Examen du 22 mai 2018

Documents et tout instrument électronique interdits

La plus grande importance sera accordée à la rigueur et à la clarté de l'argumentation.

Exercice 1.

a) Soit μ une mesure finie sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$. Soit $1 \le p \le q \le +\infty$. Montrer que $L^q(X,\mu) \subset L^p(X,\mu)$ et que l'injection canonique $\mathrm{Id} : L^q(X,\mu) \to L^p(X,\mu)$ est une application linéaire continue dont on donnera la norme d'opérateur.

b) On considère le cas particulier où $X = [0,1]$ muni de la tribu borélienne et μ est la mesure de Lebesgue. Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur $L^2([0,1]) \subset L^1([0,1])$ sont-elles équivalentes ? Vous justifierez votre réponse.

Solution de l'exercice 1. Si $p = q$, c'est évident et la norme d'opérateur l'application identité (qui est bien linéaire) vaut 1. On supposera que $1 \le p < q$.
Supposons d'abord que $q < +\infty$. Comme $t := p/q \in]0,1[$, on a par l'inégalité de Hölder (ou de Jensen, après avoir normalisé pour avoir une probabilité), pour toute fonction mesurable g,

$$\int |g|^p \, d\mu = \int (|g|^q)^t 1^{1-t} \, d\mu \le \Big(\int |g|^q \, d\mu \Big)^t \mu(X)^{1-t}$$

soit encore

$$\|g\|_{L^p(\mu)} \le \mu(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|g\|_{L^q(\mu)}.$$

Cela montre l'inclusion voulue. Cela montre aussi que l'injection canonique, qui est clairement linaire, est continue, de norme d'opérateur $\le \mu(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$. Comme il y égalité dans l'inégalité ci-dessous lorsque g est constante, on voit que la norme d'opérateur de l'inclusion vaut exactement $\mu(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$.
Si $q = +\infty$, alors comme μ est finie, toute fonction ν-essentiellement bornée est μ intégrable, et plus précisément

$$\|g\|_{L^p(\mu)} \le \nu(X)^{1/p} \|g\|_{L^\infty(\mu)},$$

avec égalité si g est constante, ce qui montre que le résultat précédent est encore valable dans ce cas.

Regardons le cas où $X = [0,1]$ muni de la mesure de Lebesgue, qui est alors une probabilité sur les boréliens de X. On a par la question précédente $L^2 \subset L^1$, avec $\|\cdot\|_1 \le \|\cdot\|_2$. Pour autant, ces deux normes ne sont pas équivalentes sur L^2, puisque si on prend la suite de fonctions positives mesurables

$$f_n = 1_{[0, \frac{1}{n}]} \in L^2$$

on observe que

$$1 \le \frac{\|f_n\|_2}{\|f_n\|_1} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}} = \sqrt{n} \to +\infty.$$

Exercice 2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach (réel). On suppose qu'il existe une suite $(e_n)_{n \ge 1}$ de vecteurs de E et un $p \in [1, +\infty[$ tels que pour toute suite finie de réels $c_1, \ldots, c_N$ ($N \ge 1$ quelconque) on a

$$\|c_1 e_1 + \ldots + c_N e_N\|^p = |c_1|^p + \ldots + |c_N|^p.$$

a) Montrer que $\|e_n\| = 1$ pour tout $n \ge 1$.

b) Montrer que si $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est une suite de réels telle que $\sum |\alpha_n|^p < +\infty$ (i.e. $(\alpha_n)_n \subset \ell^p(\mathbb{N}^*)$), alors la série $\sum \alpha_n e_n$ converge dans $(E, \|\cdot\|)$.
On pourra éventuellement penser au critère de Cauchy.

On suppose dans la suite qu'il existe une suite $(\varphi_k)_{k\geq 1} \subset E^*$ de formes linéaires continues sur E qui vérifie les trois propriétés suivantes :

(i) Pour $n, k \geq 1$

$$\varphi_k(e_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq k \\ 1 & \text{si } n = k \end{cases}.$$

(ii) Pour tout $N \geq 1$ et $x \in E$,

$$\|\varphi_1(x)e_1 + \dots \varphi_N(x)e_N\| \leq \|x\|.$$

(iii) $\bigcap_{k\geq 1} \ker(\varphi_k) = \{0\}$.

c) Montrer que pour tout vecteur $x \in E$, la série $\sum \varphi_n(x)e_n$ converge dans $(E, \|\cdot\|)$ et que sa somme vaut x. Montrer également que $\|x\| = \left(\sum |\varphi_n(x)|^p\right)^{1/p}$.
On pourra s'inspirer de la théorie des bases hilbertiennes, et commencer par montrer que les sommes partielles des la série $\sum |\varphi_n(x)|^p$ sont majorées.

d) Pourriez-vous donner un exemple d'espace pour lequel on a des suites $(e_n) \subset E$ et $(\varphi_n) \subset E^*$ vérifiant les propriétés ci-dessus ?

