Chapitre 2

Mesures à valeurs complexes et dérivation de mesures

On s'est pour l'instant intéressé à des mesures positives. On va maintenant considérer des mesures à valeurs complexes ou mesures complexes. Ce passage est analogue au passage des séries à termes positifs aux séries à termes complexes.

2.1 Mesures complexes - Variation totale

Définition 2.1. Soit $\mathcal{S}$ une σ-algèbre sur un espace X.
Une *mesure complexe* sur $(X, \mathcal{S})$ est une application $\mu : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ telle que, si $E \in \mathcal{S}$ et $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une partition de E dans $\mathcal{S}$ (i.e. $\forall i$, $E_i \in \mathcal{S}$, $\forall i \neq j$, $E_i \cap E_j = \emptyset$ et $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i = E$), on a que la série $\sum \mu(E_i)$ converge et

$$\mu(E) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(E_i). \tag{2.1}$$

Remarque 2.2. *Deux observation importantes :*

- *La définition même implique que tout ensemble mesurable est de mesure $\mu(E)$ finie.*
- *L'égalité (2.1) requiert implicitement que*

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} |\mu(E_i)| < +\infty;$$

en effet, pour une partition données, dans la réunion définissant E, on peut réordonner les termes de façon arbitraires. Donc la somme dans le membre de droite de (2.1) doit converger vers la même valeur ce quelque soit la permutation des termes. Ceci impose que la somme converge absolument (voir [5, Théorème 3.56]).

Exercice 2.3. Soient λ une mesure positive sur $(X, \mathcal{S})$ et $h \in L^1(\lambda)$. Pour $E \in \mathcal{S}$, on pose

$$\mu(E) = \int_E h\, d\lambda. \tag{2.2}$$

Montrer que μ est une mesure complexe sur $(X, \mathcal{S})$ que l'on notera $d\mu = h\, d\lambda$.

Définition 2.4. Soit μ une mesure à valeur complexe. On définit sa *variation totale* notée $|\mu| : \mathcal{S} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ de la façon suivante : pour $E \in \mathcal{S}$, on pose

$$|\mu|(E) = \sup_{(E_j)_{j\in\mathbb{N}} \text{ partition de } E} \sum_{j\in\mathbb{N}} |\mu(E_j)|.$$

Cette définition nous donne immédiatement que

$$\forall E \in \mathcal{S}, \quad |\mu(E)| \leq |\mu|(E). \tag{2.3}$$

On remarque également que pour deux parties mesurables E, F, si $E \subset F$ alors

$$|\mu|(E) \leq |\mu|(F).$$

En fait :

Théorème 2.5. *La variation totale d'une mesure complexe μ sur $\mathcal{S}$ est une mesure positive sur $\mathcal{S}$.*

Démonstration. Soit $E \in \mathcal{S}$ et $E = \cup_i E_i$ une partition de E dans $\mathcal{S}$. On se donne $\alpha \in]0, 1[$. Pour i tel que $|\mu|(E_i) > 0$, comme $\alpha|\mu|(E_i) < |\mu|(E_i)$, E_i admet une partition $(A_{ij})_j$ telle que $\sum_j |\mu(A_{ij})| \geq \alpha|\mu|(E_i)$. Si $|\mu|(E_i) = 0$ on prend simplement $\{A_{i,j}\} = \{E_i\}$, et l'inégalité précédente reste trivialement vraie. Comme les $(A_{ij})_{i,j}$ forment encore une partition dénombrable de E, on a

$$|\mu|(E) \geq \sum_{i,j} |\mu(A_{ij}| \geq \alpha \sum_i |\mu|(E_i)$$

En faisant $\alpha \to 1$, on obtient

$$\sum_i |\mu|(E_i) \leq |\mu|(E). \tag{2.4}$$

Montrons l'inégalité réciproque. Pour cela, soit $(A_j)_j$ une seconde partition de E. Alors, pour i fixé, $(A_j \cap E_i)_j$ est une partition de E_i et pour j fixé, $(A_j \cap E_i)_i$ une partition de A_j. Ainsi

$$\sum_j |\mu(A_j)| = \sum_j \left| \sum_i \mu(A_j \cap E_i) \right| \leq \sum_j \sum_i |\mu(A_j \cap E_i)| = \sum_i \sum_j |\mu(A_j \cap E_i)| \leq \sum_i |\mu|(E_i).$$

