Chapitre 2

Espaces vectoriels normés et espaces de Banach

2.1 Rappels sur les espaces vectoriels normés

2.1.1 Généralités, topologie

Les espaces vectoriels considérés sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$. Si $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda|$ désignera la valeur absolue de λ si $\lambda \in \mathbb{R}$, et plus généralement le module de λ si $\lambda \in \mathbb{C}$.

Étant donné un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on dit qu'une fonction $\|\cdot\|$ de E dans $\mathbb{R}_+$ est une norme si elle vérifie

i) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$, $\|\lambda\, x\| = |\lambda|\, \|x\|$.

ii) Pour tout $x, y \in E$, on a $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

iii) Si $x \in E$ est tel que $\|x\| = 0$, alors $x = 0$.

Dans cette liste, on peut remplacer la condition *ii*) par la condition

ii') $\|\cdot\|$ est une fonction convexe sur E.

Un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E muni d'une norme $\|\cdot\|$ sur E.

Remarque 2.1. *Il y a égalité dans l'inégalité triangulaire $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ lorsque x et y sont sur une même demi-droite partant de zéro, c'est-à-dire lorsque $x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Mais ce n'est pas toujours le seul cas d'égalité possible, comme on peut s'en convaincre sur l'exemple de l'espace ℓ_∞^n (voir exercices).*

Rappelons que la topologie usuelle d'un espace vectoriel normé est la topologie d'espace métrique relative à la distance associée à la norme, à savoir

$$d(x, y) = \|\, x - y\, \|.$$

Notons en particulier que la fonction $x \to \|x\|$ est continue, car lipschitzienne, de $(E, \|\cdot\|)$ dans $\mathbb{R}$, puisque

$$\forall x, y \in E, \qquad \Big|\, \|x\| - \|y\| \Big| \leq \|x - y\|.$$

Ainsi, on dira que la suite (u_n) de $(E, \|\cdot\|)$ converge (on dit aussi (u_n) converge dans E), si il existe $v \in E$ tel que

$$\|u_n - v\| \ \to 0$$

lorsque $n \to +\infty$. Cela se quantifie donc de la manière suivante : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N > 0$, tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n \geq N \Rightarrow \|u_n - v\| \leq \varepsilon.$$

On dit *alors* que u_n tend vers v dans $(E\|\cdot\|)$ et on écrit $u_n \to v$ dans $(E, \|\cdot\|)$ ou $\lim u_n = v$ dans $(E, \|\cdot\|)$.

Voici une observation totalement évidente, qu'on utilise constamment.

Proposition 2.2. *Si $\|\cdot\|$ est une norme sur un espace vectoriel E, et si F est un sous-espace de E, alors $\|\cdot\|$ est aussi une norme sur F.*

Deux normes équivalentes sur un espace E définissent des métriques équivalentes, et donc la même topologie.

L'étude des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés de dimensions fini se ramène à l'étude de $\mathbb{K}^n$ muni d'une norme via le choix d'une base.

Une application entre deux espaces métriques est une *isométrie* si elle préserve les distances. Dans le cas d'une isométrie linéaire $\varphi : E \to F$ entre deux e.v.n., cela revient à écrire que $\|\varphi(x)\|_F = \|x\|_E$ pour tout x dans E.

Proposition 2.3. *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace $\mathbb{K}$-vectoriel de dimension finie. Alors E est en bijection linéaire isométrique avec $\mathbb{K}^n$ muni d'une certaine norme $\|\cdot\|$.*

Démonstration. On se donne une base $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ de E et on introduit l'application $\varphi : \mathbb{K}^n \to E$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{K}^n, \qquad \varphi(x) := \sum_{i=1}^{n} x_i \, \epsilon_i.$$

En d'autres termes, si on note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, l'application linéaire φ est définie décrétant que $\varphi(e_i) = \epsilon_i$, pour $i = 1, \ldots, n$. Par définition d'une base, on sait que φ est un isomorphisme entre les $\mathbb{K}$ espaces vectoriels $\mathbb{K}^n$ et E. On introduit la norme suivante sur $\mathbb{K}^n$:

$$\forall x \in \mathbb{K}^n, \qquad \|x\| := \|\varphi(x)\|_E = \Big\| \sum_{i=1}^{n} x_i \, \epsilon_i \Big\|_E.$$

Alors par construction φ devient une isométrie entre $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ et $(E, \|\cdot\|_E)$. $\square$

On rappelle aussi que

Proposition 2.4. *Deux normes sur un espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes.*

En d'autres termes, si $\|\cdot\|_0$ et $\|\cdot\|_1$ sont deux normes sur un espace vectoriel de dimension finie, alors il existe des constantes $c, C > 0$ tel que

$$\forall x \in E, \qquad \|x\|_0 \leq \|x\|_1 \leq C\|x\|_0.$$

Il peut être intéressant de connaître les meilleurs constantes dans ces inégalités.

Prenons une norme sur $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$ et notons $B_{\|\cdot\|} = \{\|\cdot\|\,\| \leq 1\}$ la boule unité correspondante. Soit $Q_n = [-1,1]^n \subset \mathbb{R}^n$ le cube en dimension n, qui est la boule unité pour la norme $\|x\|_\infty = \max|x_i|$. Alors le résultat sur l'équivalence des normes en dimension finie s'énonce (de manière équivalente) comme suit : il existe des constantes $\tilde{c}, \tilde{C} > 0$ tel que

$$\tilde{c}\,Q_n \subset B_{\|\cdot\|} \subset \tilde{C}Q_n.$$

Une conséquence de ce résultat est :

Proposition 2.5. *Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé de dimension finie, alors sa boule unité $B_E = \{\|\cdot\|_E \leq 1\}$ est compacte. Plus généralement, toute partie fermée bornée de E est compacte.*

Démonstration. Regardons le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et notons $n = \dim(E)$. Il suffit de regarder le cas d'une norme quelconque $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$, et l'observation précédente nous permet de voir que $B_E = B_{\|\cdot\|}$ est un sous-ensemble fermé de $\tilde{C}Q_n = [-\tilde{C}, \tilde{C}]^n$ pour un certain $\tilde{C} > 0$. Or $\tilde{C}Q_n$ est compact (pour la topologie produit, mais donc aussi pour la topologie équivalente donnée par $\|\cdot\|$). Une partie fermée bornée est incluse dans un certain multiple de B_E, et sera donc aussi compacte en tant que fermé dans un compact. □

On montre réciproquement que si $(E, \|\cdot\|_E)$ est de dimension infinie, alors sa boule unité B_E n'est pas compacte.

2.1.2 Applications linéaires continues

Pour une application linéaire $\varphi : E \to F$ entre deux espaces vectoriels normés $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ on a, en notant $B_E := \{x \in E\,;\ \|x\|_E \leq 1\}$, la boule unité de E et $S_E = \{x \in E,\ ;\ \|x\|_E = 1\}$ la sphère unité de E,

$$\sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|\varphi(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x \in B_E} \frac{\|\varphi(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x \in B_E} \|\varphi(x)\|_F = \sup_{x \in S_E} \|\varphi(x)\|_F.$$

L'application linéaire φ est continue si et seulement si cette quantité est finie, et on la note alors $\|\varphi\|_{E \to F}$. En d'autres termes, on retiendra que pour une application linéaire $\varphi : E \to F$ entre deux espaces vectoriels normés on a l'équivalence entre les assertions suivantes :

1. φ est continue
2. φ est bornée sur la boule unité de E
3. il existe une constante $M \geq 0$ tel que

$$\forall x \in E, \quad \|\varphi(x)\|_F \leq M\,\|x\|_E,$$

et la meilleure constante M possible est alors $\|\varphi\|_{E\to F} = \sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|\varphi(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup\limits_{x\in B_E} \|\varphi(x)\|_F$.

Proposition 2.6. *La fonction* $\|\cdot\|_{E\to F}$ *définit à son tour une* norme*, appelée norme d'opérateur, sur l'espace* $L(E,F)$ *des applications linéaires continues de* $(E, \|\cdot\|_E)$ *dans* $(F, \|\cdot\|_F)$.

