Chapitre 1

Théorème de représentation de Riesz et mesures de Borel positives

1.1 Le théorème de représentation de Riesz pour les mesures positives

Soit X un espace de Hausdorff localement compact et ν une mesure sur les boréliens de X pour laquelle les compacts sont de mesure finie. Alors les fonctions continues à support compact sont intégrables, et on peut définir

$$\Lambda(f) := \int f \, d\nu, \qquad \forall f \in \mathcal{C}_c(X).$$

Cela définit une application linéaire sur $\mathcal{C}_c(X)$, 'représentée' par ν, qui a la propriété que $\Lambda(f) \geq 0$ si $f \geq 0$.

Le théorème de Riesz-Markov-Kakutani ci-dessous concerne la réciproque et établit trois résultats majeurs :

— Étant donné une forme linéaire positive (au sens ci-dessus) sur $\mathcal{C}_c(X)$, on peut trouver une mesure sur les boréliens finie sur les compacts qui la représente (existence) ;

— Les mesures boréliennes qui sont finies sur les compacts ont des propriétés de régularité ;

— Ces mesures peuvent être complétées en les définissant sur une σ-algèbre qui contient les boréliens.

Théorème 1.1 (Théorème de représentation de Riesz-Markov-Kakutani)**.** *Soit X un espace de Hausdorff localement compact. Soit Λ une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}_c(X)$ (i.e. pour $f \in \mathcal{C}_c(X)$, si $f \geq 0$ alors $\Lambda f \geq 0$). Alors, il existe $\mathcal{S}$ une σ-algèbre sur X contenant les boréliens de X et une unique mesure positive μ sur $\mathcal{S}$ telle que*

1. *pour $f \in \mathcal{C}_c(X)$, $\Lambda f = \displaystyle\int_X f(x) d\mu(x)$;*
2. *si $K \subset X$ est compact alors $\mu(K) < +\infty$;*
3. *pour $E \in \mathcal{S}$, $\mu(E) = \inf\{\mu(V);\ E \subset V,\ V \text{ ouvert}\}$;*
4. *si E est ouvert ou si $E \in \mathcal{S}$ tel que $\mu(E) < +\infty$ alors $\mu(E) = \sup\{\mu(K);\ K \subset E,\ K \text{ compact}\}$;*
5. *si $E \in \mathcal{S}$, $A \subset E$ et $\mu(E) = 0$ alors $A \in \mathcal{S}$.*

La propriété 1 qui relie la mesure à la forme linéaire est bien sûre celle qui présente le plus grand intérêt. Elle caractérise la mesure μ. On verra plus loin que les propriétés 2, 3 et 4 sont reliées ; dans des espaces "raisonnables", 3 et 4 (en fait une version plus forte au sens où elle est vraie pour tout $E \in \mathcal{S}$) sont des conséquences de 2 (voir les théorèmes 1.18 et 1.19). La propriété 5 dit simplement que la mesure est complète (on sait que l'on peut toujours compléter un mesure).

Remarque 1.2. *Lorsque $(X, \mathcal{S}, \mu)$ est σ-fini, alors $\mathcal{S}$ est nécessairement exactement égale à la tribu borélienne complétée (pour μ),*

$$\mathcal{S} = \overline{\mathcal{B}(X)} := \mathcal{B}(X) \cup \{A \subset X \; ; \; \exists B \in \mathcal{B}(X), \; \mu(B) = 0, \; A \subset B\},$$

soit encore les parties qui s'écrivent comme réunion (disjointe si je veux) d'un borélien et d'un ensemble inclus dans un borélien de mesure nulle.

En effet, prenons d'abord $E \in \mathcal{S}$ avec $\mu(S) < +\infty$. Alors, par les propriétés 3. et 4., on peut trouver une réunion dénombrable de compacts F et une intersection dénombrable d'ouverts G avec

$$F \subset E \subset G \quad \textit{et} \quad \mu(G \setminus F) = 0.$$

Mais alors

$$E = F \cup (E \setminus F) \quad \textit{et} \quad E \setminus F \subset G \setminus F \textit{ qui est un borélien (et même mieux...) de mesure nulle.}$$

Si $\mu(E) = +\infty$, on écrit $E = \bigcup_n E \cap A_n$ avec $A_n \in \mathcal{A}$ de mesure finie, et on applique le résultat précédent à $E \cap A_n$ qui est de mesure finie (par monotonie). Ainsi, on écrit $E \cap A_n = B_n \cup C_n$ avec B_n borélien et C_n inclus dans un borélien D_n de mesure nulle. Alors $E = B \cup D$ avec $B = \cup_n B_n$ borélien et D inclus dans $\cup_n D_n$ qui est un borélien de mesure nulle.

Un autre théorème de représentation de Riesz bien connu est celui sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ qui dit que toute forme linéaire continue sur $\mathcal{H}$ est représentée par un vecteur de $\mathcal{H}$ i.e. $\Lambda f = \langle v, f \rangle$ pour un unique $v \in \mathcal{H}$. Dans ce cadre, le fait que Λ est continue est une hypothèse cruciale. À première vue, il n'y a pas d'hypothèse de continuité dans le théorème 1.1. En fait, une forme de continuité découle de la positivité.

Fait 1.3. *Soit Λ une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}_c(X)$. Alors, si K est un compact de X, il existe une constante $C_K > 0$ telle que pour toute fonction f continue sur X à support dans K on a*

$$|\Lambda(f)| \leq C_K \, \|f\|_\infty.$$

Démonstration. Il suffit de démontrer ceci pour f à valeur réelles, le cas général découlant de la linéarité et de la séparation en parties réelle et imaginaire. Ensuite, on se donne une fonction $g \in \mathcal{C}_c(X)$ telle que $g_{|K} = 1$ par le lemme d'Urysohn ; alors, pour f à valeurs réelles, les fonctions $g \times (\|f\|_\infty \pm f)$ sont continues à support compact et positives. Comme Λ est linéaire et positive, on a

$$0 \leq \|f\|_\infty \, \Lambda g \pm \Lambda(gf) = \|f\|_\infty \Lambda g \pm \Lambda \, f$$

car $gf = f$. Ainsi $|\Lambda f| \leq C_K \|f\|_\infty$ pour $C_K := \Lambda g \geq 0$. □

Nous allons maintenant passer à la preuve du théorème.

Preuve du théorème de représentation. Commençons par montrer l'unicité. En vertu de 3 et 4, les valeurs de μ sur les compacts la déterminent entièrement. Soient μ_1 et μ_2 deux mesures vérifiant le théorème 1.1. Soit $K \subset X$ compact et $\varepsilon > 0$. Par 2 et 3, il existe un ouvert V tel que $K \subset V$ et $\mu_2(V) < \mu_2(K) + \varepsilon$. Par le lemme d'Urysohn, il existe $K \prec f \prec V$. Ainsi

$$\mu_1(K) \leq \int_X f d\mu_1 = \Lambda f = \int_X f d\mu_2 \leq \int_X \mathbf{1}_{K'} d\mu_2 = \mu_2(K') \leq \mu_2(V) \leq \mu_2(K) + \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\mu_1(K) \leq \mu_2(K)$. En échangeant les rôles de μ_1 et μ_2, on obtient $\mu_1(K) = \mu_2(K)$ pour tout K compact, soit encore, $\mu_1 = \mu_2$ par les remarques faites en début de preuve.

Construction de $\mathcal{S}$ et μ. Pour V ouvert de X, on définit

$$\boxed{\mu(V) := \sup_{f \prec V} \Lambda f} \tag{1.1}$$

On a clairement que si $V_1 \subset V_2$ ouverts, $\mu(V_1) \leq \mu(V_2)$. Ainsi, si E est ouvert dans X, on a

$$\boxed{\mu(E) = \inf\{\mu(V);\ E \subset V,\ V \text{ ouvert}\}} \tag{1.2}$$

Pour tout $E \subset X$, on définit $\mu(E)$ par (1.2).