Solution de l'exercice 2.

a) $\|e_n\|^p = \|1\, e_n\|^p = 1^p$.

b) Montrons que la suite des sommes partielles est de Cauchy dans E. En utilisant la propriété on voit que

$$\|\sum_{n=N+1}^{N+p} \alpha_n e_n\|^p = \sum_{n=N+1}^{N+p} |\alpha_n|^p$$

ce qui entraine le caractère de Cauchy voulu.

c) Pour $x \in E$ et $N \geq 1$ notons

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \varphi_n(x)e_n.$$

D'après la propriété $[ii)$ et la propriété de la suite e_n on a

$$\sum_{n=1}^{N} |\varphi_n(x)|^p = \|\sum_{n=1}^{N} \varphi_n(x)e_n\|^p \leq \|x\|^p.$$

Cela montre que la série positive $\sum |\varphi_n(x)|^p$ converge, et donc, par le *b)* que la suite $S_N(x)$ converge dans E vers un certain vecteur que l'on notera x_0. Pour k fixé et $N \geq k$ on voit que

$$\varphi_k(S_N(x)) = \varphi_k(x)$$

et donc par continuité de φ_k, on en déduit que

$$\varphi_k(x_0 - x) = 0$$

et ce pour tout k. D'où $x_0 - x = 0$ comme voulu. Par ailleurs, en passant à la limite dans

$$\|S_N(x)\|^p = \sum_{n=1}^{N} |\varphi_n(x)|^p,$$

par continuité de la norme, on obtient l'égalité pour la norme.

d) On peut prendre $\ell_p = \ell_p(\mathbb{N}^*)$. Si on note $(e_n)_{n\geq 1}$ la base canonique de ℓ_p, ont bien que

$$\|c_1 e_1 + \ldots + c_N e_N\|_p^p = \|(c_1, c_1, \ldots, c_N, 0, 0, 0 \ldots)\|_p = |c_1|^p + \ldots + |c_N|^p.$$

Pour $k \geq 1$ fixé, si on $\varphi_n - k$ la forme linéaire associée à e_k : pour toute suite $c = (c_n)$,

$$\varphi_k(c) = c_k$$

on voit qu'il s'agit d'une forme linéaire continue sur ℓ_p, puisque $|\varphi_k(c)| = |c_k| \leq \|c\|_p$. Par ailleurs, on vérifie qu'on a bien les propriétés $i)$, $ii)$ et $iii)$ ci-dessus (OK ?).

Exercice 3. On travaille sur $\mathbb{R}$ muni de la mesure de Lebesgue. On se donne une fonction positive (mesurable) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ qui vérifie les trois propriétés suivantes :

(i) La fonction φ est à valeurs dans $[0, 1]$.

(ii) La fonction φ est nulle en dehors de $[-1, 1]$.

(iii) $\int_{\mathbb{R}} \varphi = 1$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, φ_n désignera la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi_n(x) = n\,\varphi(nx)$. On se donne $p \geq 1$.

a) Montrer que si $f \in L^p(\mathbb{R})$ alors f et φ_n sont convolables et que $f * \varphi_n \in L^p$.

b) Montrer que si $f \in L^p(\mathbb{R})$ alors pour $x \in \mathbb{R}$

$$|f * \varphi_n(x) - f(x)| \leq \int |f(x - \frac{y}{n}) - f(x)|\,\varphi(y)\,dy.$$

et que

$$\|f * \varphi_n - f\|_{L^p(\mathbb{R})}^p \leq \int_{[-1,1]} \|\tau_{\frac{z}{n}} f - f\|_{L^p(\mathbb{R})}^p\,\varphi(z)\,dz$$

où, comme d'habitude, la notation $\tau_z h$ désigne, pour un réel z donné et une fonction h donnée, la fonction $y \to h(y - z)$. En déduire que

$$\|f * \varphi_n - f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq 2^{1/p} \sup_{|z| \leq \frac{1}{n}} \|\tau_z f - f\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

c) Montrer que si g est une fonction sur $\mathbb{R}$ qui est nulle en dehors de $[-A, A]$, alors pour tout $z \in [-1, 1]$, la fonction $\tau_z g - g$ est nulle en dehors de $[-(A+1), A+1]$.

d) Montrer que si g est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à support compact, alors la suite $g * \varphi_n$ converge vers g dans $L^p(\mathbb{R})$.

e) En utilisant la question précédente, montrer que pour tout $f \in L^p(\mathbb{R})$, on a que la suite $f * \varphi_n$ converge vers f dans $L^p(\mathbb{R})$.