Démonstration. Pour $f \in L(E,F)$, notons d'abord que si $\|f\|_{E\to F} = 0$, alors $f(x) = 0$ pour tout $x \neq 0$ (et aussi pour $x = 0$), et donc f est l'application nulle. D'autre part, $\|\lambda f\|_{E\to F} = |\lambda|\|f\|_{E\to F}$ d'après la définition, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$. Reste l'inégalité triangulaire. Pour $f, g \in L(E,F)$ et pour tout $x \in E$ on a

$$\|(f+g)(x)\|_F = \|f(x)+g(x)\|_F \leq \|f(x)\|_F + \|g(x)\|_F \leq \big(\|f\|_{E\to F} + \|g\|_{E\to F}\big)\, \|x\|_E,$$

et par conséquent $\|f+g\|_{E\to F} \leq \|f\|_{E\to F} + \|g\|_{E\to F}$.

□

Dans le cas particulier où $F = E$, on a donc que $\|\cdot\|_{E\to E}$ est une norme sur $L(E)$, les endomorphismes continus de E. Dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$, muni d'une certaine norme $\|\cdot\|$, et où l'on identifie endomorphisme et matrice (à travers la base canonique de $\mathbb{R}^n$), la norme $\|\cdot\|_{E\to E}$ s'appelle la norme matricielle subordonnée à $\|\cdot\|$.

Un *isomorphisme* entre deux espaces vectoriels normés E et F est une application linéaire continue de E dans F qui est bijective, et dont l'inverse est aussi continue. En fait, un théorème classique d'analyse fonctionnelle dit que pour une application linéaire continue bijective de E dans F, son inverse est automatiquement continu. Deux espaces vectoriels normés sont dit *isomorphes* s'il existe un isomorphisme entre eux ; ils sont isométriques s'il existe un isomorphisme entre eux qui préserve les normes. Dire que deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur E sont équivalentes, c'est donc dire que l'identité Id : $(E, \|\cdot\|_1) \to (E, \|\cdot\|_2)$ est un isomorphisme.

Remarquez qu'une isométrie linéaire $\varphi : E \to F$ entre deux espaces vectoriels normés est toujours continue, de norme d'opérateur égale à 1. Si elle est surjective, alors c'est un isomorphisme. On dit alors que E est F sont isométriques : on ne peut pas les distinguer en tant qu'espaces vectoriels normés.

2.2 Espaces de Banach

Définition 2.7. *Un espace vectoriel normé* $(E, \|\cdot\|)$ *est un espace de Banach s'il est complet (pour la métrique associé à sa norme).*

En d'autres termes, $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach si toute suite de Cauchy de $(E, \|\cdot\|)$ est convergente.

Sur $\mathbb{K}^n$, toute norme est équivalente à la norme $\|x\|_\infty = \max\ |x_i|$, dont la métrique est la métrique produit sur $\mathbb{K} \times \ldots \times \mathbb{K}$. Pour cette métrique, $\mathbb{K}^n$ est complet (puisque $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ est complet), et donc pour toute norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{K}^n$, on obtient un espace complet. C'est-à-dire :

Proposition 2.8. *Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach.*

En dimension infinie, on peut construire des exemples d'espaces vectoriels normés qui ne sont pas des Banach en prenant des sous-espaces non fermés d'un espace vectoriel normé (en général d'un Banach). Concrètement, on peut donner l'exemple suivant.

Exemple 2.9. *Soit $\mathcal{C}$ l'espace des fonction continues sur $[-1,1]$ muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)|$. On note $\mathcal{C}^1$ le sous-espace formé des fonctions C^1 sur $[-1,1]$ (on prend la dérivée à gauche et à droite sur les bords si on veut être précis). Considérons la suite de fonctions $(f_n) \subset \mathcal{C}$ définie pour $n \geq 1$ par*

$$\forall x \in [-1,1], \qquad f_n(x) = |x|^{1+\frac{1}{n}}.$$

On voit que f_n est de classe C^1. En effet, f_n est C^1 sur $[-1,1] \setminus \{0\}$, de dérivée $f_n'(x) = |x|^{1/n}$ pour $x \geq 0$ et l'opposé pour $x \leq 0$; il faut seulement regarder ce qui se passe en 0, mais comme $f(x) = o(|x|)$, on voit que f est dérivable en 0 de dérivée égale à zéro, qui est bien la limite commune des dérivées à gauche et à droite en 0. Ainsi, on a $(f_n) \subset \mathcal{C}^1$. Par ailleurs si on introduit la fonction $f(x) = |x|$, on voit que pour $f(0) = f_n(0)$ et pour $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$,

$$|f_n(x) - f(x) = |x|\big|e^{\frac{\log(|x|)}{n}} - 1\big| = |x|\big(1 - e^{\frac{\log(|x|)}{n}}\big) \leq \frac{-|x|\log(|x|)}{n} \leq \frac{1}{2n},$$

et donc

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{2n},$$

ce qui veut implique que la suite f_n converge dans $\mathcal{C}$ vers f. La suite (f_n) est donc une suite de Cauchy de $\mathcal{C}^1$, mais elle n'a pas de limite dans $\mathcal{C}^1 \subset \mathcal{C}$, puisque sa limite dans $\mathcal{C}$ vaut f qui n'appartient pas à $\mathcal{C}^1$. Ainsi, l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}^1, \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas complet.

Le caractère complet d'un espace vectoriel normé E permet de donner une condition suffisante très pratique à la convergence des séries. On rappelle qu'étant donné une suite (x_n) de vecteur de $(E, \|\cdot\|)$, on dit que la série $\sum x_n$ converge si la suite des sommes partielles $\big(\sum_{n=1}^N x_n\big)_N$ converge dans E. Si c'est le cas, alors on note $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ la limite des sommes partielles. En d'autres termes, s'il existe $x \in E$ tel que

$$\Big\|\sum_{n=1}^N x_n \; - \; x\Big\| \to 0 \quad \text{lorsque} \quad N \to +\infty,$$

alors on dit que la série $\sum x_n$ converge dans E, et on note $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n := x$. Il est bon de rappeler ici que pour écrire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ il faut donc avoir montré *avant* que cela a bien un sens.

Définition 2.10. *Étant donné une suite (x_n) de vecteurs d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, on dit que la série $\sum x_n$ est* normalement convergente *si la série positive $\sum \|x_n\|$ est convergente.*

Il est beaucoup plus facile d'étudier la série $\sum \|x_n\|$, qui est une série de réels positifs. En effet, la quantité $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|$ a toujours un sens, dans $[0, +\infty]$ et cette quantité est finie quand la série converge. De plus, pour les séries positives, on dispose des théorèmes de comparaisons, qui permettent de conclure à la convergence (ou divergence) de la série en majorant (ou minorant) $\|x_n\|$ ou en donnant un équivalent. *A priori*, on ne voit pas très bien pourquoi il y aurait un lien entre la convergence de la série $\sum x_n$ et la convergence de la série $\sum \|x_n\|$, et pourtant :

Proposition 2.11. *Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach, alors toute série de E normalement convergente est convergente.*

Plusieurs remarques s'imposent :

— Il s'agit d'une condition suffisante, mais pas nécessaire. Pour s'en persuader, on peut prendre l'exemple de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ sur l'espace de Banach $(\mathbb{R}, |\cdot|)$: c'est une série convergente, mais pas normalement (dans ce cas, on dit plutôt *absolument*) convergente.

— En cas de convergence normale, il n'y a aucun lien entre les sommes $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\|$, si ce n'est l'inégalité obtenue par passage à la limite $\displaystyle\left\|\sum_{n=0}^{+\infty} x_n\right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\|$.

— La propriété est fausse sur un espace vectoriel normé non-complet. Pour avoir un contre-exemple, il suffit de modifier légèrement l'exemple 2.9 en prenant $g_n(x) = |x|^{1+\frac{1}{n^2}}$. On peut se persuader que la série $\sum (g_{n+1} - g_n)$ est normalement convergente pour $\|\cdot\|_\infty$, mais pas convergente dans $\mathcal{C}^1$ puisque les sommes partielles (qui valent $g_N - g_1$) convergent dans $\mathcal{C}$ vers $g(x) = |x| - x^2$ qui n'est pas dans $\mathcal{C}^1$.

