Partiel du 29 mars 2019. Durée : 1h30

La plus grande importance sera accordée à la rigueur et à la clarté de l'argumentation.

Le barème ci-dessous est approximatif et donné seulement à titre indicatif.

Exercice 1. (5 points) Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, et $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On travaillera avec des espaces L^p et L^q réels. On se donne une fonction $g \in L^q(\mu)$.
Montrer que si $f \in L^p(\mu)$ alors $fg \in L^1(\mu)$ et que l'application ψ définie par

$$\begin{aligned} \psi : (L^p(\mu), \|\cdot\|_p) &\longrightarrow (L^1(\mu), \|\cdot\|_1) \\ f &\longrightarrow fg \end{aligned}$$

est une application linéaire continue dont on calculera la norme d'opérateur.

Solution de l'exercice 1. Pour $f \in L^p(\mu)$ on a par l'inégalité de Hölder,

$$\int |fg| \, d\mu = \int |f| \, |g| \, d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q < +\infty$$

par conséquent fg est **μ-intégrable** et l'application ψ est donc bien définie. Elle est linéaire (par distributivité de l'addition par rapport à la multiplication). Par ailleurs l'inégalité précédente, qui s'écrit

$$\forall f \in L^p(\mu), \quad \|\psi(f)\|_1 = \int |fg| \, d\mu \leq \|g\|_q \, \|f\|_p,$$

montre que ψ est bien continue, avec de plus que $\|\psi\|_{L^p \to L^1} \leq \|g\|_q$. Si $g = 0$ μ-pp, alors ψ est l'application nulle et sa norme vaut zéro. Si $\|g\|_q > 0$, alors il y a égalité dans l'inégalité ci-dessus pour la fonction $f \in L^p \setminus \{0\}$ donnée par $f = |g|^{q-1}$, ce qui montre que $\|\psi\|_{L^p \to L^1} = \|g\|_q$.

Exercice 2. (12 points) *Le but de cet exercice est de donner une nouvelle preuve du théorème de Riesz sur le dual d'un espace de Hilbert.*
Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle, \|\cdot\|)$ un espace de Hilbert (complexe), et $(e_k)_{k \geq 1}$ une base hilbertienne de cet espace. Soit φ une forme linéaire continue sur $(H, \|\cdot\|)$. On pose

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \beta_k := \overline{\varphi(e_k)} \in \mathbb{C}.$$

a) Soit $N \geq 1$. On pose $g = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \beta_k e_k$.
   - i) Exprimer $\|g\|$ en fonction des β_k.
   - ii) Que vaut $\varphi(g)$?
   - iii) En déduire que $\sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^{N} |\beta_k|^2} \leq \|\varphi\|_*$, où $\|\cdot\|_*$ désigne la norme sur le dual H^* de H.

b) Montrer que la série numérique $\sum |\beta_k|^2$ est convergente, et en déduire que la série $\sum \beta_k e_k$ est convergente dans $(H, \|\cdot\|)$.

   On notera ci-dessous $x_0 := \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k e_k \in H$ la somme de cette série.

c) Soit $x \in H$ et $N \geq 1$. Montrer que

$$\varphi\Big(\sum_{k=1}^{N} \langle e_k, x\rangle e_k\Big) = \Big\langle \sum_{k=1}^{N} \beta_k e_k, x\Big\rangle.$$

d) En déduire que pour tout $x \in H$ on a $\varphi(x) = \langle x_0, x\rangle$.

Solution de l'exercice 2.

a) Comme $(g_1, \ldots, g_N)$ est une famille orthonormée, on a

$$\|g\|^2 = \sum_{k=1}^{N} |\beta_k|^2.$$

On voit par ailleurs que, par linéarité,

$$\varphi(g) = \sum_{k=1}^{N} \beta_k \varphi(e_k) = \sum_{k=1}^{N} |\beta_k|^2.$$

Enfin, comme φ est une forme linéaire continue (de norme $\|\varphi\|_*$) on a par définition, $|\varphi(g)| \leq \|\varphi\|_* \, \|g\|$, c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^{N} |\beta_k|^2 = \varphi(g) \leq \|\varphi\|_* \|g\| = \|\varphi\|_* \sqrt{\sum_{k=1}^{N} |\beta_k|^2},$$

ce qui donne le résultat voulu (on peut distinguer suivant que $\sum_{k=1}^{N} |\beta_k|^2 = 0$ ou $\neq 0$).

