

Analyse réelle et analyse harmonique

22 janvier 2020

Table des matières

Préface	5
0 Rappels	7
0.1 Généralités sur la théorie de l'intégration	7
0.2 Inégalités	9
0.3 Espace \mathcal{L}^p et espace L^p	15
0.4 Convergence dans L^p et convergence simple	17
0.5 Complétude des espaces L^p	19
0.6 Quelques rappels de topologie	20
1 Mesures de Borel positives, etc	25
1.1 Le théorème de représentation de Riesz pour les mesures positives	25
1.2 Mesures de Borel positives	30
1.3 La mesure de Lebesgue	32
1.4 Continuité et mesurabilité	35
1.5 Approximation	38
2 Mesures de Borel complexes, etc	41
2.1 Mesures complexes - Variation totale	41
2.2 Absolue continuité	43
2.2.1 Définitions et premières propriétés	43
2.2.2 Le théorème de Lebesgue-Radon-Nicodym	44
2.2.3 Conséquences du théorème de Lebesgue-Radon-Nicodym	47
3 Différentiation	53
3.1 Dérivée d'une mesure	53
3.2 Points de Lebesgue	56
3.3 Primitives et dérivées	59
4 Analyse harmonique	65
4.1 Séries de Fourier	65
4.1.1 Coefficients de Fourier	65
4.1.2 Convergence des séries trigonométriques	67
4.1.3 Ordre de grandeur des coefficients de Fourier	73
4.1.4 Séries de Fourier de fonctions de carré intégrable	76
4.1.5 Coefficients de Fourier "généralisés"	76
4.1.6 Le théorème spectral pour les opérateurs unitaires et auto-adjoints bornés	80
4.2 Convergence des séries de Fourier	86

4.2.1	Convergence en norme dans les espaces de Banach homogènes	86
4.2.2	Relation avec l'existence d'une fonction conjuguée	87
4.2.3	Convergence et divergence en un point	89
4.3	Fonctions harmoniques	91
4.3.1	Le noyau de Poisson	92
4.3.2	L'intégrale de Poisson	92
4.3.3	La propriété de la moyenne et le principe du maximum	94
4.4	La fonction conjuguée	96
4.4.1	Définition	96
4.4.2	Fonction de répartition	97
4.4.3	L'opérateur de conjugaison	99

Préface

Ces notes ont été principalement rédigées par Frédéric Klopp. Elles sont très largement inspirées des chapitres 2, 6 et 7 de l'ouvrage [4] et des chapitres 1, 2 et 3 de l'ouvrage [2].