Solution de l'exercice 3.
On remarque que la fonction positive φ_n et intégrable, avec $\int \varphi_n = 1$. Un résultat du cours assure que $L^1 * L^p \subset L^p$.
Comme $\int \varphi_n = 1$, on a

$$f * \varphi_n(x) - f(x) = \int [f(x - y) - f(x)]\,\varphi_n(y)\,dy = \int [f(x - z/n) - f(x)]\,\varphi(z)\,dz.$$

L'inégalité demandé découle de l'inégalité triangulaire. En prenant la puissant p et en utilisant l'inégalité de Jensen, puisque $\varphi(x)\,dx$ définit une probabilité sur $\mathbb{R}$, on a

$$|f * \varphi_n(x) - f(x)|^p \leq \int |f(x - z/n) - f(x)|^p\,\varphi(z)\,dz.$$

En intégrant par rapport à x on trouve, par le théorème de Fubini-Tonelli

$$\|f * \varphi_n - f\|_{L^p}^p \leq \int \|\tau_{z/n} f - f\|_{L^p}^p \varphi(z)\, dz = \int_{[-1,1]} \|\tau_{z/n} f - f\|_{L^p}^p \varphi(z)\, dz.$$

On conclut en utilisant que $0 \leq \varphi \leq 1$ et que pour $x \in [-1,1]$, $\|\tau_{\frac{x}{n}} f - f\|_{L^p(\mathbb{R})}^p \leq \sup_{|z| \leq \frac{1}{n}} \|\tau_z f - f\|_{L^p(\mathbb{R})}$.
Si g est nulle en dehors $[-A, A]$, $\tau_z g$, est nulle en dehors de $[-(A+1), A+1]$ puisque si $|x| > A+1$ on a $|x - z| > A$ pour tout $|z| \| e1$, par l'inégalité (anti)-triangulaire. Comme $[-A, A] \subset [-(A+1), A+1]$, on en déduit que $\tau_z g - g$ est également nulle en dehors de $[-(A+1), A+1]$.
Soit g continue et à support compact. On en tire que g est aussi uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, il existe $A > 0$ telle que g est nulle en dehors de $[-A, A]$. Pour $\epsilon > 0$, dès que $\frac{1}{n}$ est en-dessous du δ d'uniforme continuité associé, on a pour tout $|z| \leq \frac{1}{n}$, d'après la question précédente,

$$\|g_z - g\|_p^p \leq \int_{[-(A+1), A+1]} |g(x - z) - g(x)|^p\, dx \leq 2(A+1)\epsilon^p$$

ce qui donne le résultat voulu.
Pour étendre le résultat à une fonction $f \in L^p$ quelconque, on utilise la densité des fonctions continues à support compact dans $L^p(\mathbb{R})$. Il vaut mieux éviter de prendre une suite, car on se retrouve alors avec deux suites (et deux indices à faire tendre vers $+\infty$. Pour notre f, fixons tout simplement $\epsilon > 0$ quelconque. On sait qu'il existe une fonction g continue à support compact telle que $\|f - g\|_p \leq \epsilon$. On voit que pour tout n,

$$\|f - f * \varphi_n\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - g * \varphi_n\|_p + \|\varphi_n * (g - f)\|_p \leq 2\epsilon + \|g - g * \varphi_n\|_p,$$

où l'on a utilisé que $\|F * G\|_p \leq \|F\|_p \|G\|_1$ pour $F \in L^p$ et $G \in L^1$. D'après la question précédente appliquée à notre g et à notre ϵ, on sait qu'il existe un rang $N \geq 1$ tel que si $n \geq N$, alors $\| \|g - g * \varphi_n\|_p \leq \epsilon$. On a donc trouvé un rang tel que pour tout $n \geq N$, on a

$$\|f - f * \varphi_n\|_p \leq 3\epsilon$$

ce qui montre le résultat.