Remarque 1.4. *On définit μ sur toutes les parties de X. Pour garantir que μ est σ-additive, on va se restreindre à une σ-algèbre plus petite.*

Soit $\mathcal{S}_F$ l'ensemble des parties E de X telles que $\mu(E) < +\infty$ et

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K);\ K \subset E,\ K \text{ compact}\}. \tag{1.3}$$

Soit $\mathcal{S}$ la famille des $E \subset X$ telle que $E \cap K \in \mathcal{S}_F$ pour tout K compact de X.
Montrons que μ et $\mathcal{S}$ ont les propriétés annoncées. Clairement μ est monotone (i.e. si $A \subset B$, $\mu(A) \leq \mu(B)$) et si $\mu(E) = 0$ alors $E \in \mathcal{S}_F$ et $E \in \mathcal{S}$.
Remarquons que la positivité et la linéarité de Λ entraîne que si f et g dans $\mathcal{C}_c(X)$ vérifie $f \leq g$ alors $\Lambda f \leq \Lambda g$.

Lemme 1.5. *Soient $(E_i)_{i\geq 1}$ des parties de X. Alors $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i\right) \leq \sum_{i\geq 1} \mu(E_i)$.*

Démonstration. Si $\mu(E_i) = +\infty$ pour l'un des i, alors la conclusion du lemme 1.5 est trivialement vraie. On les supposera donc tous les $(\mu(E_i))_{i\geq 1}$ finis.
Montrons d'abord que $\mu(E_1 \cup E_2) \leq \mu(E_1) + \mu(E_2)$ si E_1 et E_2 sont ouverts. Choisissons g telle que $g \prec E_1 \cup E_2$. Alors par le théorème 0.54, pour $i \in \{1, 2\}$, on construit $f_i \prec E_i$ et telles que $f_1 + f_2 = 1$ sur le support de g. Ainsi $g = gf_1 + gf_2$ et

$$\Lambda g = \Lambda(gf_1) + \Lambda(gf_2) \leq \mu(E_1) + \mu(E_2).$$

En prenant le supremum de cette inégalité sur l'ensemble des $g \prec E_1 \cup E_2$, par (1.1), on obtient $\mu(E_1 \cup E_2) \leq \mu(E_1) + \mu(E_2)$.
Soit $\varepsilon > 0$. Par (1.2), pour tout $i \geq 1$, il existe V_i ouvert contenant E_i tel que $\mu(V_i) < \mu(E_i) + 2^{-i}\varepsilon$. Soit $V = \bigcup_{i\geq 1} V_i$. Choisissons $f \prec V$. Comme f est de support compact, il existe $n \geq 1$ tel que $f \prec V_1 \cup \cdots \cup V_n$.
En appliquant l'inégalité pour deux ouverts, on calcule

$$\Lambda f \leq \mu(V_1 \cup \cdots \cup V_n) \leq \mu(V_1) + \cdots + \mu(V_n) \leq \sum_{i\geq 1} \mu(E_i) + \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $f \prec V$ et comme $\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i \subset V$, on a

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i\right) \leq \mu(V) \leq \sum_{i\geq 1} \mu(E_i) + \varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, ceci achève la preuve du lemme 1.5. $\square$

Lemme 1.6. *Si K est compact, alors $K \in \mathcal{S}_F$ et $\mu(K) = \inf_{K \prec f} \Lambda f$.*

Le point 2 du théorème 1.1 est une conséquence immédiate de ce lemme.

Démonstration. On va commencer par montrer que pour $K \prec f$ on a $\mu(K) \leq \Lambda(f)$ ce qui montrera que $\mu(K)$ est fini (et donc que $K \in \mathcal{S}_F$, puisque (1.3) est clairement vraie pour $E = K$ par monotonie) ainsi qu'un sens de l'inégalité. Pour $\alpha \in]0,1[$, on définit l'ouvert $V_\alpha := \{x \in X; f(x) > \alpha\}$. Ainsi, $K \subset V_\alpha$ et $\alpha\, g \leq f$ si $g \prec V_\alpha$. Donc,

$$\mu(K) \leq \mu(V_\alpha) = \sup_{g \prec V_\alpha} \Lambda g \leq \frac{1}{\alpha} \Lambda f.$$

En laissant tendre α vers 1^-, on obtient

$$\mu(K) \leq \Lambda f \text{ si } K \prec f. \tag{1.4}$$

Pour l'autre sens, on se donne $\varepsilon > 0$. Il existe, par définition, un ouvert $V \supset K$ tel que $\mu(V) \leq \mu(K)+\varepsilon$. Par le lemme d'Urysohn (le théorème 0.53), on construit f telle que $K \prec f \prec V$. Ainsi $\Lambda f \leq \mu(V) \leq \mu(K)+\varepsilon$. En laissant ε tendre vers 0^+, on obtient $\inf_{K \prec f} \Lambda f \leq \mu(K)$ ce qui complète la preuve du lemme 1.6. □

Lemme 1.7. *$\mathcal{S}_F$ contient tous les ouverts sur lesquels μ est finie (i.e. on a (1.3) pour tout E ouvert tel que $\mu(E) < +\infty$).*

Démonstration. Soit E ouvert et $\alpha < \mu(E)$. Alors il existe $f \prec E$ tel que $\alpha < \Lambda f$. Soit K le support de f (qui est donc inclus dans E). Pour tout U ouvert contenant K, on a $f \prec U$ donc $\Lambda f \leq \mu(U)$. Ainsi $\Lambda f \leq \mu(K)$. On trouve ainsi un compact $K \subset E$ tel que $\alpha < \mu(K)$. Ceci nous donne (1.3). □

Lemme 1.8. *Supposons que $E = \bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i$ où pour tout $i \geq 1$, $E_i \in \mathcal{S}_F$ et pour tout $i \neq j$, $E_i \cap E_j = \emptyset$. Alors*

$$\mu(E) = \sum_{i \geq 1} \mu(E_i). \tag{1.5}$$

Si, de plus, $\mu(E) < +\infty$, alors $E \in \mathcal{S}_F$.

Démonstration. Montrons d'abord que si K_1 et K_2 sont des compacts disjoints alors

$$\mu(K_1 \cup K_2) = \mu(K_1) + \mu(K_2). \tag{1.6}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par le lemme d'Urysohn, il existe $f \in \mathcal{C}_c(X)$ telle que $f_{|K_1} = 1$, $f_{|K_2} = 0$ et $0 \leq f \leq 1$. Par le lemme 1.6, il existe $g \in \mathcal{C}_c(X)$ telle que $K_1 \cup K_2 \prec g$ et $\Lambda g \leq \mu(K_1 \cup K_2) + \varepsilon$. On remarque que $K_1 \prec fg$ et $K_2 \prec (1-f)g$. Comme Λ est linéaire, de (1.4), on tire

$$\mu(K_1) + \mu(K_2) \leq \Lambda(fg) + \Lambda((1-f)g) = \Lambda g < \mu(K_1 \cup K_2) + \varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a démontré (1.6).
Si $\mu(E) = +\infty$ alors l'égalité souhaitée découle du lemme 1.5. Soit $\varepsilon > 0$ et supposons que $\mu(E) < +\infty$ donc $E_i \in \mathcal{S}_F$ pour tout i. Pour tout i, il existe donc $H_i \subset E_i$ compact tel que

$$\mu(H_i) > \mu(E_i) - 2^{-i}\varepsilon. \tag{1.7}$$

Posant $K_n = H_1 \cup \cdots \cup H_n$, de (1.6), on tire

$$\mu(E) \geq \mu(K_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(H_i) > \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) - \varepsilon. \tag{1.8}$$

Ceci étant vrai pour tout n et tout $\varepsilon > 0$, en se souvenant du lemme 1.5, on obtient (1.5).
Montrons enfin que E vérifie (1.3) (et donc que $E \in \mathcal{S}_F$) si $\mu(E) < +\infty$. Pour $\varepsilon > 0$, par (1.5), il existe $N > 0$ tel que

$$\mu(E) \leq \sum_{i=1}^{N} \mu(E_i) + \varepsilon. \tag{1.9}$$

Donc, par (1.8), on a $\mu(E) \leq \mu(K_N) + 2\varepsilon$ ce qui prouve que E vérifie (1.3). Ainsi $E \in \mathcal{S}_F$. $\square$

Lemme 1.9. *Si $E \in \mathcal{S}_F$ et $\varepsilon > 0$, il existe K compact et V ouvert tel que $K \subset E \subset V$ et $\mu(V \setminus K) \leq \varepsilon$.*

