 - |x|)_+$ , c'est-à-dire la fonction affine par morceaux valant zéro en dehors de $[-1, 1]$ et $1 - |x|$ pour $x \in [-1, 1]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose $T_n(x) = nT(nx) = n(1 - n|x|)_+$.

a) Calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} T_n$ pour $n \geq 1$.

b) Montrer que si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions $f$ et $T_n$ sont convolables avec $f * T_n \in L^1(\mathbb{R})$ et que

$$\|f * T_n - f\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \Big| f\big(x - \frac{y}{n}\big) - f(x)\Big| \, T(y) \, dx \, dy.$$

c) En déduire que si $f$ est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ qui est nulle en dehors d'un segment $[a, b]$, $a < b$, alors pour tout $n \geq 1$ on a

$$\|f * T_n - f\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \iint_{[a-1,b+1]\times[-1,1]} \Big| f\big(x - \frac{y}{n}\big) - f(x)\Big| \, T(y) \, dx \, dy.$$

d) Montrer que si $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ à support compact, alors $\|f * T_n - f\|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

e) Étendre le résultat précédent à toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$.

*Solution de l'exercice* 3.

a) La fonction $T$ est continue positive et $\int T = 2\int_0^1 (1-x)\,dx = 1$, et par changement de variable $\int T_n = \int T = 1$.

b) La fonction $T$ appartient à $L^1 \cap L^\infty$, elle est donc convolable avec une fonction dans $L^1$ et la convolution appartient elle même à $L^1$ (car d'après le cours on sait que $L^1 * L^1 \subset L^1$). Comme $\int_{\mathbb{R}} T_n = 1$, on peut écrire, pour (presque tout) $x \in \mathbb{R}$,

$$f * T_n(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}} \big(f(x-y) - f(x)\big) T_n(y)\,dy.$$

Par l'inégalité triangulaire, on a donc, puisque $T_n$ est positive, que

$$\|f * T_n - f\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} |f * T_n(x) - f(x)|\,dx \le \int_{\mathbb{R}} \Big( \int_{\mathbb{R}} \big|f(x-y) - f(x)\big| T_n(y)\,dy \Big)\,dx.$$

Le résultat s'ensuit en utilisant le théorème de Fubini-Tonelli et le changement de variable $y \to \frac{y}{n}$.

c) La fonction $T$ est à support dans $[-1,1]$ et donc on peut supposer que la variable $y$ appartient à $[-1,1]$. Si $|y| \le 1$ et si $n \ge 1$, alors $|\frac{y}{n}| \le 1$. Or si $x \notin [a-1, b+1]$, alors $x - z \notin [a,b]$ pour tout $|z| \le 1$. On en déduit que

$$x \notin [a-1, b+1] \implies f(x) = 0 \ \text{ et } \ f(x - \frac{y}{n}) = 0.$$

Et donc,

$$\iint \Big|f(x - \frac{y}{n}) - f(x)\Big| T(y)\,dx\,dy = \iint_{[a-1,b+1]\times[-1,1]} \Big|f(x - \frac{y}{n}) - f(x)\Big| T(y)\,dx\,dy.$$

d) On suppose que $f$ est continue et nulle en dehors de $[a,b]$. Alors d'après la question précédente il existe $[c,d]$ tel que, pour tout $n \ge 1$,

$$\|f * T_n - f\|_{L^1(\mathbb{R})} \le \iint_{[c,d]\times[-1,1]} \Big|f(x - \frac{y}{n}) - f(x)\Big| T(y)\,dx\,dy.$$

Comme $f$ est continue, pour $x, y$ fixés on a

$$\Big|f(x - \frac{y}{n}) - f(x)\Big| T(y) \longrightarrow 0$$

lorsque $n \to +\infty$. Par ailleurs, les fonctions $f$ et $T$ étant bornées sur $\mathbb{R}$, il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \ge 1$, on a

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad 0 \le \Big|f(x - \frac{y}{n}) - f(x)\Big| T(y) \le M.$$

Mais les constantes sont intégrables sur l'espace de mesure finie $[c,d] \times [-1,1]$. Donc, par le théorème de convergence dominée on a bien

$$\iint_{[c,d]\times[-1,1]} \Big|f(x - \frac{y}{n}) - f(x)\Big| T(y)\,dx\,dy \longrightarrow 0.$$

e) Soit $f \in L^1$ et $\epsilon > 0$. Il existe $g$ continue à support compact tel que $\|f - g\|_1 \le \epsilon$. Par ailleurs, pour ce $g$ fixé, on sait d'après la question précédente qu'il existe $N > 0$ tel que $\|g * T_n - g\|_1 \le \epsilon$ dès que $n \ge N$. On a

$$\|f * T_n - f\|_1 \le \|f * T_n - g * T_n\|_1 + \|g * T_n - g\|_1 + \|g - f\|_1$$

et $\|f * T_n - g * T_n\|_1 = \|(f - g) * T_n\|_1 \le \|f - g\|_1$ puisque $T_n$ est positive d'intégrale 1. Ainsi, si $n \ge N$ on obtient

$$\|f * T_n - f\|_1 \le 3\epsilon,$$

ce qui donne le résultat voulu.