b) La question précédente montre que les sommes partielles de la série $\sum |\beta_k|^2$, qui sont donc croissante puisque la série est positive, sont bornées, donc convergentes. D'après le cours, on sait que si la suite (β_k) est dans $\ell_2(\mathbb{N}^*)$ alors la série $\sum \beta_k e_k$ converge dans $(H, \|\cdot\|)$. (Rappel : cela découle du critère de Cauchy).

c) Soit $x \in H$. Pour tout $N \geq 1$ on a

$$\varphi\Big(\sum_{k=1}^{N} \langle e_k, x\rangle e_k\Big) = \sum_{k=1}^{N} \overline{\beta}_k \langle e_k, x\rangle = \sum_{k=1}^{N} \langle \beta_k e_k, x\rangle = \Big\langle \sum_{k=1}^{N} \beta_k e_k, x\Big\rangle.$$

d) Soit $x \in H$. On reprend les notations des questions précédentes. On sait que, lorsque $N \to +\infty$, on a les convergences suivantes, dans $(H, \|\cdot\|)$:

$$\sum_{k=1}^{N} \beta_k e_k \to x_0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{N} \langle e_k, x\rangle e_k \to x.$$

Dans l'égalité de la question précédente, tout a donc une limite quand $N \to +\infty$, par continuité de φ et du produit scalaire.

Exercice 3. (8 points) Soit $1 \leq p \leq q \leq +\infty$. On travaillera dans les questions qui suivent avec des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$ et on notera simplement ℓ_p les espaces $\ell_p^{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$ correspondants.

a) Montrer que si $a = (a_n) \in \ell_p$, on a pour tout n,

$$|a_n|^q \leq \|a\|_p^{q-p} \, |a_n|^p.$$

b) Montrer que $\ell_p \subset \ell_q$, et que l'injection canonique correspondante de $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ dans $(\ell_q, \|\cdot\|_q)$ est continue, et donner sa norme.

c) Est-ce que l'inclusion de la question précédente est stricte ?

d) Est-ce que sur l'espace ℓ_p les normes $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_q$ sont équivalentes ?

e) Dans le cas d'un espace $L^p(X,\mu)$ général, a-t-on aussi l'inclusion de la question b). *Vous justifierez votre réponse par une démonstration ou la description détaillée d'un contre-exemple.*

Solution de l'exercice 3. On remarque que si $a=(a_n)\in\ell_p$ alors $|a_n|\leq\|a\|_p$, et donc $|a_n|^q = |a_n|^{q-p}|a_n|^p \leq \|a\|_p^{q-p}\ |a_n|^p$.
En sommant et en prenant la puissance $1/q$ on trouve, après simplification, que

$$\|a\|_q \leq \|a\|_p.$$

ce qui donne l'implication voulue. L'injection est donc de norme inférieure ou égale à 1, et en fait exactement égale à 1 comme on peut le voir en prenant un vecteur de la base canonique.
Si $p\neq q$ l'inclusion est stricte, comme le montre l'exemple de la suite $a_n=n^{-1/r}$ avec r choisi tel que $p<r<q$, qui est alors dans ℓ_q et pas dans ℓ_p.
Notons par ailleurs qu'on a pas d'inégalité dans l'autre sens. Si on prend $a=a^k=(1,1,\dots,1,0,0,\dots)$ le vecteur ayant les k premiers éléments égal à 1 et zero ensuite, on a

$$\frac{\|a^k\|_p}{\|a^n\|_q} = \frac{n^{1/p}}{n^{1/q}} = n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \to +\infty$$

lorsque $k\to+\infty$, si $q>p$.
La situation est très différente avec les espaces L^p où une telle inclusion est en général fausse. Une différence, est que pour une série converge il faut que le terme général tende vers zero (quand bien même cela ne soit pas suffisant, bien sûr), alors que pour une intégrale "converge" (i.e pour que la fonction soit integrable) sur $\mathbb{R}$, par exemple, il n'est ni nécessaire ni suffisant que la fonction tende vers zero à l'infini.