Démonstration. D'après nos définitions, on sait qu'il existe $K \subset E$ et $V \supset E$ tels que $\mu(V) - \varepsilon/2 < \mu(E) < \mu(K) + \varepsilon/2$. Comme $V \setminus K$ est ouvert, il est dans $\mathcal{S}_F$ par le lemme 1.7. Alors le lemme 1.8 nous dit que

$$\mu(K) + \mu(V \setminus K) = \mu(V) < \mu(K) + \varepsilon.$$

Ceci démontre le lemme 1.9. $\square$

Lemme 1.10. *Si $(A_1, A_2) \in \mathcal{S}_F \times \mathcal{S}_F$ alors $A_1 \setminus A_2$, $A_1 \cup A_2$ et $A_1 \cap A_2$ sont dans $\mathcal{S}_F$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$; par le lemme 1.9, il existe $(K_i)_{i\in\{1,2\}}$ compacts et $(V_i)_{i\in\{1,2\}}$ ouverts tel que $K_i \subset A_i \subset V_i$ et $\mu(V_i \setminus K_i) < \varepsilon$ pour $i \in \{1, 2\}$. Comme

$$A_1 \setminus A_2 \subset V_1 \setminus K_2 \subset (V_1 \setminus K_1) \cup (V_2 \setminus K_2) \cup (K_1 \setminus V_2),$$

le lemme 1.5 montre que

$$\mu(A_1 \setminus A_2) \leq 2\varepsilon + \mu(K_1 \setminus V_2).$$

Or $K_1 \setminus V_2$ est un compact de $A_1 \setminus A_2$, ceci prouve de $A_1 \setminus A_2$ satisfait (1.3) et, ainsi, $A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{S}_F$.
Comme $A_1 \cup A_2 = (A_1 \setminus A_2) \cup A_2$, on applique le lemme 1.8 pour obtenir que $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{S}_F$. Enfin, comme $A_1 \cap A_2 = A_1 \setminus (A_1 \setminus A_2)$, on a aussi que $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{S}_F$. $\square$

Lemme 1.11. *$\mathcal{S}$ est une σ-algèbre contenant tous les boréliens de X.*

Démonstration. Dans toute la preuve, K est un compact de X. Si $A \in \mathcal{S}$ alors $A^c \cap K = K \setminus (A \cap K)$; $A^c \cap K$ est donc élément de $\mathcal{S}_F$ comme différence de deux éléments de $\mathcal{S}_F$. Ainsi $A^c \in \mathcal{S}$.
Supposons que $A = \bigcup_{i\geq 0} A_i$ où $A_i \in \mathcal{S}$. Posons $B_1 = A_1 \cap K$ et

$$B_n = (A_n \cap K) \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_{n-1}) \quad \text{pour} \quad n \geq 2.$$

Alors, par le lemme 1.10, les $(B_i)_{i\geq 1}$ sont des éléments de $\mathcal{S}_F$ deux à deux disjoints et $A \cap K = \bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i$. Ainsi $A \cap K \in \mathcal{S}_F$ par le lemme 1.9 et $A \in \mathcal{S}$.
Enfin, si F est fermé dans X alors $F \cap K$ est compact donc élément de $\mathcal{S}_F$. Donc $F \in \mathcal{S}$. En particulier $X \in \mathcal{S}$. Ainsi $\mathcal{S}$ est une σ-algèbre contenant tous les fermés de X ; elle contient donc la σ-algèbre engendrée par ces fermés c'est-à-dire la σ-algèbre des boréliens de X. Ceci achève la preuve du lemme 1.11. $\square$

Lemme 1.12. *$\mathcal{S}_F$ est l'ensemble des éléments E de $\mathcal{S}$ tels que $\mu(E) < +\infty$.*

Ceci nous donne le point 4 du théorème 1.1.

Démonstration. Si $E \in \mathcal{S}_F$, alors les lemmes 1.6 et 1.10 montrent que $E \cap K \in \mathcal{S}_F$ pour tout K compact de X. Ainsi $E \in \mathcal{S}$.
Réciproquement, si $E \in \mathcal{S}$ tel que $\mu(E) < +\infty$ et si $\varepsilon > 0$, il existe $V \supset E$ ouvert tel que $\mu(V) < +\infty$; Par les lemmes 1.7 et 1.8, il existe $K \subset V$ compact tel que $\mu(V \setminus K) < \varepsilon$. Comme $E \cap K \in \mathcal{S}_F$, il existe $H \subset E \cap K$ compact tel que

$$\mu(E \cap K) < \mu(H) + \varepsilon.$$

De l'inclusion $E \subset (E \cap K) \cup (V \setminus K)$, on tire

$$\mu(E) \leq \mu(E \cap K) + \mu(V \setminus K) \leq \mu(H) + 2\varepsilon.$$

Ainsi $E \in \mathcal{S}_F$. □

Comme conséquence des lemmes 1.8, 1.11 et 1.12, on obtient le

Lemme 1.13. *μ définit une mesure sur $\mathcal{S}$.*

Enfin, pour achever la démonstration du théorème de représentation de Riesz, il nous suffit de démontrer le

Lemme 1.14. *Pour $f \in \mathcal{C}_c(X)$, on a $\Lambda f = \int_X f d\mu$.*

Démonstration. Il suffit de démontrer l'égalité pour f à valeurs réelles (par linéarité des deux membres de l'égalité). En fait, en échangeant f avec $-f$, on voit qu'il suffit de démontrer, pour $f \in \mathcal{C}_c(X)$ à valeurs réelles, l'inégalité

$$\Lambda f \leq \int_X f d\mu. \tag{1.10}$$

Soit K le support de $f \in \mathcal{C}_c(X)$ à valeurs réelles. Soit $[a, b]$ un intervalle contenant l'image de f (qui est compacte car $f \in \mathcal{C}_c(X)$). Soit $\varepsilon > 0$. Prenons $(y_i)_{0 \leq i \leq n}$ tels que $\max\limits_{1 \leq i \leq n} (y_i - y_{i-1}) \leq \varepsilon$ et

$$y_0 < a < y_1 < y_2 < \cdots < y_n = b. \tag{1.11}$$

Pour $1 \leq i \leq n$, posons

$$E_i = \{x;\ y_{i-1} < f(x) \leq y_i\} \cap K. \tag{1.12}$$

Étant continue, f est Borel mesurable ; les ensembles $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont donc des boréliens disjoints dont la réunion vaut K. Pour $1 \leq i \leq n$, on peut trouver $V_i \supset E_i$ ouverts tels que $f_{|V_i} \leq y_i + \varepsilon$ et

$$\mu(V_i) \leq \mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{n}. \tag{1.13}$$

Par le théorème 0.54, on construit, pour $1 \leq i \leq n$, $h_i \prec V_i$ telles que $h_1 + \cdots + h_n = 1$ sur K. Ainsi $f = h_1 f + \cdots + h_n f$ et le lemme 1.6 nous dit que

$$\mu(K) \leq \Lambda\left(\sum_{i=1}^{n} h_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \Lambda h_i.$$

Comme $h_i f \leq (y_i+\varepsilon)h_i$ et $y_i - \varepsilon \leq f$ sur E_i, on calcule

$$\begin{aligned}
\Lambda f &= \sum_{i=1}^n \Lambda(h_i f) \leq \sum_{i=1}^n (y_i+\varepsilon)\Lambda h_i = \sum_{i=1}^n (|a|+y_i+\varepsilon)\Lambda h_i - |a|\sum_{i=1}^n \Lambda h_i \\
&\leq \sum_{i=1}^n (|a|+y_i+\varepsilon)(\mu(E_i)+\frac{\varepsilon}{n}) - |a|\mu(K) = \sum_{i=1}^n y_i\mu(E_i) + \varepsilon\mu(K) + \frac{\varepsilon}{n}\sum_{i=1}^n (|a|+y_i) \\
&= \sum_{i=1}^n (y_i-\varepsilon)\mu(E_i) + 2\varepsilon\mu(K) + \frac{\varepsilon}{n}\sum_{i=1}^n (|a|+y_i+\varepsilon) \\
&\leq \int_X f\,d\mu + \varepsilon(2\mu(K)+|a|+b+\varepsilon).
\end{aligned}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, la preuve de (1.10) est complète. □

Ceci achève la preuve du théorème 1.1. □

1.2 Mesures de Borel positives

Définition 1.15.
1. Une mesure μ définie sur la σ-algèbre des boréliens $\mathcal{B}$ d'un espace de Hausdorff localement compact, disons, X est appelée une *mesure borélienne* sur X.
2. On dit qu'elle est intérieurement régulière si $\forall E \in \mathcal{B}$, $\mu(E) = \sup\{\mu(K);\ K \subset E,\ K \text{ compact}\}$.
3. On dit qu'elle est extérieurement régulière si $\forall E \in \mathcal{B}$, $\mu(E) = \inf\{\mu(V);\ E \subset V,\ V \text{ ouvert}\}$.
4. On dit qu'elle est régulière si elle est intérieurement régulière et extérieurement régulière

La mesure construite dans le Théorème 1.1 n'est pas forcément régulière dans le sens défini ci-dessus : elle est extérieurement régulière mais la régularité intérieure n'est vraie que sur des ensembles spéciaux. Cela ne peut être amélioré sans hypothèse supplémentaire (voir [6, Chapitre 2, exercice 17]). On va maintenant voir qu'avec un un léger renforcement des hypothèses, ce problème disparaît.