Démonstration. Soit $\sum x_n$ une série normalement convergente. On introduit la suite $U_N = \sum_{n \leq N} x_n$. Notre but est de montrer que cette suite converge dans E lorsque $N \to +\infty$. Comme E est complet, il suffit de montrer que cette suite est de Cauchy. Or pour $N \geq 0$ et $p \geq 1$ on a, par l'inégalité triangulaire,

$$\|U_{N+p} - U_N\| = \left\|\sum_{n=N+1}^{N+p} x_n\right\| \leq \sum_{n=N+1}^{N+p} \|x_n\| = V_{N+p} - V_N$$

en posant $V_k = \sum_{n \leq k} \|x_n\|$. Or la suite croissante (V_k) est de Cauchy, car par hypothèse convergente. En en déduite que la suite (U_N) est aussi de Cauchy.

□

En fait, cette propriété caractérise les espaces de Banach.

Proposition 2.12. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé qui possède la propriété suivante : toute série de E normalement convergente est convergente. Alors E est un espace de Banach.*

Démonstration. Il faut montrer que $(E, \|\cdot\|)$ est complet. On se donne donc (x_n) une suite de Cauchy de $(E, \|\cdot\|)$. Le fait d'être de Cauchy permet de construire une sous-suite $y_k = x_{n_k}$ de cette suite qui vérifie

$$\forall k \geq 0, \quad \|y_{k+1} - y_k\| = \|x_{n_{k+1}} - x_k\| \ \leq \frac{1}{2^k}.$$

La série $\sum(y_{k+1} - y_k)$ est donc normalement convergente, par théorème de comparaison pour les séries positives (ici avec la série géométrique convergente $\sum \frac{1}{2^k}$). On en déduit que la série $\sum(y_{k+1} - y_k)$ est convergente dans E, c'est-à-dire que ses sommes partielles convergent dans E : il existe donc $x \in E$ tel que

$$\sum_{k=0}^{N}(y_{k+1} - y_k) \to x \quad \text{ dans } (E, \|\cdot\|), \text{ lorsque } \ N \to +\infty,$$

Mais comme

$$\forall N \geq 0, \qquad \sum_{k=0}^{N}(y_{k+1} - y_k) = y_{N+1} - y_0 = x_{n_N} - x_{n_0},$$

on en déduit que la suite $(x_{n_N})_N$ est convergente dans E. Or une suite de Cauchy ne peut avoir au plus qu'une valeur d'adhérence. Par conséquent, la suite (x_n) est convergente dans E. □

Proposition 2.13. *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Si F est un Banach, alors $(L(E, F), \|\cdot\|_{E\to F})$ est aussi un Banach.*

Démonstration. Soit (ψ_n) une suite de Cauchy de $(L(E, F), \|\cdot\|_{E\to F})$. Pour $x_0 \in E$ fixé, la suite $(\psi_n(x_0)$ est une suite de Cauchy de F, puisque pour tous $n, k \in \mathbb{N}$,

$$\|\psi_n(x_0) - \psi_k(x_0)\|_F \leq \|x_0\|\| \, \|\psi_n - \psi_k\|_{E\to F}.$$

Puisque F est complet, on en déduit que la suite $(\psi_n(x_0))$ converge dans F vers un certain vecteur que l'on notera $\psi(x_0) \in F$. En passant à la limite ponctuellement dans l'équation $\psi_n(\lambda x + \mu y) = \lambda\psi_n(x) + \mu\psi_n(y)$, on voit que l'application $x \to \psi(x)$ est une application linéaire de E dans F. Par l'inégalité (anti)-triangulaire $\big|\|\psi_n\| - \|\psi_k\|\big| \leq \|\psi_n - \psi_k\|$, on voit que la suite $(\|\psi_n\|_{E\to F})$ est une de Cauchy de $\mathbb{R}$ donc convergente donc bornée, par un certain $M \geq 0$. En passant à la limite, pour $x \in E$ fixé, dans

$$\|\psi_n(x)\|_E \leq \|\psi_n\|_{E\to F}\|x\|_E \leq M\|x\|_E, \quad \forall n \geq 0,$$

on en déduit que $\psi \in L(E, F)$. Pour conclure que ψ_n tend vers ψ, donnons-nous un $\varepsilon > 0$ quelconque. Par le caractère de Cauchy, on sait qu'il existe un $N \geq 0$ tel que

$$\forall n \geq N, \forall p \geq 0, \qquad \|\psi_{n+p} - \psi_n\|_{E\to F} \leq \varepsilon,$$

soit encore
$$\forall n \geq N, \forall p \geq 0, \forall x \in E, \qquad \|\psi_{n+p}(x) - \psi_n(x)\|_F \leq \varepsilon \|x\|_E.$$
Pour $x \in E$ et $n \geq N$ fixés, on peut passer à la limite quand $p \to +\infty$ et on trouve
$$\forall n \geq N, \forall x \in E, \qquad \|\psi(x) - \psi_n(x)\|_F \leq \varepsilon \|x\|_E.$$
soit encore
$$\forall n \geq N, \qquad \|\psi - \psi_n\|_{E\to F} \leq \varepsilon.$$
Cela montre bien que (ψ_n) est convergente (de limite ψ) dans $(L(E,F), \|\cdot\|_{E\to F})$.

□

Voici enfin un résultat essentiel dans l'analyse (dite spectrale) des applications linéaires, qui a de nombreuses applications dans l'étude des équations aux dérivées partielle, par exemple.

Proposition 2.14. *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach, et $u \in L(E)$ un endomorphisme continu de E tel que $\|u\|_{E\to E} < 1$. Alors l'application $\mathrm{Id}_E + u$ est un automorphisme de E (i.e. c'est une application linéaire continue bijective de E dans E dont l'inverse est aussi continu).*

Démonstration. Pour simplifier les notations, on notera simplement $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{E\to E}$ la norme d'opérateur sur $L(E)$. On va montrer que $\mathrm{Id}_E - u$ est un automorphisme (c'est la même chose puisque $\|u\| = \|-u\|$). L'idée est de se souvenir que pour $s \in [0,1[$, la série géométrique $\sum s^n$ converge et que sa somme vaut $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} s^n = \frac{1}{1-s} = (1-s)^{-1}$. On rappelle la notation u^n, définie par récurrence comme suit : $u^0 = \mathrm{Id}_E$ et $u^{n+1} = u \circ u^n$ $(= u^n \circ u)$. On vérifie facilement, d'après la définition de la norme d'opérateur (voir exercices) que pour tout $n \geq 0$, on a
$$\|u^n\| \leq \|u\|^n.$$
Cela montre, par théorème de comparaison pour les séries positives, que comme $\|u\| \in [0,1[$, que la série $(\|u^n\|)_{n\geq 0}$ est convergente. En d'autres termes, la série de E, $\sum u^n$ est *normalement* convergente. Comme E est un Banach, $L(E)$ l'est aussi, et par conséquent la série $\sum u^n$ converge dans $(L(E), \|\cdot\|)$. Notons $v = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u^n$ sa somme (qui est donc la limite dans $L(E)$ des sommes partielles). On voit que pour $N \geq 1$,
$$(1-u) \circ \sum_{n=0}^{N} u^n = \sum_{n=0}^{N} u^n - \sum_{n=1}^{N+1} u^n = \mathrm{Id}_E - u^{N+1}.$$
Or u^{N+1} tend vers 0 dans $L(E)$ lorsque $N \to +\infty$, puisque $\|u^{N+1}\| \leq \|u\|^{N+1} \to 0$. On a donc, en passant à la limite,
$$(1-u) \circ v = \mathrm{Id}_E.$$
On démontre de la même façon que $v \circ (1-u) = \mathrm{Id}_E$. Ainsi, $1-u$ est bijective, et son inverse est v, qui appartient bien à $L(E)$. □

Terminons par un théorème d'extension utile (par exemple dans l'étude de la transformée de Fourier).

Proposition 2.15 (Principe d'extension). *Soit E, F deux espaces de Banach et $H \subset E$ un sous-espace dense de E (i.e. $\overline{H} = E$). On se donne une application linéaire $T : H \to F$ continue, c'est-à-dire : $\exists C > 0$ tel que pour tout $h \in H$ on ait $\|T(h)\|_F \le C\|h\|_E$.*

Alors on peut étendre T, de manière unique, en une application linéaire continue de E dans F, c'est-à-dire il existe un (unique) $\tilde{T} \in L(E, F)$ tel que $\tilde{T} = T$ sur H. De plus on a $\|\tilde{T}(x)\|_F \le C\|x\|_E$ pour tout $x \in E$.