Comme ceci vaut pour toute $(A_j)_j$ partition de E, on a

$$|\mu|(E) \leq \sum_i |\mu|(E_i).$$

Cela montre l'égalité et donc que $|\mu|$ est σ-additive.
Un calcul trivial donne $|\mu|(\emptyset) = 0$. Ainsi $|\mu|$ est une mesure. □

Théorème 2.6. *Si μ est une mesure complexe sur X, alors $|\mu|(X) < +\infty$.*

Démonstration. On commence par prouver le

Lemme 2.7. *Soient $z_1, \dots, z_n$ des nombres complexes. Alors, il existe $A \subset \{1, \dots, n\}$ tel que*

$$\left| \sum_{j\in A} z_j \right| \geq \frac{1}{\pi} \sum_{1\leq j\leq n} |z_j|.$$

Exemple 2.8. Supposons que n soit pair et prenons des points $x_1, \ldots, x_{n/2}$ arbitraires sur le cercle, complétés par leurs symétriques $-x_1, \ldots, -x_{n/2}$. On a donc n points du cercle qui vérifient

$$\sum |x_i| = n \quad \text{mais} \quad \sum x_i = 0.$$

Le résultat dit qu'on peut néanmoins trouver un sous-ensemble d'indices tels que

$$\Big|\sum_{i\in A} x_i\Big| \geq \frac{n}{\pi}.$$

Comment feriez-vous ?

Démonstration. On peut écrire $z_j = |z_j|e^{i\theta_j}$. Pour $-\pi \leq \theta \leq \pi$, soit $A(\theta)$ l'ensemble des j pour lesquels $\cos(\theta_j - \theta) > 0$. Ainsi

$$\left|\sum_{j\in A(\theta)} z_j\right| = \left|\sum_{j\in A(\theta)} e^{-i\theta} z_j\right| \geq \mathrm{Re}\left(\sum_{j\in A(\theta)} e^{-i\theta} z_j\right) = \sum_{j=1}^{N} |z_j| \max(\cos(\theta_j - \theta), 0).$$

On choisit maintenant pour θ la valeur dans $[-\pi, \pi]$ qui maximise la fonction (continue et périodique en θ) dans le membre de droite de la dernière égalité. La valeur de cette fonction en ce maximum est supérieure à la moyenne de cette fonction sur $[-\pi, \pi]$. On obtient ainsi pour ce θ que, si on pose $A = A(\theta)$ alors

$$\left|\sum_{j\in A} z_j\right| \geq \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{N}|z_j|\int_{-\pi}^{\pi}\max(\cos(\theta_j-\theta),0)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\max(\cos(\theta),0)d\theta\left[\sum_{j=1}^{N}|z_j|\right] = \frac{1}{\pi}\sum_{1\leq j\leq n}|z_j|.$$

□

Revenons à la preuve du théorème 2.6. Supposons qu'il existe $E \in \mathcal{S}$ tel que $|\mu|(E) = +\infty$. Soit $t = \pi(1+|\mu(E)|)$. Comme $|\mu|(E) > t$, il existe $(E_i)_{i\geq 1}$, une partition de E et un entier N tels que $\sum_{i=1}^{N} |\mu(E_i)| > t$. On peut alors appliquer le lemme 2.7 aux complexes $z_i = \mu(E_i)$, $i = 1, \cdots, N$. Ceci nous donne l'existence d'un ensemble $A \subset E$ (A est réunion de E_i bien choisis) tel que $|\mu(A)| > \frac{t}{\pi} > 1$. Mais en posant $B = E \setminus A$, on calcule

$$|\mu(B)| = |\mu(E) - \mu(A)| \geq |\mu(A)| - |\mu(E)| > \frac{t}{\pi} - |\mu(E)| = 1.$$