Définition 1.16.
1. Un sous-ensemble E d'un espace topologique est dit σ-compact s'il est la réunion dénombrable de compacts.
2. Un sous-ensemble E d'un espace topologique est appelé F_σ s'il est réunion dénombrable de fermés.
3. Un sous-ensemble E d'un espace topologique est appelé G_δ s'il est intersection dénombrable d'ouverts.
4. Un sous-ensemble E d'un espace mesuré (X, μ) est dit σ-fini s'il est la réunion dénombrable d'ensembles de mesure finie.

Exercice 1.17. Montrer qu'un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$) de dimension finie muni d'une norme est σ-compact.

Théorème 1.18. *Supposons que X est un espace de Hausdorff localement compact, σ-compact. Supposons que $\mathcal{S}$ et μ sont respectivement une σ-algèbre sur X et une mesure positive sur cette σ-algèbre satisfaisant aux propriétés (2)-(5) du Théorème 1.1.*
Alors $\mathcal{S}$ et μ vérifient

1. *pour tout $E \in \mathcal{S}$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe F, fermé de X, et V, ouvert de X, tels que $F \subset E \subset V$ et $\mu(V \setminus F) < \varepsilon$;*
2. *la mesure μ est une mesure de Borel régulière ;*
3. *si $E \in \mathcal{S}$, il existe des ensembles A et B tels que A est un F_σ, B un G_δ, $A \subset E \subset B$ et $\mu(B \setminus A) = 0$.*

Démonstration. On sait que $X = K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup \cdots$ où $(K_i)_{i\geq 1}$ sont des compacts. Si $E \in \mathcal{S}$ et $\varepsilon > 0$ alors, pour $n \geq 1$, $\mu(K_n \cap E) < +\infty$ et il existe V_n ouvert tel que $V_n \supset K_n \cap E$ et

$$\mu(V_n \setminus (K_n \cap E)) \leq 2^{-n-1}\varepsilon.$$

Si $V = \bigcup_{n\geq 1} V_n$ alors $V \setminus E \subset \bigcup_{n\geq 1} (V_n \setminus (K_n \cap E))$ ainsi

$$\mu(V \setminus E) < \varepsilon/2. \tag{1.14}$$

De même pour E^c, on peut trouver un ouvert $W \supset E^c$ tel que $\mu(W \setminus E^c) < \varepsilon/2$. On pose alors $F = W^c$. On a $F \subset E$ et $E \setminus F = W \setminus E^c$. Ceci démontre le point 1.
Tout fermé de X est lui aussi σ-compact (car l'intersection d'un fermé et d'un compact est compact dans un espace de Hausdorff). Ainsi le point 1 implique la régularité intérieure de μ (la régularité extérieure ayant été supposée vraie) ; on a donc démontré le point 2.
Pour $j \geq 1$, on peut choisir $\varepsilon = 1/j$ dans (1.14) ; on obtient ainsi, pour $j \leq 1$, F_j fermé et V_j ouvert tels que $F_j \subset E \subset V_j$ et $\mu(V_j \setminus F_j) < 1/j$. Posons $A = \cup_j F_j$ et $B = \cap_j V_j$. Alors A est un F_σ, B un G_δ et $\mu(B \setminus A) = 0$ car $\mu(B \setminus A) \leq \mu(V_j \setminus F_j) < 1/j$ ceci pour tout $j \geq 1$. Ceci démontre le point 3 et achève la preuve du théorème 1.18. □

On va utiliser ce résultat pour obtenir le

Théorème 1.19. *Soit un espace de Hausdorff localement compact dans lequel tout ouvert est σ-compact. Sur cet espace, toute mesure borélienne positive vérifiant que tout compact est de mesure finie est régulière.*

Exercice 1.20. Soit X un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$) de dimension finie muni d'une norme. Montrer que tout ouvert de X est σ-compact.

Démonstration. Pour $f \in \mathcal{C}_c(X)$, on peut définir $\Lambda f := \int_X f(x)d\mu(x)$. Comme $\mu(K)$ est finie pour K compact, l'intégrale est bien convergente et on a $|\Lambda f| \leq \mu(\operatorname{supp} f)\, \|f\|_\infty$. Par linéarité de l'intégrale, Λ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}_c(X)$; comme μ est positive, Λ est positive. Par le théorème 1.1, on peut lui associer une mesure borélienne λ qui vérifie alors

$$\int_X f d\lambda = \Lambda f = \int_X f d\mu. \tag{1.15}$$

Pour démontrer le théorème 1.19, il suffit de montrer que λ et μ coïncident.
Soit V un ouvert de X. Alors par hypothèse, il existe $(K_j)_{j\geq 1}$ des compacts de X tels que $V = \cup K_j$. Par le lemme d'Urysohn (le théorème 0.53), pour $j \geq 1$, on peut trouver $f_j \in \mathcal{C}_c(X)$ telle que $K_j \prec f_j \prec V$.Soit $g_n = \max(f_1, \cdots, f_n) \leq 1_V$. On a $g_n \in \mathcal{C}_c(X)$ et $g_n(x) \nearrow \mathbf{1}_V(x)$ en tout point $x \in X$. Ainsi (1.15) et le théorème de convergence monotone impliquent

$$\lambda(V) = \lim_{n\to+\infty} \int_X g_n d\lambda = \lim_{n\to+\infty} \int_X g_n d\mu = \mu(V). \tag{1.16}$$

Soit E un borélien de X et $\varepsilon > 0$. En appliquant le théorème 1.18 à λ, on construit F fermé et V ouvert tels que $F \subset E \subset V$ et $\lambda(V \setminus F) < \varepsilon$. Ainsi $\lambda(V) \leq \lambda(F) + \varepsilon \leq \lambda(E) + \varepsilon$.
Or $V \setminus F$ est ouvert ; donc, par (1.16), on a $\mu(V \setminus F) < \varepsilon$ c'est-à-dire $\mu(V) \leq \mu(E) + \varepsilon$. Par conséquent,

$$\lambda(E) \leq \lambda(V) = \mu(V) \leq \mu(E) + \varepsilon \quad \text{et} \quad \mu(E) \leq \mu(V) = \lambda(V) \leq \lambda(E) + \varepsilon$$

ainsi $|\lambda(E) - \mu(E)| \leq \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. Donc $\lambda(E) = \mu(E)$. Ceci prouve le théorème 1.19. □

1.3 La mesure de Lebesgue

Nous allons maintenant construire la mesure de Lebesgue qui est un cas particulier des mesures positives construites dans le chapitre précédent.

Définition 1.21.

1. On appelle *boîte* un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$ de la forme $[a_1, b_1[\times[a_2, b_2[\times\cdots\times[a_d, b_d[$ (où $a_i \leq b_i$ pour $1 \leq i \leq d$).
2. Le point $(a_1, \cdots, a_d)$ est appelé le *coin* de la boîte.
3. Le *volume* de la boîte $B := [a_1, b_1[\times[a_2, b_2[\times\cdots\times[a_d, b_d[$ est le réel positif ou nul $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\cdot(b_d - a_d)$; il est noté $\mathrm{Vol}(B)$.