Démonstration. Soit $x \in E$. On sait qu'il existe une suite $(x_n) \subset H$ tel que $\|x_n - x\| \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. On voudrait poser

$$\tilde{T}x = \lim_{n \to +\infty} Tx_n.$$

Pour pouvoir faire cela, il faut éclaircir les deux points suivants :
- que cette limite existe bien (!) dans F.
- que cette limite dépend seulement de x, et pas du choix de la suite (x_n) qui approche x (il y a plusieurs suites de H qui tendent vers le même x).

Pour le premier point, on remarque que la suite $(T(x_n))_n$ est une suite de Cauchy de F. En effet, pour $n, m \ge 0$ on a

$$\|Tx_n - Tx_m\|_F = \|T(x_n - x_m)\|_F \le C\| x_n - x_m\|_E$$

et la suite (x_n) est une suite de Cauchy de E puisque c'est une suite convergente. Comme F est complet, la suite $(T(x_n))_n$ est convergente, et on peut considérer sa limite dans F. Pour le deuxième point, si (y_n) est une autre suite de H tendant vers x, on a

$$\|Tx_n - Ty_n\|_F \le C\|x_n - y_n\|_E \to 0$$

et donc $(T(y_n))$ a nécessairement la même limite que $(T(x_n))$.

Une fois qu'on a montré que, pour tout $x \in E$, cette limite avait un sens et était commune à toute suite de H approchant x, les autres propriétés sont faciles à vérifier. Tout d'abord $\tilde{T} = T$ sur H puisqu'on peut prendre une suite constante égale à x si $x \in H$. Ensuite $\tilde{T}$ est bien linéaire, puisque que si $(x_n)_n \subset H$ approche x et si $(y_n)_n \subset H$ approche y, alors $(\lambda x_n + \mu y_n)_n \subset H$ approche $\lambda x + \mu y$ et $T(\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda T(x_n) + \mu T(y_n) \to \lambda\tilde{T}(x) + \mu\tilde{T}(y)$. Enfin, par continuité des normes, en passant à la limite dans $\|T(x_n)\|_F \le C\|x_n\|_E$ on voit que pour tout $x \in E$, on a

$$\|\tilde{T}(x)\|_F \le C\|x\|_E.$$

Ainsi, $\tilde{T}$ est bien continue sur E.

L'unicité de l'extension est facile. C'est un principe général : deux applications continues qui coïncident sur une partie dense d'un espace métrique coïncident sur tout l'espace. Ecrivez l'argument vous-mêmes.

□

2.3 Dualité

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. L'espace $L(E, \mathbb{K})$ des formes $\mathbb{K}$-linéaires continues sur E s'appelle le dual (topologique) de E, et on le note E^*. La norme d'opérateur correspondante est appelée la norme duale. Si on la note $\|\cdot\|_*$, c'est donc la norme sur E^* définie par

$$\forall \ell \in E^*, \qquad \|\ell\|_* := \sup_{x \in E,\, \|x\| \leq 1} |\ell(x)| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{|\ell(x)|}{\|x\|}.$$

Par définition, on a donc $|\ell(x)| \leq \|\ell\|_* \|x\|$ pour tout $(\ell, x) \in E^* \times E$. D'après la proposition 2.13 on a :

Proposition 2.16. *L'espace vectoriel normé $(E^*, \|\cdot\|_*)$ est un Banach.*

Remarque 2.17. *Dans le cas où $K = \mathbb{R}$, on peut aussi écrire, pour $\ell \in E^*$,*

$$\|\ell\|_* = \sup_{x \in E,\, \|x\| \leq 1} \ell(x) = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\ell(x)}{\|x\|}.$$

En effet, l'ensemble $\{\ell(x)\,;\ x \in E,\ \|x\| \leq 1\}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à l'origine, puisque pour $x \in \mathbb{R}$ on a $\ell(-x) = -\ell(x)$ et $\|-x\| = \|x\|$.

Dans le cas où $K = \mathbb{C}$, on peut aussi écrire, pour $\ell \in E^*$,

$$\|\ell\|_* = \sup_{x \in E,\, \|x\| \leq 1} \Re(\ell(x)) = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\Re(\ell(x))}{\|x\|}.$$

En effet, l'ensemble $\{\ell(x)\,;\ x \in E,\ \|x\| \leq 1\}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{C}$ invariant par rotations, puisque, pour $x \in E$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\ell(e^{i\theta}x) = e^{i\theta}\ell(x)$ et $\|e^{i\theta}x\| = \|x\|$.

Notation. Pour $\ell \in E^*$ et $x \in E$, on introduit la notation

$$\langle \ell, x \rangle := \ell(x).$$

Cela revient à écrire $\ell = \langle \ell, \cdot \rangle$. L'idée est de cette notation, plus symétrique, est de voir les éléments de E^* comme des vecteurs, plutôt que comme des formes linéaires. Pour un $\ell \in E^*$, la forme linéaire correspondante est notée $\langle \ell, \cdot \rangle$. On voit alors que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit une forme bilinéaire, continue, sur $E \times E^*$, appelée *crochet de dualité*, qui vérifie

$$\forall (\ell, x) \in E^* \times E, \qquad |\langle \ell, x \rangle| \leq \|\ell\|_* \|x\|.$$

Le noyau d'une forme linéaire (non-nulle) est toujours un *hyperplan*, c'est-à-dire un sous-espace de co-dimension 1. En effet, soit $\ell : E \to \mathbb{K}$ une forme linéaire non-nulle. Il existe donc $x_0 \in E$ tel que $\ell(x_0) \neq 0$. Si on note $H = \ker(\ell)$, alors $x_0 \notin H$ et donc $\mathbb{K}x_0$ et H sont en somme directe : $\mathbb{K}x_0 \oplus H \subset E$. Mais pour tout $x \in E$, on peut écrire

$$x = \frac{\ell(x)}{\ell(x_0)} x_0 + (x - \frac{\ell(x)}{\ell(x_0)} x_0)$$

et $\ell\big(x - \frac{\ell(x)}{\ell(x_0)} x_0\big) = 0$. Par conséquent, on a $\mathbb{K}x_0 + H = E$ et donc

$$E = \mathbb{K}x_0 \oplus \ker(\ell).$$

Ci-dessus, nous avons seulement parlé de forme linéaire au sens algébrique, sans parler de continuité. On peut montrer qu'une forme linéaire sur E est continue si et seulement si son noyau est fermé. Mais dans la pratique, nous travaillerons avec E espace de Banach. Or sur un Banach, toutes les formes linéaires que vous rencontrerez seront continues. Pour construire une forme linéaire non-continue sur un Banach, il faut utiliser l'axiome du choix.

En dimension finie, toutes les formes linéaires sont continues et de plus, E et son dual E^* sont de même dimension, puisque $\dim(L(E, \mathbb{R})) = 1 \times \dim(E)$.

On a vu qu'on peut toujours se ramener à $E = (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$. Pour décrire le dual, on peut utiliser le produit scalaire comme crochet de dualité. Pour $x, y \in \mathbb{K}^n$, posons

$$\langle x, y\rangle := x \cdot \overline{y} := \sum_{k=1}^{n} x_k \, \overline{y_k}.$$

Sur $\mathbb{R}^n$, la barre conjugaison est inutile, bien sûr. Alors toute forme linéaire sur $\mathbb{K}^n$ est de la forme

$$x \to \langle x, y_0\rangle,$$

pour un certain $y_0 \in \mathbb{K}^n$. Comme cela on peut identifier le dual de $\mathbb{K}^n$ à $\mathbb{K}^n$. Reste à identifier la norme duale. Si $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$, la norme duale est donc

$$\|y\|_* = \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle x, y\rangle| = \sup_{\|x\|\leq 1} |x \cdot \overline{y}| = \sup_{\|x\|\leq 1} \Re(x \cdot \overline{y}).$$

2.4 Exemples

2.4.1 Les normes L^p

Les exemples les plus importants dans ce cours seront les espaces $L^p(\mu)$ associés à un espace mesuré (X, μ), que nous verrons au prochain chapitre.

