Université Pierre & Marie Curie — Licence de mathématiques 3
UE 3M210 Analyse Fonctionnelle — Année 2017–18

Examen du 27 juin 2018

Documents et tout instrument électronique interdits

La plus grande importance sera accordée à la rigueur et à la clarté de l'argumentation.

Exercice 1. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $K : X \times X \to \mathbb{C}$ une fonction $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$-mesurable telle que $\int_{X \times X} |K(x,y)|^2 \, d\mu(x) d\mu(y) < +\infty$, c'est-à-dire $K \in L^2(\mu \otimes \mu) = L^2(X \times X, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, \mu \otimes \mu)$.

a) Rappelez pourquoi pour μ-presque tout $x \in X$ on a $\int_X |K(x,y)|^2 \, d\mu(y) < +\infty$.

b) Montrer que si $f \in L^2(\mu)$ alors pour μ-presque tout $x \in X$ fixé, la fonction $y \to f(y)K(x,y)$ est μ-intégrable.

Dans la suite, pour $f \in L^2(\mu)$ donné, on note pour (presque-tout) $x \in X$:

$$T(f)(x) := \int_X f(y) K(x,y) \, d\mu(y).$$

c) Montrer que si $f \in L^2(\mu)$, la fonction $T(f)$ ainsi définie appartient aussi à $L^2(\mu)$.

d) Montrer que l'application $T : L^2(\mu) \to L^2(\mu)$ qui à f associe $T(f)$ est une application linéaire continue dont la norme d'opérateur est majorée par

$$\sqrt{\int_{X \times X} |K(x,y)|^2 \, d\mu(x) d\mu(y)}.$$

Solution de l'exercice 1.

a) Par le théorème de Fubini-Tonelli, la fonction positive $F(x) = \int_X |K(x,y)|^2 \, d\mu(y)$ est bien définie et sa μ- intégrale vaut $\int_{X \times X} |K|^2 d\mu \otimes d\mu$ qui est finie. Ainsi, on sait que la fonction est finie μ-presque partout.

b) Pour $x \in X$, en utilisant l'inégalité de Hölder,

$$\int_X |f(y)K(x,y)| \, d\mu(y) \sqrt{\int_X |f(y)|^2 \, d\mu(y) \int_X |K(x,y)|^2 \, d\mu(y)}$$

et d'après la question précédente, cette quantité est finie pour μ-presque tout x.

c) L'inégalité précédente donne, pour les x pour lesquels la fonction considéé est intégrable, que

$$|T(f)(x)|^2 \leq \int_X |f(y)|^2 \, d\mu(y) \int_X |K(x,y)|^2 \, d\mu(y).$$

En intégrant cette inégalité par rapport à μ on a

$$\int_X |T(f)(x)|^2 \, d\mu(x) \leq \int_X |f|^2 \, d\mu \int_X |K(x,y)|^2 \, d\mu(x) d\mu(y) < +\infty.$$

d) Si f et g sont dans $L^2(\mu)$, alors d'après la question b) pour μ-presque tout x les fonctions $y \to \int_X |f(y)||K(x,y)| \, d\mu(y)$ et $y \to \int_X |f(y)| \, |K(x,y)| \, d\mu(y)$ sont intégrables, et par linéarité de l'intégrale sur les fonctions intégrables, on en déduit bien la linéarité recherchée.

e) L'inégalité précédente se réécrit comme

$$\int T(f)\|_{L^2(\mu)}^2 \leq \|f\|_{L^2(\mu)}^2 \|K\|_{L^2(\mu\otimes\mu)}^2$$

ce qui assure que T est continue avec

$$\|T(f)\|_{L^2\to L^2} \ \leq \|K\|_{L^2(\mu\otimes\mu)}.$$

Exercice 2. Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle, \|\cdot\|)$ un espace de Hilbert. On se donne une suite $(u_n)_{n\geq 0} \subset H$, et on suppose que cette suite est bornée dans H.
Montrer que si pour tout $x \in H$ la suite $(\langle u_n, x\rangle)_{n\geq 1}$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$, alors il existe un vecteur $v \in H$ tel que

$$\forall x \in H, \qquad \langle u_n, x\rangle \to \langle v, x\rangle \ \text{ lorsque } \quad n \to +\infty.$$

Indication : on pourra justifier l'existence et étudier l'application $\varphi : H \to \mathbb{C}$ donnée par $\varphi(x) := \lim_{n\to+\infty} \langle u_n, x\rangle$.