On construit la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ par le

Théorème 1.22. *Il existe une unique mesure complète λ_d définie sur une σ-algèbre $\mathcal{S}$ sur $\mathbb{R}^d$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *$\lambda_d(B) = Vol(B)$ pour toute boîte B ;*
2. *la σ-algèbre $\mathcal{S}$ contient tous les boréliens ; plus précisément, $E \in \mathcal{S}$ si et seulement s'il existe des ensembles A et B tels que A est un F_σ, B un G_δ, $A \subset E \subset B$ et $\mu(B \setminus A) = 0$; de plus, λ_d est régulière ;*
3. *λ_d est invariante par translation i.e. si $E \in \mathcal{S}$ et $x \in \mathbb{R}^d$, alors $x + E \in \mathcal{S}$ et $\lambda_d(x + E) = \lambda_d(E)$.*

De plus, λ_d vérifie

4. *si μ est une mesure borélienne positive sur $\mathbb{R}^d$ finie sur tout compact qui plus est invariante par translation, alors il existe $c \geq 0$ telle que $\mu = c \cdot \lambda_d$;*
5. *pour $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une application linéaire, pour tout $E \in \mathcal{S}$, on a $T(E) \in \mathcal{S}$ et $\lambda(T(E)) = |det(T)|\,\lambda(E)$ (où $det(T)$ désigne le déterminant de l'application linéaire T).*

Démonstration. Commençons par consttruire un analogue multidimensionnel des sommes de Riemann. Pour $n \geq 1$, on note $\mathcal{P}_n = 2^{-n}\mathbb{Z}^d$ i.e. $\mathcal{P}_n$ est l'ensemble des points dont les coordonnées sont toutes des multiples entiers relatifs de 2^{-n}. Soit Ω_n la famille des 2^{-n}-boites dont les coins se trouvent en un point de $\mathcal{P}_n$. On vérifie facilement les trois propriétés suivantes de Ω_n :

1. pour n fixé, chaque point de $\mathbb{R}^d$ appartient à exactement une boîte de Ω_n ;
2. si $B \in \Omega_n$ et $B' \in \Omega_r$ et $r < n$ alors soit $B \subset B'$ soit $B \cap B' = \emptyset$;
3. si $B \in \Omega_r$ alors $\mathrm{vol}(B) = 2^{-rd}$ et si de plus $n > r$, B contient exactement $2^{(n-r)d}$ points de $\mathcal{P}_n$.

De plus les familles $(\Omega_n)_{n\geq 1}$ vérifient

Lemme 1.23. *Tout ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$ est une union disjointe dénombrable de boîtes dans $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \cdots$.*

Démonstration. Soit V un ouvert. Clairement V est la réunion des boîtes contenues dans V et appartenant à l'un des Ω_n. De ces boîtes, on peut séparer celles appartenant à Ω_1 de celles appartenant à $\Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \cdots$; par la propriété 2, on peut choisir ces dernières boîtes de façon qu'elle ne rencontrent aucune des boîtes dans Ω_1. Puis, on considère les boîtes appartenant à Ω_2 que l'on sépare de celles appartenant à $\Omega_3 \cup \Omega_4 \cup \cdots$; on peut encore appliquer la propriété 2 à ces dernières boites. En continuant cette procédure on obtient la décomposition souhaitée pour l'ouvert V. □

Pour $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, on définit

$$\Lambda_n f = 2^{-nd} \sum_{x \in \mathcal{P}_n} f(x). \tag{1.17}$$

où $\mathcal{P}_n$ est l'ensemble des coins des cubes dans Ω_n. Comme f est à support compact, la somme dans (1.17) ne contient qu'un nombre fini de termes. Λ_n est linéaire et positive.
Montrons que $\Lambda_n f$ converge vers, disons, Λf qui sera donc linéaire et positive. On peut sans perte de généralité supposer que f est à valeurs réelles. Pour $x \in \mathcal{P}_n$, soit B_x^n l'unique boîte de Ω_n dont le coin est x. On définit

$$\Lambda_n^+ f = 2^{-nd} \sum_{x\in\mathcal{P}_n} \sup_{y\in B_x^n} f(y) \quad \text{et} \quad \Lambda_n^- f = 2^{-nd} \sum_{x\in\mathcal{P}_n} \inf_{y\in B_x^n} f(y).$$

Comme f est à support compact, ces sommes sont finies. Clairement, par la propriété 2 des boîtes de Ω_n, on a

$$\Lambda_n^- f \leq \Lambda_{n+1}^- f \quad \text{et} \quad \Lambda_{n+1}^+ f \leq \Lambda_n^+ f \quad \text{et} \quad \Lambda_n^- f \leq \Lambda_n f \leq \Lambda_n^+ f$$

Comme f est uniformément continue, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N > 0$ tel que, si $n \geq N$

$$\forall C \in \Omega_n, \quad 0 \leq \sup_C f - \inf_C f \leq \varepsilon$$

Si f est à support dans $[-k, k[^d$ (pour $k \in \mathbb{N}^*$), on estime donc, pour $n \geq N$,

$$\Lambda_n^+ f - \Lambda_n^- f = 2^{-nd} \sum_{\substack{C\in\Omega_n \\ C\cap[-k,k[^d\neq\emptyset}} (\sup_C f - \inf_C f) \leq 2^{-nd}(2k)^d 2^{nd}\varepsilon = (2k)^d\varepsilon.$$

Les suites $(\Lambda_n^- f)_n$ et $(\Lambda_n^+ f)_n$ sont donc adjacentes. Ainsi la suite $(\Lambda_n f)_n$ converge vers une limite que l'on note Λf. Celle-ci est bien sûr linéaire et positive.

Remarque 1.24. *La somme $\Lambda_n f$ est une somme de Riemann pour f. Nous venons donc juste de construire l'intégrale de Riemann d'une fonction continue à support compact sur $\mathbb{R}^d$.*

Le théorème 1.1 nous donne alors une σ-algèbre $\mathcal{S}$ et sur $\mathcal{S}$, une mesure λ_d représentant Λ. Vérifions qu'elle a les propriétés annoncées dans le théorème 1.22. Cette mesure est complète et le théorème 1.19 nous donne le point 2 du théorème 1.22.
Montrons 1. Soit B une boîte et E_n la réunion des boîtes de Ω_n dont l'adhérence est contenue dans l'intérieur de B. Soit f_n telle que $\overline{E_n} \prec f_n \prec \overset{\circ}{B}$. On pose $g_n = max(f_1, \cdots, f_n)$. On a alors que $g_n \nearrow \mathbf{1}_{\overset{\circ}{B}}$ ponctuellement quand $n \to +\infty$. Par la définition de Λ, on a

$$\text{vol}(E_n) \leq \Lambda f_n \leq \Lambda g_n \leq \text{vol}(B) = \text{vol}(\overset{\circ}{B}).$$

Quand $n \to +\infty$, $\text{vol}(E_n) \to \text{vol}(B)$ et $\Lambda g_n = \displaystyle\int_X g_n d\lambda_d \nearrow \lambda_d(\overset{\circ}{B})$ par convergence croissante. Ainsi $\lambda_d(\overset{\circ}{B}) = \text{vol}(B)$. Donc $\lambda_d(B) \geq \lambda_d(\overset{\circ}{B}) = \text{vol}(B)$. De plus, pour $\varepsilon > 0$

$$\lambda_d(B) \leq \lambda_d(\overset{\circ}{B}+]-\varepsilon,\varepsilon[^d) = \lambda_d(\overset{\circ}{\overline{B+]-\varepsilon,\varepsilon[^d}}) = \text{vol}(\overset{\circ}{\overline{B+]-\varepsilon,\varepsilon[^d}}) = \text{vol}(B) + O(\varepsilon). \tag{1.18}$$

En laissant $\varepsilon \to 0^+$, on obtient le point 1.
Pour prouver 3, 4 et 5, on observe que, si λ est une mesure de Borel positive sur $\mathbb{R}^d$ telle que $\lambda(E) = \lambda_d(E)$ pour toute boite E alors cette égalité reste vraie pour tout E ouvert de $\mathbb{R}^d$ (par le lemme 1.23) et, donc, pour tout E borélien comme λ et λ_d sont régulières (par le théorème 1.19).
Pour montrer 3, on fixe $x \in \mathbb{R}^d$ et on définit $\lambda_x(E) := \lambda_d(E + x)$ pour E borélien. Clairement, λ_x est une mesure borélienne positive. Par le point 1, $\lambda_x(E) = \lambda_d(E)$ pour toute boîte, donc, pour tout borélien E, on a $\lambda_d(E) = \lambda_d(E + x)$. Enfin, par le point 2, cette égalité reste vraie sur $\mathcal{S}$.