On a donc partitionné $E = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ où $|\mu(A)| > 1$ et $|\mu(B)| > 1$. Évidemment, on a soit $|\mu|(A) = +\infty$ ou $|\mu|(B) = +\infty$.
On peut maintenant réappliquer le même procédé à celui de A et B qui est de mesure $|\mu|$ infinie. En procédant ainsi, par récurrence, on construit une suite d'ensembles mesurables, disons, $(C_j)_j$ deux à deux disjoints tel que pour tout j, $|\mu(C_j)| > 1$. La σ-additivité de μ nous dit que $\mu(\cup_j C_j) = \sum_j \mu(C_j)$. Mais ceci ne se peut car cette dernière série ne converge évidemment pas. On obtient la contradiction souhaitée pour achever la preuve du théorème 2.6. □

Proposition 2.9. *Muni de ses opérations naturelles, l'ensemble des mesures complexes sur $(X, \mathcal{S})$ est un espace vectoriel et l'application $\mu \mapsto \|\mu\| := |\mu|(X)$ définit une norme sur cet espace.*

Exercice 2.10. Démontrer la proposition 2.9.

Définition 2.11. Pour une mesure réelle μ, on définit ses *variations positive et négative* respectivement comme les mesures positives $\mu^+ = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu)$ et $\mu^- = \frac{1}{2}(|\mu| - \mu)$.

On a $\mu = \mu^+ - \mu^-$ et $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$. Cette décomposition est la *décomposition de Jordan* de la mesure μ.

2.2 Absolue continuité

2.2.1 Définitions et premières propriétés

Soient λ une mesure positive et μ une mesure quelconque (positive ou complexe) sur $(X, \mathcal{S})$.

Le but de ce chapitre va être de comparer ces deux mesures, plus précisément, essayer d'en définir le quotient ; ce n'est bien sûr pas toujours possible. Commençons par introduire quelques définitions.

Définition 2.12. On dit que μ est *absolument continue* par rapport à λ si et seulement si, pour $E \in \mathcal{S}$, $\lambda(E) = 0 \implies \mu(E) = 0$. On note alors $\mu \ll \lambda$.

Exemple 2.13. Soit λ une mesure positive sur X et $f \in L^1(\lambda)$. Alors la mesure $\mu := f\,d\lambda$ définie par $\mu(E) := \int_E f\,d\lambda$ pour $E \in \mathcal{S}$ est absolument continue par rapport à λ.
En passant des fonction indicatrices d'ensembles mesurable aux fonctions simples puis aux fonctions mesurables positives, on voit que μ est définie par la propriété $\displaystyle\int_X g\,d\mu = \int_X gf d\lambda$ pour toute g mesurable positive ou pour toute g telle que fg est λ-intégrable.

Définition 2.14.

1. S'il existe $A \in \mathcal{S}$ tel que, pour tout $E \in \mathcal{S}$, $\mu(E) = \mu(E \cap A)$, on dit que μ est concentrée sur A. De façon équivalente, on peut demander que $\mu(E) = 0$ dès que $E \cap A = \emptyset$.
2. On dit que μ_1 et μ_2, deux mesures sur $(X, \mathcal{S})$, sont *mutuellement singulières* si elles sont concentrées sur des ensembles disjoints. On note alors $\mu_1 \perp \mu_2$.

Proposition 2.15. *Soient μ, μ_1 et μ_2 des mesures (complexes) et λ une mesure positive, toutes sur $(X, \mathcal{S})$. Alors :*

1. *si μ est concentrée sur A, $|\mu|$ l'est aussi ;*
2. *si $\mu_1 \perp \mu_2$ alors $|\mu_1| \perp |\mu_2|$;*
3. *si $\mu_1 \perp \lambda$ et $\mu_2 \perp \lambda$ alors $\mu_1 + \mu_2 \perp \lambda$;*
4. *si $\mu_1 \ll \lambda$ et $\mu_2 \ll \lambda$ alors $\mu_1 + \mu_2 \ll \lambda$;*
5. *si $\mu \ll \lambda$ alors $|\mu| \ll \lambda$;*
6. *si $\mu_1 \ll \lambda$ et $\mu_2 \perp \lambda$ alors $\mu_1 \perp \mu_2$;*
7. *si $\mu \ll \lambda$ et $\mu \perp \lambda$ alors $\mu = 0$.*

Démonstration. On démontre les propriétés dans l'ordre.