Solution de l'exercice 2. Pour x fixé, la suite de Cauchy $(\langle x, u_n\rangle)$ est donc convergente dans $\mathbb{C}$, puisque $\mathbb{C}$ est complet, et on peut donc définir $\varphi(x) := \lim_{n\to+\infty} \langle x, u_n\rangle$. Par linéarité du produit scalaire et théorème d'opération sur les suites numériques, on en déduit que φ est une application linéaire de H dans $\mathbb{C}$. Par ailleurs, comme il existe M tel que $\|u_n\| \leq M$ pour tout $n \geq 1$, on a, par l'inégalité de Cauchy-Scwhartz

$$|\langle u_n, x\rangle| \leq M\|x\|$$

et par passage à la limite

$$|\varphi(x)| \leq M\|x\|$$

pour tout $x \in H$. Cela veut dire que φ est une application linéaire continue sur H. Par le théorème de dualité (Riesz) on sait alors qu'il existe $v \in H$ tel que $\varphi(x) = \langle v, x\rangle$, ce qui donne le résultat voulu.

Exercice 3. On travaille sur $\mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue. On note $L^2_{loc}(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions réelles f sur $\mathbb{R}$ dont le carré est intégrable sur tout segment, ie. pour tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$ donné, on a $\int_{[a,b]} f^2 < +\infty$.
Le but de l'exercice est de montrer que si $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$ vérifie la propriété $(*)$ suivante

$$\int_{\mathbb{R}} f\varphi = 0 \quad \text{pour toute fonction } \varphi \text{ continue sur } \mathbb{R} \text{ à support compact} \quad (*)$$

alors f est nulle presque partout sur $\mathbb{R}$.

a) Vérifiez tout d'abord que l'intégrale de $f\varphi$ a bien un sens pour $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$ et φ continue sur $\mathbb{R}$ à support compact.

b) Donnez un exemple d'une fonction qui appartient à $L^2_{loc}(\mathbb{R})$ mais pas à $L^2(\mathbb{R})$.

c) Montrer que si $f \in L^p(\mathbb{R})$ pour un $p \in [2, +\infty]$, alors $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$.

d) On suppose à cette question que $f \in L^2(\mathbb{R})$ et qu'elle vérifie $(*)$.

   i) Montrer que pour toute fonction $g \in L^2(\mathbb{R})$ on a

   $$\int_{\mathbb{R}} fg = 0$$

   Indication : pour ε fixé, on pourra chercher à montrer que $\left|\int_{\mathbb{R}} fg\right| \leq \varepsilon$.

   ii) En déduire que f est nulle presque partout.

e) Construire une suite (φ_k) de fonctions continues à support compact qui converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction constante égale à 1.

f) Soit $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$ vérifiant $(*)$.

   i) Montrer que si ψ est une fonction continue à support compact, alors la fonction ψf appartient à $L^2(\mathbb{R})$ et vérifie encore $(*)$.

   ii) Conclure .

Solution de l'exercice 3.

a) On peut écrire $\varphi = \varphi 1_{[a,b]}$ pour un certain segment $[a, b]$ et on a $f\varphi = f 1_{[a,b]}\varphi$. Comme $f 1_{[a,b]} \in L^2(\mathbb{R})$ et $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$, on a bien le résultat, par Cauchy-Schwarz.

b) La fonction constante égale à 1 est un exemple.

c) On se donne un segment $[a, b]$ quelconque. Si $f \in L^p(\mathbb{R})$, alors $f \in L^p([a, b])$. Mais comme $[a, b]$ est un espace de mesure finie, on a alors $f \in L^2([a, b])$ par Hölder ou Jensen.

d) Soit $g \in L^2(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$ donnés. Puisque les fonctions continues à support compact sont denses dans $L^2(\mathbb{R})$, il existe φ continue à support compact tel que

$$\|g - \varphi\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \varepsilon.$$

Comme $\int_{\mathbb{R}} f\varphi = 0$ on a, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\Big| \int_{\mathbb{R}} fg\Big| = \Big| \int_{\mathbb{R}} f(g - \varphi)\Big| \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}\|g - \varphi\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}\,\varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout ε, on en déduit que

$$\int_{\mathbb{R}} fg = 0.$$

Comme cela est vrai pour toute fonction $g \in L^2(\mathbb{R})$, on l'applique à $g = f$ et on a le résultat.

e) Classique : affine par morceaux valant 1 sur $[-k, k]$ et zéro en dehors de $[-(k + 1), k + 1]$, par exemple.

f) On écrit $\psi = \psi 1_{[a,b]}$ et $f\psi = f 1_{[a,b]}\psi$ et comme $f 1_{[a,b]} \in L^2$ et ψ est bornée, on a bien $f\psi \in L^2(\mathbb{R})$. Par ailleurs pour toute fonction continue à support compact φ on a

$$\int (f\psi)\varphi = \int f(\psi\varphi) = 0$$

car $\psi\varphi$ est encore une fonction continue à support compact.
Ainsi, en appliquant le résultat de la question précédente, on obtient que $f\psi = 0$ presque partout, pour toute fonction ψ continue à support compact. On l'applique à $\psi = \varphi_k$. Ainsi, la suite nulle (presque partout) $f\psi_k$ converge simplement vers f, et donc f est nulle presque partout.