Supposons que λ vérifie les hypothèses de 4. Pour $n \geq 1$, $[0,1[^d$ se partitionne de la façon suivante $[0,1[^d= \bigcup_{x\in\mathcal{P}_n\cap[0,1[^d} x+[0,2^{-n}[^d$ où la réunion est disjointe. On en déduit que

$$2^{nd}\lambda([0,2^{-n}[^d) = \lambda([0,1[^d) = c\,\lambda_d([0,1[^d) = c2^{nd}\lambda_d([0,2^{-n}[^d)$$

où $c := \lambda([0,1[^d)$. Donc, par invariance par translation, pour tout $Q \in \Omega_n$, $\lambda(Q) = c\,\lambda_d(Q)$. Le lemme 1.23 et la σ-additivité impliquent alors que pour tout ouvert E de $\mathbb{R}^d$, on a $\lambda(E) = c\,\lambda_d(E)$. Ceci prouve 4.
Démontrons 5. Commençons par le démontrer pour $T = U$ où U est une isométrie i.e. $U\,{}^tU ={}^t U\,U = 1$. L'application $E \mapsto \lambda_d(U(E))$ définit une mesure borélienne qui satisfait à toutes les conditions du point 4. Il existe donc une constante $c(U)$ telle que $\lambda_d(U(E)) = c(U)\lambda_d(E)$. Pour $E = B_2(0,1)$ la boule euclidienne centrée en 0 de rayon 1, on a bien sûr $U(E) = E$. Ainsi $c(U) = 1$.
Soit maintenant T linéaire sur $\mathbb{R}^d$. Si T n'est pas bijective, alors l'image de T est contenue dans un hyperplan de $\mathbb{R}^d$. Il existe donc une isométrie U telle que $E := U(\operatorname{Im} T) \subset \{x = x(_1,\cdots,x_d);\ x_1 = 0\}$. On a donc pour tout $\varepsilon > 0$,

$$E \subset \bigcup_{n\geq 1} P_{n,\varepsilon} \quad \text{où} \quad P_{n,\varepsilon} = [-\varepsilon 2^{-d(n+1)}, \varepsilon 2^{-d(n+1)}[\times[-2^n,2^n[^{d-1}$$

Ainsi $\operatorname{Im} T \subset A_\varepsilon = \bigcup_{n\geq 1} {}^tU(P_{n,\varepsilon})$. Clairement $A_\varepsilon \subset A_{\varepsilon'}$ si $\varepsilon \leq \varepsilon'$. De plus, par ce qui vient d'être montré pour les isométries, on a

$$\lambda_d(A_\varepsilon) \leq \sum_{n\geq 1}\lambda_d(P_{n,\varepsilon}) \leq \varepsilon\sum_{n\geq 1} 2^{-d(n+1)+d+n(d-1)} = \varepsilon.$$

Donc $\operatorname{Im} T$ est contenue dans $\cap_{n\geq 1} A_{1/n}$ qui est de mesure nulle. Comme λ_d est complète, $\operatorname{Im} T$ est mesurable et $\lambda_d(\operatorname{Im} T) = 0$. On obtient donc 5 quand $\det(T) = 0$.
Supposons maintenant que $\det(T) \neq 0$. Par le raisonnement fait pour une isométrie, on sait que $\lambda_d(T(E)) = c(T)\lambda_d(E)$ pour tout borélien. On en déduit que si T et T' inversible alors $c(T\,T') = c(T)c(T')$. D'autre part, T peut se décomposer en un produit de matrices $T = T_1\,T_2\cdots T_m$ où chacune des matrices T_i est de l'une des trois types suivants (ici $\{e_1, e_2,\cdots, e_d\}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^d$) :

1. $\{Te_1, Te_2,\cdots, Te_d\}$ est une permutation de $\{e_1, e_2,\cdots, e_d\}$; dans ce cas, si $C = [0,1[^d$, on voit que $T(C) = C$ et donc $c(T) = 1$; clairement, on a $\det T = 1$; donc $c(T) = |\det T|$;
2. $Te_1 = \alpha e_1$ pour $\alpha \neq 0$ et $Te_j = e_j$ si $2 \leq j \leq d$; dans ce cas, on voit que $T(C) = [0,\alpha[\times[0,1[^{d-1}$ si $\alpha > 0$ et $T(C) =]\alpha,0]\times[0,1[^{d-1}$ si $\alpha < 0$; ainsi $c(T) = |\alpha|$; clairement, on a $\det T = \alpha$; donc $c(T) = |\det T|$;
3. $Te_1 = e_1 + e_2$ pour $\alpha \neq 0$ et $Te_j = e_j$ si $2 \leq j \leq d$; dans ce cas, on voit que $T(C) = \{(x_1,x_2);\ x_1 \leq x_2 \leq x_1+1,\ x_1 \in [0,1[\}\times[0,1[^{d-2}\}$ donc $T = T_1\cup T_2$ où $T_1 = T\cap\{x_2 < 1\}$ et $T_2 = T\cap\{x_2 \geq 1\}$; on a $T_1\cap T_2 = \emptyset$ et si on pose $S_2 = T_2 - e_2$, on a $T_1\cap S_2 = \emptyset$ et $T_1\cup S_2 = C$; donc $\lambda_d(T(C)) = \lambda_d(C)$ c'est-à-dire $c(T) = 1$; clairement, on a $\det T = 1$; donc $c(T) = |\det T|$.

Comme $T = T_1\,T_2\cdots T_m$, on calcule

$$c(T) = c(T_1)\,c(T_2)\cdots c(T_m) = |\det T_1|\,|\det T_2|\cdot|\det T_m| = |\det T|.$$

Ceci achève la preuve du théorème 1.22. □

1.4 Continuité et mesurabilité

Si la topologie et la σ-algèbre auxquelles réfèrent les deux termes du titre de la section ne sont pas reliées, il n'y a bien sûr pas lieu d'espérer une relation entre ces notions.

Sur un espace de Hausdorff localement compact, il en va tout autrement si la mesure μ et $\mathcal{S}$, la σ-algèbre associée vérifient les propriétés (2)-(5) du théorème 1.1. Nous nous placerons désormais, et pour toute cette section, dans ce cadre.

Théorème 1.25. *(Théorème de Lusin) Soient $f : X \to \mathbb{C}$ mesurable et $A \in \mathcal{S}$ tels que $\mu(A) < +\infty$ et $f(x) = 0$ si $x \notin A$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors, il existe $g \in \mathcal{C}_c(X)$ telle que*

$$\mu(\{x \in X;\ f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon. \tag{1.19}$$

On peut de plus choisir g de façon que

$$\sup_{x\in X} |g(x)| \leq \sup_{x\in X} |f(x)| \tag{1.20}$$

On peut aussi dire, par régularité intérieure, que si $f : X \to \mathbb{C}$ est une fonction mesurable et A une partie de mesure finie, alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe un compact $K \subset A$ avec $\mu(A \setminus K) \leq \varepsilon$ et une fonction continue à support compact g telle que $f = g$ sur K.

Démonstration. Mentionnons d'abord une approche possible et naturelle de ce résultat. Par régularité, on sait approcher (au sens de coïncider sur un ensemble de grande mesure) une fonction indicatrice par une fonction continue, et on sait donc approcher les fonctions étagées. Pour une fonction positive, on l'approche par une suite de fonctions étagée, qui coincident donc elle-mêmes avec une suite de fonctions continues sur un ensemble de grande mesure. Par le théorème d'Egoroff (sur la partie de mesure finie A) on trouve un sous-ensemble proche en mesure sur lequel la convergence est uniforme, et un sous-ensemble toujours grand en mesure où la suite coincide avec la suite de fonctions continues. Or une limite uniforme de fonctions continues est continue. Par ce raisonnement, on trouve un sous-ensemble K de A (compact si l'on veut, par régularité), proche en mesure, sur lequel f est continue, i.e. $f_{|K}$ continue (attention, on ne dit pas que...). C'est parfois comme ça qu'est énoncé le Théorème de Lusin. Mais cette forme est plus faible (dans un espace localement compact). On peut en déduire la forme forte ci-dessus en montrant qu'on peut étendre une fonction continue sur un compact en une fonction continue sur X, à support compact, et avec l'inégalité voulue sur les sup.