1. Si $E \cap A = \emptyset$ et que $(E_j)_j$ est une partition de E alors $\mu(E_j) = 0$ pour tout j. Ainsi $|\mu|(E) = 0$.
2. Ceci suit immédiatement de 1.
3. Pour $i \in \{1, 2\}$, il existe A_i et B_i disjoints tels que μ_i est concentrée sur A_i et λ sur B_i. Ainsi $\mu_1 + \mu_2$ est concentrée sur $A = A_1 \cup A_2$ et λ est concentrée sur $B = B_1 \cap B_2$. Or $A \cap B \subset (A_1 \cap B_1) \cup (A_2 \cap B_2) = \emptyset$.
4. C'est clair.
5. Si $\lambda(E) = 0$ et que $(E_j)_j$ est une partition de E, alors $\lambda(E_j) = 0$ pour tout j. Comme $\mu \ll \lambda$, on a $\mu(E_j) = 0$ pour tout j.. Ainsi $\displaystyle\sum_j |\mu(E_j)| = 0$. On a donc $|\mu|(E) = 0$.
6. Comme $\mu_2 \perp \lambda$, il existe A tel que $\lambda(A) = 0$ et μ_2 concentrée sur A. Comme $\mu_1 \ll \lambda$, pour tout $E \subset A$, $\mu_1(E) = 0$. Ainsi μ_1 est aussi concentrée sur le complémentaire de A.
7. Par le point 6, les hypothèses du point 7 impliquent que $\mu \perp \mu$. Donc $\mu = 0$.

□

2.2.2 Le théorème de Lebesgue-Radon-Nicodym

Ce résultat est le principal de ce chapitre. Il établit la comparaison évoquée ci-dessus.

Théorème 2.16 (Théorème de Lebesgue-Radon-Nicodym)**.** *Soient λ une mesure σ-finie positive et μ une mesure complexe sur $(X, \mathcal{S})$. Alors*

1. *il existe une unique paire de mesures complexes μ_a et μ_s sur $(X, \mathcal{S})$ telles que*

$$\mu = \mu_a + \mu_s, \qquad \mu_a \ll \lambda, \qquad \mu_s \perp \lambda \; ; \tag{2.5}$$

   si μ est positive alors μ_a et μ_s le sont aussi ;

2. *il existe une unique fonction $h \in L^1(\lambda)$ telle que $d\mu_a = h d\lambda$.*

La paire (μ_a, μ_s) est appelée *décomposition de Lebesgue* de μ par rapport à λ. La fonction h est appelée *dérivée de Radon-Nicodym* de μ par rapport à λ.
Isolons le point (2) du théorème 2.16, avec un extension dans le cas où positif (on n'a alors pas besoin du caractère "fini" de μ, σ-fini suffit).

Théorème 2.17 (Théorème de Radon-Nikodym)**.** *Soient, $(X, \mathcal{S})$, λ une mesure σ-finie et μ une mesure complexe ou positive σ-finie. Si $\mu \| | \lambda$, alors, il existe h mesurable sur X (unique) telle que $d\mu = h\, d\lambda$. De plus, dans le cas complexe on a $h \in L^1(\lambda)$; dans le cas positif on a h positive (mais* a priori *seulement une propriété d'intégrabilité locale par rapport à λ, voir la preuve).*

Remarque 2.18. *On ne peut pas simplement omettre l'hypothèse de σ-finitude sur λ. Par exemple, sur $[0, 1]$ on peut supposer que λ est la mesure de Lebesgue et μ la mesure de comptage (toutes deux sur la σ-algèbre de Lebesgue). Alors μ n'a pas de décomposition de Lebesgue par rapport à λ et, bien que λ soit bornée et $\lambda \ll \mu$, il n'existe pas de fonction $h \in L^1(\mu)$ telle que $d\lambda = h d\mu$.*

Expliquons comment obtenir le cas positif σ-fini du théorème précèdent à partir du cas fini.