On peut déjà en donner une idée en regardant l'espace vectoriel $\mathcal{C}([a, b])$ des fonctions continues (à valeur dans $\mathbb{C}$ ou dans $\mathbb{R}$) sur un intervalle $[a, b]$. Pour simplifier les notations, on va prendre $[a, b] = [0, 1]$ et on notera $\mathcal{C} = \mathcal{C}([0, 1])$. Alors, pour $p \in [1, +\infty[$, on peut définir une norme $\|\cdot\|_p$ sur $\mathcal{C}$ en posant, pour $f \in \mathcal{C}$,

$$\|f\|_p := \Big(\int_{[0,1]} |f|^p\Big)^{1/p}.$$

Ici on intègre implicitement par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[0, 1] \subset \mathbb{R}$. On vérifie que c'est bien un norme. L'homogénéité est immédiate, et si $\|f\|_p = 0$, alors la fonction positive $|f|^p$ doit être nulle presque partout, mais comme elle est continue, cela veut dire que $f = 0$ sur $[0, 1]$. Reste à vérifier l'inégalité triangulaire.

Pour $p = 1$, il suffit d'intégrer l'inégalité $|f + g| \leq |f| + |g|$. Pour $p > 1$, on combine cette inégalité avec l'inégalité de Minkowski : pour $f, g \in \mathcal{C}$ on a

$$\Big(\int_{[0,1]} |f+g|^p\Big)^{1/p} \leq \Big(\int_{[0,1]} \big(|f|+|g|\big)^p\Big)^{1/p} \leq \Big(\int_{[0,1]} |f|^p\Big)^{1/p} + \Big(\int_{[0,1]} |g|^p\Big)^{1/p}.$$

Ainsi, $(\mathcal{C}, \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé. Mais on peut montrer que ce n'est pas un espace de Banach. En fait, le plus petit espace de Banach contenant $(\mathcal{C}, \|\cdot\|_p)$ est justement l'espace $(L^p([0,1]), \|\cdot\|_p)$ que l'on verra plus loin.

2.4.2 Espaces de suites

On considère les suites d'éléments de $\mathbb{K}$ indexées par $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$, que l'on note $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$.

On a donc quatre espaces possibles : $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$, $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$. Les espaces les plus utilisés sont $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (suites de réelles) et $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$, que l'on rencontrera dans l'étude des séries de Fourier. On rappelle que la série d'éléments de $\mathbb{K}$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n$ est convergente si les deux séries $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\leq 0} a_n$ sont convergentes.

Sur $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ on peut prendre la mesure de comptage notée m. La convergence de la série (positive) $\sum |a_k|$ équivaut à l'intégralité de la fonction $n \to a_n$. Si cela a lieu, on dit que la famille/suite (a_n) est sommable.

Il est important de remarquer que, comme pour l'intégrale, si on travaille avec des suites positives, les quantités $\sum_{\mathbb{N}} a_n$ ou $\sum_{\mathbb{Z}} a_n$ ont toujours un sens : c'est un réel positif (si la famille est sommable) ou bien $+\infty$. De plus, peu importe la manière dont on somme, en vertu de théorème de convergence monotone. En particulier, la série positive $\sum_{\mathbb{Z}} a_n$ sera convergente si et seulement si les sommes partielles symétriques $\sum_{n=-N}^{N} a_n$ ont une limite, par exemple.

Dans le cas de suites de signe quelconque ou complexe, indexée par $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$, la sommabilité se réduit donc à l'étude de la série positive $\sum |a_n|$.

Désignons pas I l'ensemble d'indices $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$. Pour $p \in [1, +\infty)$ on peut introduire, pour $a = (a_n) \in \mathbb{K}^I$,

$$\|a\|_p := \|(a_n)\|_p := \Big(\sum_{n\in I} |a_n|^p\Big)^{1/p} \in [0, +\infty],$$

et pour $p = +\infty$, $\|a\|_\infty := \|(a_n)\|_\infty = \sup_{n\in I} |a_n|$. Alors, pour $p \in [1, +\infty]$, on introduit l'ensemble

$$\ell_p^{\mathbb{K}}(I) := \{a \in \mathbb{K}^I \ ; \ \|a\|_p < +\infty\}.$$

Ainsi, dire que $(a_k) \in \ell_p^{\mathbb{K}}(I)$ c'est dire que la série $\sum_I |a_k|^p$ est convergente et poser $\|(a_k)\|_p := \Big(\sum_{n\in I} |a_n|^p\Big)^{1/p}$.

On voit que $\ell_p^{\mathbb{K}}(I)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\|\cdot\|_p$ est une norme sur cet espace. C'est une conséquence de l'inégalité de Minkowski. OK ? Nous verrons au prochain chapitre un résultat plus général. En particulier, nous verrons que $\ell_p^{\mathbb{K}}(I)$ est un espace de Banach, et nous verrons aussi plus tard que le dual de $\ell_p^{\mathbb{K}}(I)$, pour $p \in [1, +\infty[$ est l'espace $\ell_q^{\mathbb{K}}(I)$ avec $q \in]1, +\infty]$ donné par $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Quand il n'y a pas d'ambiguité sur $\mathbb{K}$ et I, on écrit simplement ℓ_p.

Maintenant, une observation simple qui perturbe un peu la première fois qu'on la voit. Notons, pour $k \in I = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$, e^k la suite définie par

$$\forall i \in I, \qquad (e^k)_i = \delta_{ik}.$$

On voit que e^k est dans tous les ℓ_p, $p \in [0, +\infty]$. La famille des vecteurs (e^k) est spéciale. On a bien sûr que pour toute partie finie $A \in I$, si on se donne des scalaires $x_k \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ pour $k \in A$ on a

$$\sum_{k \in A} x_k e^k \in \ell^p.$$

On voit alors que, lorsque $p < +\infty$, pour toute suite $x = (x_k)_{k \in I}$ on a

$$(x_k) \in \ell_p \iff \text{ la série } \sum x_k e^k \text{ converge dans } \ell_p.$$

Attention, à droite on a une série de vecteurs, et à gauche, dans la définition, une série de réels positifs. De plus, lorsque (x_k) est dans ℓ_p, on sait que la somme de série convergente $\sum x_k e^k$ est x, ce qui s'écrit

$$x = \sum_{k \in I} x_k e^k.$$

On dit qu'on a décomposé x dans la "base canonique" e^k. Attention, cette formule est dangereuse, car on pourrait oublier qu'elle contient une limite, qui est définie au sens de $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$. Or c'est le point le plus important ! Pour le dire autrement, par exemple dans le cas où $I = \mathbb{N}$, on a que pour $x = (x_k) \in \ell_p$, introduisons, pour $n \geq 0$,

$$S_n(x) := \sum_{k=0}^{n} x_k e^k,$$

qui est donc un vecteur défini comme une somme de vecteurs, et qui vérifie $S_n(x) = (x_0, x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$. Alors ce qu'on vient de dire plus haut est que la suite $(S_n(x))_n$ de vecteurs de ℓ_p converge vers x dans ℓ_p, ce qui ce voit en remarquant que

$$\|x - S_n(x)\|_p = \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p \Big)^{1/p} \to 0$$

lorsque $n \to +\infty$, puisque le reste d'une série convergente tend vers 0.

On remarquera que cette observation est FAUSSE lorsque $p = \infty$, comme on peut s'en persuader en prenant $x = (1, 1, 1, \ldots) \in \ell_\infty$. L'espace ℓ_∞ est l'espace des suites bornées, muni de la norme du sup, et cela ne s'exprime plus en terme de séries.

Remarque 2.18. *La famille (e^k) ne forme pas une base de ℓ_p au sens algébrique (heureusement, pourrait-on-dire, car en analyse les base algébriques ne servent à rien).*

2.4.3 Les espaces ℓ_p^n

Pour $p \in [1, +\infty[$, on peut définit

$$\forall x \in \mathbb{K}^n, \qquad \| x \|_p := \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \Big)^{1/p}.$$

Pour $p = +\infty$, on pose $\|x\|_\infty = \max_{k \leq n} |x_k|$. On pourra vérifier à titre d'exercice que pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, on a : $\lim_{p \to +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

Fait 2.19. *Pour tout $p \in [1, +\infty]$, $\| \cdot \|_p$ définit une norme sur $\mathbb{K}^n$.*

Démonstration. Le seul point qui demande du travail est l'inégalité triangulaire. Comme d'habitude, on se ramène à des nombres positifs par l'inégalité triangulaire

$$|x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k|.$$

Et alors l'inégalité triangulaire se ramène directement de l'inégalité de Minkowski vue au chapitre précédent □

On note $\ell_p^n = (\mathbb{K}^n, \| \cdot \|_p)$ l'espace vectoriel correspondant (en fait, cette notation est plutôt réservée au cas où $K = \mathbb{R}$; dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on rajoute un indice $\mathbb{C}$ quelque part pour le distinguer de l'espace réel).