On va plutôt faire une approche directe de cette version forte du théorème. Pour cela, on va revenir à l'approximation d'une fonction par des fonctions étagée, en choisissant bien la suite.

Soit $f \geq 0$ mesurable positive. On construit une suite croissante de fonctions mesurables simples (i.e. de la forme $\sum_{1\leq i\leq n} \alpha_i \mathbf{1}_{E_i}$ où $\alpha_i \in \mathbb{C}$ et $E_i \in \mathcal{S}$), disons, $(s_n)_{n\geq 1}$ telle que $s_n \to f$ simplement sur X. Pour cela, pour $n \geq 1$, on définit

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} 2^{-n}k_n \text{ où } k_n \text{ est l'unique entier tel que } 2^{-n}k_n \leq t < 2^{-n}(k_n+1) \text{ quand } t \in [0, n[, \\ 0 \text{ quand } t \geq n, \end{cases}$$

soit encore $\varphi_n(t) = 1_{[0,n[}(t) 2^{-n} \lfloor 2^n t \rfloor$. On vérifie que chaque fonction $\varphi_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est borélienne, que

$$0 \leq \inf_{t\in[0,n]} (t - \varphi_n(t)) \leq \sup_{t\in[0,n]} (t - \varphi_n(t)) \leq 2^{-n} \tag{1.21}$$

et si $n \geq m$, on a $\varphi_m \leq \varphi_n$. On pose alors $s_n = \varphi_n \circ f$; la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ satisfait aux conditions requises.

Remarque 1.26. *Notons que (1.21) montre que si f est bornée alors la convergence de $(s_n)_n$ vers f est uniforme.*

Pour démontrer le théorème, commençons par supposer que $0 \leq f \leq 1$. On pose alors $t_1 = s_1$ et $t_n = s_n - s_{n-1}$ si $n \geq 2$. Par construction des $(s_n)_n$, $2^n t_n$ est l'indicatrice d'un ensemble T_n et

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} t_n(x), \quad \forall x \in X. \tag{1.22}$$

Supposons de plus que A est compact. Soit $\varepsilon > 0$ et V un ouvert relativement compact contenant A. Par le théorème 0.53, on peut trouver des compacts $(K_n)_{n\geq 1}$ et des ouverts $(V_n)_{n\geq 1}$ tels que, pour $n \geq 1$, $K_n \subset T_n \subset V_n \subset V$ et $\mu((V_n \setminus K_n) < 2^{-n}\varepsilon$. Par le lemme d'Urysohn, pour $n \geq 1$, on construit une fonction g_n telle que $K_n \prec g_n \prec V_n$. Posons

$$g(x) = \sum_{n\geq 1} 2^{-n} g_n(x), \quad \forall x \in X. \tag{1.23}$$

La série converge uniformément sur X et définit donc une fonction continue dont le support est compact (car contenu dans $\overline{V}$). Comme $2^{-n}g_n(x) = t_n(x)$ pour $x \notin (V_n \setminus K_n)$, par (1.22) et (1.23) on sait que f et g coïncide sauf au plus sur $\bigcup_{n\geq 1}(V_n \setminus K_n)$. Or on a $\mu(\bigcup_{n\geq 1}(V_n \setminus K_n)) \leq \sum_{n\geq 1} \mu(V_n \setminus K_n) \leq \varepsilon$. On a ainsi démontré le théorème 1.25 si f est à valeurs dans $[0, 1]$ et A compact.
Supposons maintenant que A est compact et que f est bornée. On se ramène au cas où f est à valeurs réelles en passant aux parties réelle et imaginaire de f. Pour f à valeurs réelles, bornée à support compact, soit M son supremum supposé non nul. Prenons $A \prec g$. Alors on applique le résultat déjà démontré à $\tilde{f} := (f + M\,g)/2M$ pour obtenir celui annoncé pour f.
Si f est bornée mais que A vérifie seulement $\mu(A) < +\infty$ alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K \subset A$ compact tel que $\mu(A \setminus K) \leq \varepsilon/2$. Puis, on applique le résultat déjà obtenu pour f et K. Ceci démontre donc le premier énoncé du théorème 1.25 quand f est bornée.
Pour obtenir le second énoncé dans ce cas, il suffit de modifier g de la façon suivante. Pour $z \in \mathbb{C}$, posons $\varphi(z) = z$ si $|z| \leq R := \sup_{x\in X} |f(x)|$ et $\varphi(z) = R\,z\,|z|^{-1}$ si $|z| \geq R$. Alors φ est une application continue de $\mathbb{C}$ dans le disque centré en 0 de rayon R. Si g satisfait (1.19) alors $g_1 = \varphi \circ g$ satisfait (1.19) et (1.20).
Enfin, si f n'est pas bornée, on a $\cap_{n\geq 1}\{x;\ |f(x)| > n\} = \emptyset$. Donc, comme $\mu(\{x;\ |f(x)| > 0\}) \leq \mu(A) < +\infty$, on a $\mu(\{x;\ |f(x)| > n\}) \searrow 0^+$ quand $n \to +\infty$ par convergence croissante. On peut alors appliquer le résultat déjà démontré à $f \cdot \mathbf{1}_{\{x;\ |f(x)|\leq n\}}$ (qui est bornée) pour n suffisamment grand pour que $\mu(\{x;\ |f(x)| > n\}) < \varepsilon/2$ et conclure.
Ceci achève la preuve du théorème 1.25. □

Corollaire 1.27. *Sous les hypothèse du théorème 1.25, si* $\sup_{x\in X} |f(x)| \leq 1$ *alors il existe une suite* $(g_n)_{n\geq 1}$ *dans* $\mathcal{C}_c(X)$ *tels que, pour* $n \geq 1$, $\sup_{x\in X} |g_n(x)| \leq 1$ *et, pour* μ*-presque tout* x, $f(x) = \lim_{n\to+\infty} g_n(x)$.

Démonstration. Par le théorème de Lusin, pour chaque $n \geq 1$, on peut trouver $g_n \in \mathcal{C}_c(X)$ telle que $|g_n(x)| \leq 1$ sur X et tel que $\mu(\{x;\ f(x) \neq g_n(x)\}) \leq 2^{-n}$. Comme $\sum_{n\geq 1} \mu(\{x;\ f(x) \neq g_n(x)\}) < +\infty$, on a

$$\mu(\{x; \#\{n; f(x) \neq g_n(x)\} = +\infty\}) = \mu\left(\bigcap_{m\geq 1} \bigcup_{n\geq m} \{x;\ f(x) \neq g_n(x)\}\right) = 0.$$

Ainsi, pour presque tout x, à partir d'un certain rang, la suite $(g_n(x))_n$ est constante et égale à $f(x)$. Ceci achève la preuve du corollaire. □

Théorème 1.28. *(Théorème de Vitali-Carathéodory) Soit $f \in L^1(\mu)$, f à valeurs réelles. Soit $\varepsilon > 0$. Alors, il existe deux fonctions u et v telles que $u \leq f \leq v$, u est semi-continue supérieurement, v est semi-continue inférieurement et*

$$\int_X (v-u)d\mu < \varepsilon. \tag{1.24}$$

Démonstration. Supposons d'abord que $f \geq 0$. En reprenant la construction des suites $(s_n)_n$ et $(t_n)_n$ faite au début de la preuve du théorème 1.25 (voir en particulier, (1.22)), on voit que

$$f = \sum_{n \geq 1} c_n \mathbf{1}_{E_n} \tag{1.25}$$

où $(E_n)_n$ sont des boréliens et les $(c_n)_n$ sont strictement positifs.
Par linéarité de l'intégrale, on obtient

$$\int_X f d\mu = \sum_{n\geq 1} c_n \mu(E_n) \tag{1.26}$$

ainsi comme f est intégrable, la série du membre de droite de (1.26) converge. Soit $\varepsilon > 0$. Par le théorème 0.53, on construit des compacts $(K_n)_{n\geq 1}$ et des ouverts $(V_n)_{n\geq 1}$ tels que, pour $i \geq 1$, $K_n \subset E_n \subset V_n$ et

$$c_n \mu((V_n \setminus K_n) < 2^{-n-1}\varepsilon. \tag{1.27}$$

Choisissons N tel que

$$\sum_{i \geq N+1} c_n \mu(E_n) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1.28}$$

et posons

$$v = \sum_{n\geq 1} c_n \mathbf{1}_{V_n} \quad \text{et} \quad u = \sum_{n=1}^{N} c_n \mathbf{1}_{K_n}. \tag{1.29}$$