Démonstration. On décompose $X = \cup_n X_n$ où $(\mu + \lambda)(X_n) < +\infty$ pour tout n. Sur chaque X_n i.e. pour $\lambda_{|X_n}$ et $\mu_{|X_n}$, on applique le théorème 2.16 pour obtenir h_n sur X_n ; l'unicité nous permet de dire que si $\lambda(X_n \cap X_m) \neq 0$, alors $(h_n)_{|X_n \cap X_m} = (h_m)_{|X_n \cap X_m}$. La famille $(h_n, X_n)_n$ définit donc bien une fonction h positive et mesurable qui vérifie la propriété souhaitée. De plus, elle est également "localement" intégrable au sens où, pour tout n, $\int_{X_n} h\, d\lambda < +\infty$. □

Passons maintenant à la preuve du Théorème 2.16.

Démonstration. Commençons par démontrer l'unicité de la paire (μ_a, μ_s). Supposons que (μ'_a, μ'_s) est une autre paire ayant les mêmes propriétés. Alors $\mu_a - \mu'_a = \mu_s - \mu'_s$. Or $\mu_a - \mu'_a \ll \lambda$ et $\mu_s - \mu'_s \perp \lambda$ donc $\mu_a - \mu'_a = \mu_s - \mu'_s = 0$ par les points 3, 4 et 7 de la proposition 2.15.
Pour démontrer l'existence de la décomposition, on va d'abord se ramener au cas $\lambda(X) < +\infty$ et, pour cela, démontrer le

Lemme 2.19. *Soit λ une mesure positive σ-finie sur une σ-algèbre $\mathcal{S}$ sur un ensemble X. Alors, il existe une fonction $w \in L^1(\lambda)$ telle qu'en tout $x \in X$, on a $0 < w(x) < 1$.*

Démonstration. Comme μ est σ-finie, on peut décomposer $X = \cup_{i \geq 1} E_i$ où $E_i \in \mathcal{S}$ et $\lambda(E_i) < +\infty$. Alors, en utilisant le théorème de convergence monotone, on vérifie que la fonction $w = \displaystyle\sum_{i \geq 1} \frac{1}{2^i(1 + \lambda(E_i))} \mathbf{1}_{E_i}$ convient □

Soit λ comme dans l'énonce du théorème 2.16. Avec w choisie comme dans le lemme 2.19, la mesure $d\tilde{\lambda} := w\,d\lambda$ est finie et elle a les mêmes ensembles de mesure nulle que λ c'est-à-dire que $\lambda \ll \tilde{\lambda} \ll \lambda$. En effet, si $\tilde{\lambda}(E) = \displaystyle\int_E w d\lambda = 0$ alors, comme elle est positive, w est nulle λ-presque partout sur E or w ne s'annule nulle part ; c'est donc que $\lambda(E) = 0$.
Soit μ comme dans l'énoncé du théorème 2.16. Commençons par supposer que μ positive et finie. Alors la mesure $d\nu = d\mu + w d\lambda$ est aussi positive et finie. Par définition (voir l'exemple 2.13), pour toute f mesurable positive, on a

$$\int_X f d\nu = \int_X f d\mu + \int_X f\, w\, d\lambda \geq \int_X f d\mu.$$

Comme ν est finie, on sait que $L^2(\nu) \subset L^1(\nu) \subset L^1(\mu)$ (par l'inégalité ci-dessus). Donc si $f \in L^2(\nu)$, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on calcule

$$\left|\int_X f d\mu\right| \leq \int_X |f|\, d\mu \leq \int_X |f|\, d\nu \leq \sqrt{\nu(X)} \|f\|_{L^2(\nu)}.$$