Exercice 4. On se place sur $\mathbb{R}$, muni de la tribu borélienne, et on considère deux mesures sur cette tribu : la mesure de Lebesgue notée ici λ et une mesure de probabilité μ. Pour tout réel t, on note

$$\hat{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} d\mu(x).$$

On introduit également la fonction $\varphi(x) := \frac{1}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Rappelez brièvement les arguments qui permettent d'établir que $\hat{\mu}$ est bien définie et que c'est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\frac{1}{2n} \int_{\mathbb{R}} e^{-|t|/n} \hat{\mu}(t)\, d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(nx)\, d\mu(x).$$

c) En déduire l'existence et la valeur de

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2n} \int e^{-|t|/n} \hat{\mu}(t)\, d\lambda(t).$$

Indication : on pourra utiliser que $\mathbb{R} = \{0\} \cup (\mathbb{R} \setminus \{0\})$.

d) On considère le cas particulier $\mu = \delta_0$, la mesure de Dirac en $0 \in \mathbb{R}$ (c'est-à-dire la mesure borélienne définie par $\delta_0(B) = \mathbf{1}_B(0)$ pour tout borélien B de $\mathbb{R}$) . Calculer explicitement la fonction $\hat{\mu}$ et retrouver la valeur obtenue à la question précédente.

Solution de l'exercice 4.

a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $|e^{itx}| = 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Or μ étant une probabilité, les constantes sont μ-intégrables. Ainsi, la fonction continue (donc borélienne) $x \to e^{itx}$ appartient bien à $L^1(\mu)$ et $\hat{\mu}$ est bien définie. De plus, la fonction $(x,t) \mapsto e^{-ixt}$ est continue en ses deux variables, dominée par la fonction constante à 1, qui est intégrable par rapport à la mesure finie μ : ainsi, par le théorème de continuité sous le signe intégrale (i.e. par convergence dominée), $\hat{\mu}$ est bien continue.

b) On fixe $n \geq$. La fonction $(t,x) \mapsto e^{-|t|/n} e^{-ixt}$ est continue et intégrable pour la mesure borélienne $\lambda \otimes \mu$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. En effet, par le théorème de Fubini-Tonelli on a

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \left| e^{-|t|/n} e^{-ixt} \right| d(\lambda \otimes \mu)(t,x) = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} e^{-|t|/n}\, d\lambda(t) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} e^{-|t|/n}\, d\lambda(t) \times 1 < +\infty.$$

Le théorème de Fubini-Lebesgue permet alors d'intervertir les intégrales :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-|t|/n} \hat{\mu}(t) d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} d\mu(x) d\lambda(t) = \int \Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-|t|/n}\, e^{-ixt} d\lambda(t) \Big) d\mu(x) = 2n \int \varphi(nx)\, d\mu(x).$$

c) Pour tout $n \geq 1$, on peut dominer la valeurs absolue de la fonction $x \mapsto \varphi(nx)$ par la fonction constante à M (en fait $M = 1$ si on veut), constante qui est μ-intégrable. Vu que $\lim_{n\to+\infty} \varphi(nx) = 0$ pour $x \neq 0$ et $\varphi(n0) = \varphi(0) = 1$, on a par convergence dominée :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi(nx) d\mu(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \varphi(nx) d\mu(x) + \int_{\{0\}} \varphi(0) d\mu(x) = 0 + \mu(\{0\}),$$

d'où, avec la question précédente,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} \int e^{-|t|/n} \hat{\mu}(t) d\lambda(t) = \mu(\{0\}).$$

d) Dans ce cas, on a $\widehat{\delta_0}(t) = e^{-i0} = 1$, la fonction constante égale à 1 (qui est bien continue...). Et comme $\frac{1}{2n} \int_{\mathbb{R}} e^{-|t|/n} d\lambda(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathrm{Re}} {}^{-|t|}\, d\lambda(t) = 1$, on retrouve bien la valeur $\delta_0(\{0\}) = 1$.