Alors, par les remarques suivant la définition 0.46, u est semi-continue supérieurement et v est semi-continue inférieurement. La définition des $(K_n)_n$ et $(V_n)_n$ et (1.25) impliquent que $u \leq f \leq v$. Enfin, on calcule

$$v - u = \sum_{n=1}^{N} c_n(\mathbf{1}_{V_n} - \mathbf{1}_{K_n}) + \sum_{n\geq N+1} c_n \mathbf{1}_{V_n} \leq \sum_{n\geq 1} c_n(\mathbf{1}_{V_n \setminus K_n}) + \sum_{n \geq N+1} c_n \mathbf{1}_{E_n}. \tag{1.30}$$

Ainsi (1.27) et (1.28) impliquent (1.24).
Dans le cas général, on décompose $f = f^+ - f^-$ où $(f^\pm)$ sont positives mesurables. On construit $u^\pm$ et $v^\pm$ comme ci-dessus pour $f^\pm$ et on pose $u = u^+ - v^-$ et $v = v^+ - u^-$. En se souvenant de l'exercice 0.47, on voit que u et v on les propriétés requises. Ceci prouve le théorème 1.28. $\square$

Exercice 1.29. Montrer qu'on ne peut pas en général prendre u et v continues.

1.5 Approximation

Soit $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espace mesuré. Une fonction étagée à valeurs complexes est une fonction de la forme

$$s = \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i \mathbf{1}_{E_i}$$

où $\alpha_i \in \mathbb{C}$ et $E_i \in \mathcal{S}$. De manière équivalente, c'est une fonction mesurable prenant un nombre fini de valeurs. C'est pourquoi on peut peut réécrire la fonction (en changeant les α_i et les E_i) pour que les E_i soient deux à deux disjoints (et correspondent aux ensembles où s prend une valeur non-nulle). Sous cette hypothèse, on voit que pou $r > 0$, $|s|^r = \sum_{1 \leq i \leq n} |\alpha_i|^r \mathbf{1}_{E_i}$. Par conséquent on a

$$s \ \mu\text{-intégrable} \iff \mu(E_i) < +\infty,\ \forall i \leq n \iff \mu(\{s \neq 0\}) < +\infty \iff s \in L^p(\mu),\ \forall p \in [1, +\infty[.$$

Théorème 1.30. *(Approximation par des fonctions simples)*
Soit S l'ensemble des fonctions s simples à valeurs complexes μ-intégrables. Alors, pour $1 \leq p < +\infty$, S est dense dans $L^p(\mu)$.

Démonstration. On a vu que $S \subset L^p(\mu)$ pour tout $1 \leq p < +\infty$. Soit maintenant $f \in L^p(\mu)$ telle que $f \geq 0$. On peut alors construire une suite de fonctions simples $(s_n)_{n \geq 1}$ qui converge en croissant vers f (voir le début de la preuve du théorème 1.25). Pour tout $n \geq 1$, $0 \leq s_n \leq f$. Ainsi $|f - s_n|^p \leq f^p$ et le théorème de convergence dominée nous dit que $\|f - s_n\|_p \to 0$ quand $n \to +\infty$. Donc f est dans l'adhérence de S pour la norme $\|\cdot\|_p$. Pour f à valeurs complexes, on la décompose en partie réelle et imaginaire, puis ses parties réelle et imaginaire en différence de partie positive et négative. □

Théorème 1.31. *(Approximation par des fonctions continues) Supposons que $(X, \mathcal{S}, \mu)$ est un espace de Hausdorff localement compact mesuré tel que la mesure μ et la σ-algèbre associée vérifient les propriétés (2)-(5) du théorème 1.1.*
Alors, pour $1 \leq p < +\infty$, $\mathcal{C}_c(X)$ est dense dans $L^p(\mu)$.

Remarque 1.32. *Dans ce cadre, on peut considérer l'espace vectoriel $\mathcal{C}_c(X)$ muni de la norme $\|f\|_p$. Alors, $L^p(\mu)$ est le complété de cet espace.*

Démonstration. Définissons S comme dans le théorème 1.30. Pour $s \in S$ et $\varepsilon > 0$, par le théorème 1.25 , le théorème de Lusin, il existe $g \in \mathcal{C}_c(X)$ tel que g et s coïncident sauf sur un ensemble de mesure majorée par ε et, de plus, $\|g\|_\infty \leq \|s\|_\infty$. Ainsi, pour $1 \leq p < +\infty$, $\|g - s\|_p \leq 2\varepsilon^{1/p}\|s\|_\infty$. Le théorème 1.31 est alors un corollaire immédiat du théorème 1.30. □

Théorème 1.33 (Continuité des translations dans L^p)**.** *Considérons $\mathbb{R}^d$ muni de la mesure de Lebesgue et $p \in [1, +\infty[$. Pour $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $x \in \mathbb{R}^d$, on définit $f_x : y \in \mathbb{R}^d \mapsto f(y - x)$. Alors $f_x \underset{|x| \to 0}{\to} f$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.*

On a donc que pour $f \in L^p(R^d)$ fixé, l'application

$$x \to f_x$$

est (uniformément) continue de $\mathbb{R}^d$ dans $L^p(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p)$.

Démonstration. Soit d'abord $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$. Les supports des fonctions $(g_x - g)_{|x| \leq 1}$ sont tous contenu dans un compact fixé et ces fonctions sont majorées par $2\|g\|_\infty$. Par continuité, on a $g_x - g \underset{x \to 0}{\to} 0$ en tout point. Le théorème de convergence dominée nous dit alors que $\|g_x - g\|_p \underset{x \to 0}{\to} 0$ pour tout $p \in [1, +\infty[$.
Comme $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, cette convergence s'étend à $L^p(\mathbb{R}^d)$. En effet, si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, on a $\|f_x - f\|_p \leq \|g_x - g\|_p + 2\|f - g\|_p$. □

Définition 1.34. Soit X un espace de Hausdorff localement compact. Soit $u : X \to \mathbb{C}$. On dit que u *s'annule à l'infini* si, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\overline{\{x;\ |u(x)| \geq \varepsilon\}}$ est compact.
L'ensemble des fonctions continues sur X s'annulant à l'infini est noté $\mathcal{C}_0(X)$.

Par exemple, on a que $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ est constitué des fonctions continues sur $\mathbb{R}^d$ qui tendent vers 0 à l'infini.

Théorème 1.35. *Si X est un espace de Hausdorff localement compact, alors $\mathcal{C}_0(X)$ est la complétion de $\mathcal{C}_c(X)$ pour la métrique définie par la norme $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in X} |f(x)|$.*

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{C}_0(X)$ et $\varepsilon > 0$. Par définition, il existe K compact tel que $|f(x)| < \varepsilon$ si $x \notin K$. Par le lemme d'Urysohn, il existe $g \in \mathcal{C}_c(X)$ tel que $0 \leq g \leq 1$ et $g_{|K} = 1$. Donc $h := fg \in \mathcal{C}_c(X)$ et $\|f - h\|_\infty \leq \sup_{x\notin K} |(1-g)(x)f(x)| \leq \sup_{x\notin K} |f(x)| \leq \varepsilon$. Donc, $\mathcal{C}_c(X)$ est dense dans $\mathcal{C}_0(X)$.
Soit $(f_n)_n$ de Cauchy dans $\mathcal{C}_0(X)$. Alors, pour $x \in X$, $(f_n(x))_n$ est de Cauchy donc converge vers $f(x)$. Comme $(f_n)_n$ de Cauchy pour $\|\cdot\|_\infty$, on a que f_n converge uniformément vers f donc f est continue. Enfin, pour $\varepsilon > 0$, il existe n tel que $\|f - f_n\|_\infty < \varepsilon/2$ et K_n un compact tel que $\forall x \notin K_n$, $|f_n(x)| \leq \varepsilon/2$. Donc, $\forall x \notin K_n$, $|f(x)| \leq \varepsilon$. Ainsi $f \in$ appartient à $\mathcal{C}_0(X)$ qui est donc complet. Ceci complète la preuve du théorème 1.35. $\square$

Remarque 1.36. *Remarquons que $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d) \subset L^\infty(\mathbb{R}^d)$ mais $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d) \neq L^\infty(\mathbb{R}^d)$.*