On peut sans trop de difficulté identifier le dual de ℓ_p^n.

Proposition 2.20. *Pour $p \in [1, +\infty]$, le dual de ℓ_p^n est ℓ_q^n où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

Démonstration. On sait que le dual algébrique est encore $\mathbb{K}^n$ si l'on utilise l'identification donnée par le produit scalaire $\langle x, y \rangle = x \cdot \overline{y}$. La seule question est donc d'identifier la norme duale, que l'on note $\| \cdot \|$ sur $\mathbb{K}^n$, qui est donc donnée par

$$\|y\| = \sup_{\|x\|_p \leq 1} |\langle x, y \rangle|.$$

L'inégalité de Hölder nous dit que pour tout $x, y \in \mathbb{K}^n$ on a

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_p \|y\|_q,$$

et donc $\|y\| \leq \|y\|_q$. Lorsque $p \in]1, +\infty[$, on a vu que pour un y donné non-nul, on peut trouver un x non-nul pour lequel il y a égalité dans l'inégalité de Hölder (voir les exercices pour le détail de l'argument), ce qui veut dire que si on prend $\frac{x}{\|x\|_p}$ dans le sup, on aura $\|y\| \geq \|y\|_q$, ce qui montre que $\| \cdot \| = \| \cdot \|_q$. Le cas $p = 1, q = \infty$ se traite facilement.

□

Remarque 2.21. *Pour une bonne part, le résultat général qu'on verra plus tard, à savoir que le dual de L^p est L^q (ici pour $p \in [1, +\infty[$), aura la même démonstration. Pour trouver la norme duale, on utilisera l'inégalité de Hölder et un cas d'égalité dans l'inégalité de Hölder. La difficulté sera cependant d'identifier l'espace dual, chose qui, en dimension finie, ne posait pas de problème puisqu'on savait que c'était $\mathbb{K}^n$.*

2.4.4 L'espace $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$

On regarde le cas $p = +\infty$ du premier exemple ci-dessus.

Pour toute fonction (bornée) f sur $[0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on peut introduire $\|f\|_\infty := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Il est facile[1] de vérifier qu'il s'agit d'une norme sur l'espace vectoriel des fonctions bornées sur $[0,1]$. Cette norme est appelée, logiquement, "norme de la convergence uniforme" puisque $\|f - f_n\|_\infty \to 0$ veut dire que f_n converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Notons $\mathcal{C}([0,1])$ le sous-espace formé des fonctions continues (c'est bien un sous-espace par les théorèmes d'opération sur les fonctions continues).

Proposition 2.22. *L'espace* $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ *est un Banach.*

Démonstration. Soit (f_n) une suite de Cauchy de $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$. Pour chaque $x \in [0,1]$ fixé, la suite de scalaires $(f_n(x))_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est aussi une suite de Cauchy, puisque

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty.$$

Par conséquent, cette suite converge. On note $f(x) \in \mathbb{K}$ sa limite, et f la fonction ainsi construite, qui est donc la limite simple (on dit aussi ponctuelle) de la suite f_n. On peut noter que f est bornée. En effet, la suite (f_n) est bornée dans $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ puisque de Cauchy : il existe $C > 0$ tel que $\|f_n\|_\infty \leq C$ pour tout $n \geq 0$. On a donc, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \geq 0$, $|f_n(x)| \leq C$ et par passage à la limite, $|f(x)| \leq C$ pour tout $x \in [0,1]$.

On va montrer que $\|f - f_n\|_\infty \to 0$, puis que f est continue, ce qui achèvera la démonstration.

Soit $\epsilon > 0$. Par définition du caractère de Cauchy et de la norme $\|\cdot\|_\infty$, il existe un rang $N \geq 0$ tel que, si

$$\forall n, m \geq N,\ \forall x \in [0,1], \qquad |f_m(x) - f_n(x)| \leq \epsilon.$$

Les $\forall$ commutent : pour x fixé, en faisant tendre m vers $+\infty$, on déduit que

$$\forall n \geq N,\ \forall x \in [0,1], \qquad |f(x) - f_n(x)| \leq \epsilon,$$

c'est-à-dire $\|f - f_n\|_\infty \leq \epsilon$ dès que $n \geq N$. On a donc montré que $\|f - f_n\|_\infty \to 0$. Par ailleurs, on sait qu'une limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue. Ainsi f est continue, et on a $f_n \to f$ dans $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ □

L'étude du dual de $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ est intéressante et délicate. On peut déjà faire l'observation suivante.

Proposition 2.23. *Soit* μ *une mesure borélienne finie sur* $[0,1]$. *Alors l'application* $L_\mu : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathbb{K}$ *donnée par*

$$\forall f \in \mathcal{C}([0,1]), \qquad L_\mu(f) := \int_{[0,1]} f\, d\mu$$

est une forme linéaire continue sur $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$, *et sa norme vaut* $\mu([0,1])$.

1. Ici "facile" veut dire : faites-le.

Démonstration. Notons d'abord que toute fonction continue est μ-intégrable, car μ étant finie, toute fonction borélienne bornée est μ-intégrable. Ainsi L_μ est bien définie, et la linéarité de L_μ découle de la linéarité de l'intégrale sur les fonctions μ-intégrables. Par ailleurs, on a

$$\forall f \in \mathcal{C}([0,1]), \qquad |L_\mu(f)| \leq \int_{[0,1]} |f| \, d\mu \leq \mu([0,1]) \|f\|_\infty.$$

On en tire que L_μ est bien continue, et que si on note $\|\cdot\|$ la norme duale sur $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)^*$, on a $\|L_\mu\| \leq \mu([0,1])$. Mais si on prend $f \equiv 1$, on a $\|f\|_\infty = 1$ et $L_\mu(f) = \mu([0,1])$. On a donc bien $\|L_\mu\| = \mu([0,1])$. $\square$

Chapitre 3

Espaces L^p

Dans tout ce chapitre, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ désigne un espace mesuré quelconque.

3.1 Espace $\mathscr{L}^p$ et espace L^p

Si f est une fonction mesurable à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note, pour $p \in [1, +\infty[$

$$\| f \|_p := \left(\int_E | f |^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}},$$

qu'on appelle[1] *norme* $\mathscr{L}^p$ de f, et lorsque $p = \infty$,

$$\| f \|_\infty := \inf\{a > 0 \; ; \; \mu(\{| f | \geq a\}) = 0\},$$

qu'on appelle[2] *supremum essentiel* de f.

Définition 3.1 ($p \in [1, +\infty[$). *On note $\mathscr{L}^p(E, \mathscr{A}, \mu)$, ou $\mathscr{L}^p(\mu)$, l'ensemble de toutes les fonctions mesurables à valeurs dans ans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telles que $| f |^p$ est μ-intégrable, i.e. telles que $\|f\|_p < +\infty$.*

Définition 3.2 ($p = \infty$). *On note $\mathscr{L}^\infty(E, \mathscr{A}, \mu)$, ou $\mathscr{L}^\infty(\mu)$, l'ensemble de toutes les fonctions mesurables f à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ qui sont μ-*essentiellement bornées*, c'est-à-dire telles qu'il existe $a > 0$ pour lequel $\mu(\{| f | \geq a\}) = 0$, soit encore telles que $\|f\|_\infty < +\infty$.*

On remarquera que pour $f \in \mathscr{L}^\infty(\mu)$ on a

$$\mu(\{|f| > \|f\|_\infty\}) = 0$$

En effet, on a $\mu(\{|f| > \|f\|_\infty\}) = \mu\Big(\bigcup_{n \geq 1} \Big\{ |f| \geq \|f\|_\infty + \frac{1}{n} \Big\} \Big)$ et on conclut par convergence monotone. En particulier, pour toute partie mesurable A on a $\mu(A) = \mu(A \cap \{|f| \leq \|f\|_\infty\})$.

1. mais dont nous verrons qu'il ne s'agit en fait que d'une semi-norme
2. mais on devrait dire μ-supremum essentiel

Remarque 3.3. *Si on éprouve le besoin de préciser que l'on travaille avec des fonctions réelles ou des fonctions complexes, on peut ajouter "espace $\mathscr{L}^p$-réel" ou "espace $\mathscr{L}^p$-complexe".*

Remarque 3.4. *Dans les deux définitions ci-dessus, on peut autoriser la fonction $|f|$ à prendre la valeurs $+\infty$ (en particulier on peut considérer des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$). Cela ne change rien du point de vue de l'intégration par rapport à μ, car pour une fonction dans $\mathscr{L}^p$, cela ne peut avoir lieu que sur un ensemble de μ-mesure nulle. En effet, si p est fini, $|f|^p$ μ-intégrable entraine que $\mu(\{|f| = +\infty\}) = 0$. Pour $p = +\infty$, si $\|f\|_\infty < +\infty$, cela veut dire qu'il existe $a > 0$ fini tel que $\mu(\{|f| \geq a\}) = 0$, et $\mu(\{|f| = +\infty\}) \leq \mu(\{|f| \geq a\})$.*

Proposition 3.5. *Pour tout $p \in [1, +\infty]$, on a, pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f, g \in \mathscr{L}^p$, on a*

1. *$\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$, et*
2. *$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.*

En particulier, $(\mathscr{L}^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel.

Démonstration. Le premier point est évident par linéarité de l'intégrale si $p < \infty$. Si $p = +\infty$,

$$\begin{aligned} \| af \|_\infty &= \inf\{m > 0 : \mu(\{| af | \geq m\}) = 0\} \\ &= | a | \inf\{m' > 0 : \mu(\{| af | \geq | a | m'\}) = 0\} \\ &= | a | \inf\{m' > 0 : \mu(\{| f | \geq m'\}) = 0\} = | a | \| f \|_\infty. \end{aligned}$$

Le deuxième point est évident pour $p = 1$ à partir de l'inégalité $|f + g| \leq |f| + |g|$. Pour $p \in]1, +\infty[$, on combine cela avec l'inégalité de Minkowski. Pour le cas $p = \infty$, on remarque que si $a > \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ on a,

$$\begin{aligned} \mu(\{|f + g| \geq a\}) &\leq \mu(\{|f| + |g| \geq a\}) \\ &= \mu\Big(\{|f| + |g| \geq a\} \cap \{|f| \leq \|f\|_\infty\} \cap \{|g| \leq \|g\|_\infty\}\Big) = \mu(\emptyset) = 0, \end{aligned}$$

et donc $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. $\square$

Par ailleurs, si f est la fonction nulle, on a $\|f\|_p = 0$. Alors que manque-t-il à $\|\cdot\|_p$ pour être une norme sur $\mathscr{L}^p$? Pas grand chose, mais le problème vient du fait que pour $f \in \mathscr{L}^p$ on a

$$\|f\|_p = 0 \iff f = 0 \ \ \mu\text{-p.p.}$$

Cela est clair pour $p < +\infty$, puisque dire que la fonction positive $|f|^p$ a une intégrale nulle, cela veut dire qu'elle est nulle μ-pp. Pour $p = \infty$, si $\|f\|_\infty = 0$, alors $\mu(\{|f| > 0\}) = \mu(\bigcap_{n\geq 1}\{|f| \geq \frac{1}{n}\}) = 0$, par convergence monotone.

Ainsi, on veut construite un espace tel que f nulle μ-presque partout veut dire que f est le vecteur nul. Pour cela, on fait le quotient de $\mathscr{L}^p$ par la relation d'équivalence suivante :

$$f \sim g \iff f = g \ \ \mu\text{-p.p.} \iff \|f - g\|_p = 0$$

Ainsi, on considère l'ensemble quotient $\mathscr{L}^p(\mu)/\sim$ (que l'on notera $L^p(\mu)$) formé par les classes d'équivalences modulo $\sim$. Notez que la relation d'équivalence associée à chaque $\| \cdot \|_p$ ne dépend pas de p et est la même pour tous les espaces $\mathscr{L}^p$: la classe d'une fonction mesurable f est constituée par les fonctions mesurables qui coïncident avec f μ-presque partout.

Si on note $\mathcal{N}$ l'ensemble des fonctions mesurables nulles μ-presque partout, on peut aussi écrire

$$f \sim g \Longleftrightarrow f - g \in \mathcal{N}$$

Or $\mathcal{N}$ est un espace vectoriel (et un sous-espace vectoriel de tout $\mathscr{L}^p(\mu)$), et il est classique de voir que les structures d'espace vectoriel passent au quotient. En résumé :

Définition 3.6. *Pour $p \in [1, +\infty]$, on note $L^p(E, \mathscr{A}, \mu)$, ou $L^p(\mu)$, l'ensemble des classes d'équivalence des éléments de $\mathscr{L}^p(\mu)$ par la relation d'équivalence définie par l'égalité μ-p.p.*

Soit $\tilde{f} := \{g \; ; \; g = f \; \mu\text{-p.p.}\}$ la classe d'équivalence de f. Les opérations classiques s'étendent aux classes d'équivalence, avec $\widetilde{af} = a\tilde{f}$ et $\widetilde{f+g} = \tilde{f} + \tilde{g}$.

On peut également définir $\| \cdot \|_p$ sur $L^p(\mu)$ par $\| \tilde{f} \|_p = \| f \|_p$, qui ne dépend pas du représentant choisi, car $f = g$ μ-p.p. implique $\| f \|_p = \| g \|_p$.

Remarque 3.7. *On fera systématiquement l'abus de notation qui consiste à ne pas différencier fonctions et classes d'équivalences, c'est-à-dire à utiliser le même symbole pour une fonction f et pour sa classe d'équivalence $\tilde{f}$.*

C'est une question d'habitude. La seule manière de comprendre L^p, c'est de l'utiliser. En fait, sur $L^p(\mu)$ on pense plutôt "$\mathscr{L}^p(\mu)$", c'est-à-dire à des fonctions, plutôt qu'à des classes d'équivalences, mais on se souvient que les objets ne sont définis que μ-pp. Ainsi, par exemple, on a coutume de dire que deux fonctions f et g sont égales dans L^p si elles coïncident μ-pp (même si on devrait simplement dire qu'elle définissent la même classe d'équivalence dans $L^p(\mu)$).

On a alors immédiatement ce que l'on cherchait.

Théorème 3.8. *L'ensemble $(L^p(\mu), \| \cdot \|_p)$ est un espace vectoriel normé.*

Exemple 3.9. *On note $\ell_p(\mathbb{N})$ ou simplement ℓ_p l'espace $\mathscr{L}^p(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), m)$, où m est la mesure de comptage. On distingue parfois les espaces réels $\ell_p^{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$et complexes $\ell_p^{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$.*

Soit $u \in \ell^p$. Si $p < \infty$, alors

$$\| u \|_p = \left(\sum_n | u_n |^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

tandis que si $p = +\infty$,

$$\| u \|_\infty = \sup_n | u_n |.$$

Il n'est pas besoin ici de quotienter $\mathscr{L}^p$ car $\| u \|_p = 0$ implique $u = 0$.

On a la même chose pour $\ell^p(\mathbb{Z}) = \mathscr{L}^p(\mathbb{Z}, \mathscr{P}(\mathbb{Z}), m)$.

3.2 Convergence dans L^p et convergence simple

Rappelons que la topologie usuelle d'un espace vectoriel normé est la topologie relative à la distance $d(f, g) = \| f - g \|$. Ainsi on dira que la suite (f_n) converge (vers f) dans L^p si

a) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in L^p$ et $f \in L^p$;

b) $\lim_n \| f - f_n \|_p = 0$.

On rappelle que la suite (f_n) converge simplement vers f si $\lim_n f_n(x) = f(x)$ pour μ-presque tout x.

On remarque que si (f_n) converge dans $L^1(\mu)$ vers f, alors $\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$. La réciproque est fausse en général.

Le théorème de convergence dominée est généralement énoncé en terme de fonction intégrable, mais on peut aussi en donner une version (équivalente) L^p.

Proposition 3.10. *(Convergence L^p-dominée) Soit $p \in [1, +\infty[$. Si $f_n \to f$ μ-p.p. et qu'il existe $g \in L^p$ tel que $| f_n | \leq g$ pour tout entier n, alors $f_n \xrightarrow{L^p} f$.*

On remarquera que ce théorème est faux pour $p = \infty$ (contre-exemple ?).

Démonstration. On applique le théorème de convergence dominée. En effet, $| f_n - f |^p \leq (| f_n | + | f |)^p \leq 2^p | g |^p$ μ-p.p., et par hypothèse $| g |^p$ est intégrable, donc comme $| f_n - f |^p \to 0$, μ-p.p., on a la convergence vers 0 de $\int | f_n - f |^p \, d\mu$.

□

Proposition 3.11 (Extraction d'une sous-suite convergeant simplement)**.** *Soit $p \in [1, +\infty]$. Si $f_n \xrightarrow{L^p} f$, alors il existe une suite extraite de (f_n) qui converge vers f μ-p.p.*

Dans le cas $p = +\infty$, on a bien sûr beaucoup mieux : $f_n \to f$ uniformément en dehors d'un ensemble négligeable (en particulier, $f_n \to f$ μ-p.p., pas besoin de sous-suite).

Démonstration. On traite d'abord le cas $1 \leq p < +\infty$. Si (f_n) converge vers f dans $L^p(\mu)$, on peut trouver une sous-suite $(f_{n_k})_{k \geq 0}$ tel que pour tout $k \geq 1$,

$$\|f_{n_k} - f\|_p \leq 2^{-k}.$$

Introduisons la suite de fonctions positives $u_k = |f_{n_k} - f|^p$. Par le théorème de Beppo-Levi (convergence monotone) on a

$$\int \sum_{k \geq 0} u_k(x) \, d\mu(x) = \sum_{k \geq 0} \int u_k(x) \, d\mu(x) \leq \sum_{k \geq 0} (2^{1/p})^{-k} < +\infty.$$

Par conséquent, il existe un ensemble de mesure nulle $\mathcal{N}$ tel que $\forall x \in X \backslash \mathcal{N}$, $\sum_{k \geq 0} u_k(x) < +\infty$. Donc, pour $x \in X \setminus \mathcal{N}$ la série réelle $\sum u_k(x)$ est convergente, et donc son terme général tend vers zero, c'est à dire $f_{n_k}(x) \to f(x)$.

Pour $p = +\infty$, c'est la définition de la convergence dans $L^\infty(\mu)$.

□

Exemple 3.12. *Dans le cas de l'espace ℓ^p (pour $p < \infty$), une suite (de fonctions, aussi appelées suites ici...) $(u^{(n)})$ converge vers la fonction $u \in \ell^p$ si $\sum_k | u_k^{(n)} |^p < \infty$, si $\sum_k | u_k |^p < \infty$ et si*

$$\lim_n \sum_k | u_k^{(n)} - u_k |^p = 0.$$

Ceci implique en particulier que $u_k^{(n)} \longrightarrow u_k$ lorsque $n \to \infty$. En conclusion, dans l'espace ℓ^p (vrai aussi si $p = +\infty$ par b)ii)),

$$f_n \overset{\ell^p}{\to} f \qquad \Longrightarrow \qquad f_n \to f \qquad \textit{simplement (partout).}$$

Évidemment, on n'a pas la réciproque, comme on peut le voir sur le contre-exemple $u^{(n)} = \mathbb{1}_{\{n\}} = e_n$. Alors la suite $(u^{(n)})$ converge simplement vers la fonction nulle car $u_k^{(n)} = 0$ pour tout $k > n$. Néanmoins pour tout n, la fonction $u^{(n)}$ est à distance 1 de la fonction nulle : $\| u^{(n)} - 0 \|_p = (\sum_k | u_k^{(n)} |^p)^{1/p} = 1$ pour tout p (même $p = \infty$), et donc ne converge pas vers la suite nulle dans ℓ^p. En effet, ici la plus petite fonction dominant la suite $(u^{(n)})$ est la fonction v constante à 1. Pour $p < \infty$, cette fonction n'est pas dans ℓ^p, donc on ne peut pas appliquer a). De plus, $v \in \ell^\infty$, ce qui montre aussi que la Proposition 3.10 n'est pas valide en général pour $p = \infty$.

Corollaire 3.13. *Soit $p \in [1, +\infty]$. Si l'on a la convergence de la suite (f_n) vers f dans L^p et vers g μ-p.p. alors f et g sont égales μ-p.p.*

Démonstration. On sait qu'il existe une suite extraite $(f_{\varphi(n)})$ qui converge μ-p.p. vers f. Or la suite (f_n) converge μ-p.p. vers g, donc la sous-suite $(f_{\varphi(n)})$ également. Ainsi $f = g$ μ-p.p. □

3.3 Complétude des espaces L^p

Théorème 3.14 (de Riesz–Fisher)**.** *Pour tout $p \in [1, +\infty]$, $L^p(\mu)$ est un espace de Banach.*

Démonstration. Soit (f_n) une suite de Cauchy de $L^p(\mu)$. On veut montrer qu'elle converge dans L^p. Remarquons qu'il suffit de montrer qu'une sous-suite $(f_{n_k})_k$ converge. En effet, si f est la limite de cette sous-suite on a alors pour tout n, k,

$$\|f_n - f\|_p \leq \|f - f_{n_k}\|_p + \|f_{n_k} - f_n\|_p,$$

et chaque terme peut être rendu petit, le premier en prenant k assez grand (par définition de la limite), et le deuxième en prenant k (puisque $n_k \geq k$) et n assez grands, par le caractère de Cauchy.

Le caractère de Cauchy nous permet de trouver une sous-suite (f_{n_k}) tel que

$$\forall k \geq 0, \qquad \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq 2^{-k}.$$

Posons alors

$$u_0 = f_{n_0}, \qquad \text{et pour } k \geq 1 \;\; u_k = f_{n_k} - f_{n_{k-1}},$$

de sorte que pour $N \geq 0$, la somme partielle vérifie

$$U_N := u_0 + u_1 + \ldots + u_N = f_{n_N}.$$

On se demande donc si la série $\sum u_k$ converge dans $L^p(\mu)$.

Posons, pour (presque tout) $x \in E$, et $N \geq 0$,

$$V_N(x) = \sum_{k=0}^{N} |u_k(x)|.$$

Pour x fixé, c'est une suite croissante qui converge vers une limite que l'on note $V(x)$:

$$V(x) := \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k(x)| \in [0, +\infty].$$

La suite croissante $V_N(x)^p$ converge elle vers $V(x)^p$ lorsque $N \to +\infty$ (en convenant que $(+\infty)^p = +\infty$) et comme

$$\int V_N(x)^p \, d\mu(x) = \Big\| \sum_{k=0}^{N} |u_j| \Big\|_p^p \leq \Big(\sum_{k=0}^{N} \|u_j\|_p \Big)^p \leq \Big(\|f_{n_0}\|_p + \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k} \Big)^p =: M < +\infty,$$

on a par convergence monotone

$$\int V(x)^p \, d\mu(x) \leq M < +\infty.$$

Cela force l'ensemble $\mathcal{N} := \{V^p = +\infty\} = \{V = +\infty\}$ à être de mesure nulle. Pour $x \notin \mathcal{N}$, on a

$$V(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k(x)| < +\infty,$$

ce que veut dire que la série $\sum u_k(x)$ est elle aussi convergente dans $\mathbb{K}$, car absolument convergente ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est complet). Pour $x \notin \mathcal{N}$, on pose

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_j(x) = \lim_{N \to +\infty} U_N(x) = \lim_{N \to +\infty} f_{n_N}(x)$$

la somme de cette série convergente. On peut poser $f(x) = 0$ pour $x \in \mathcal{N}$, si on veut, mais ce n'est pas nécessaire si on raisonne μ-pp. Notez que f est une fonction mesurable comme limite simple (presque partout) d'une suite de fonctions mesurables. Par ailleurs, on a μ-pp, par convergence simple,

$$|f|^p \leq \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k| \Big)^p = V^p$$

et donc $f \in L^p(\mu)$. Il reste à montrer la convergence dans $L^p(\mu)$. On a que U_N converge simplement vers f et $|U_N| \leq V_N \leq V$. Comme $V \in L^p(\mu)$, on peut conclure par convergence dominée dans $L^p(\mu)$ que U_N converge vers f dans $L^p(\mu)$ dans le cas $p < +\infty$. On a donc bien montré que la sous-suite (f_{n_k}) convergeait dans $L^p(\mu)$.

$\square$