Ainsi l'application linéaire $f \mapsto \displaystyle\int_X f d\mu$ est une forme linaire bornée sur $L^2(\nu)$. Par le théorème de Riesz-Fisher (cf [1, Chapitre 4.4]), il existe $g \in L^2(\nu)$ telle que, pour $f \in L^2(\nu)$, on a

$$\int_X f d\mu = \int_X f g d\nu. \tag{2.6}$$

Remarquons que $g \in L^2(\nu)$ n'est définie que ν-presque partout.
Comme $0 \leq \mu \leq \nu$, en appliquant (2.6) à $f = \mathbf{1}_E$ où $E \in \mathcal{S}$ tel que $\nu(E) > 0$, on obtient

$$0 \leq \frac{1}{\nu(E)} \int_E g\, d\nu = \frac{\mu(E)}{\nu(E)} \leq 1$$

On en déduit que ν-presque partout, on a $0 \leq g \leq 1$. On peut donc supposer sans modifier (2.6) que g est à valeurs dans $[0, 1]$. En se souvenant de $d\nu = d\mu + w d\lambda$, réécrivons (2.6) comme

$$\int_X (1-g) f d\mu = \int_X f\, g\, w\, d\lambda. \tag{2.7}$$

Posons $A := \{x;\ 0 \leq g(x) < 1\}$ et $S := \{x;\ g(x) = 1\}$ et définissons deux mesures μ_a et μ_s par $\mu_a(E) = \mu(A \cap E)$ et $\mu_s(E) = \mu(S \cap E)$ pour $E \in \mathcal{S}$.
Pour $f = \mathbf{1}_S$, le membre de gauche de (2.7) s'annule et celui de droite devient $\int_S w d\lambda$. Comme w est positive et ne s'annule pas, on voit que $\lambda(S) = 0$. Donc $\mu_s \perp \lambda$.
Comme g est bornée, dans (2.7), on peut remplacer f par $(1 + g + \cdots + g^n)\mathbf{1}_E$ pour un entier n arbitraire ce qui nous donne

$$\int_{A\cap E} (1-g^n)\, d\mu = \int_E (1-g^n)\, d\mu = \int_E (1 + g + \cdots + g^n)\, g\, w\, d\lambda. \tag{2.8}$$

Comme en tout point $x \in A$, $g^n(x) \searrow 0^+$ quand $n \to +\infty$, le membre de gauche de (2.8) converge vers $\mu(A \cap E) = \mu_a(E)$.
La suite $((1 + g + \cdots + g^n)\, g\, w)_n$ est positive et croissante ; elle converge donc vers une fonction mesurable positive que l'on notera h. Ainsi, par le théorème de convergence monotone, le membre de gauche de (2.8) converge vers $\int_E h d\lambda$ quand $n \to +\infty$. Pour $E = X$, comme μ_a est finie, on obtient que $h \in L^1(\lambda)$. Ceci prouve le point 2 du théorème 2.16. Mais ce point 2 implique immédiatement que $\mu_a \ll \lambda$ (voir

l'exemple 2.13). Ceci achève la preuve du théorème 2.16 quand μ est positive.
Pour μ complexe, on écrit $\mu = \mu_r + i\,\mu_i$ où μ_r et μ_i sont des mesures réelles, puis, on applique la construction précédente aux variations positives et négatives de ces mesures.
Le théorème 2.16 est démontré. □

Théorème 2.20. *Soient λ et μ deux mesures sur $(X,\mathcal{S})$ respectivement positive et complexe. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$\mu \ll \lambda$*
2. *$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $\displaystyle\sup_{\substack{E\in\mathcal{S}\\ \lambda(E)<\delta}} |\mu|(E) \leq \varepsilon$.*

Remarque 2.21. *Dans le théorème 2.20, si μ est une mesure positive mais de masse totale infinie, on n'a pas forcément (1) $\Longrightarrow$ (2). On peut par exemple prendre μ égale à la mesure de Lebesgue sur $(0,1)$ et poser $\mu(E) = \displaystyle\int_E x^{-1}dx$ pour $E \subset (0,1)$ Lebesgue mesurable.*

Démonstration. Supposons 2. Si $\lambda(E) = 0$ alors $\lambda(E) < \delta$ pour tout $\delta > 0$. Donc $|\mu|(E) < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ c'est-à-dire $|\mu|(E) = 0$, soit encore, $\mu(E) = 0$. On obtient donc le point 1.
Supposons que le point 2 est faux. Alors, il existe $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \geq 1$, $E_n \in \mathcal{S}$ tel que $\lambda(E_n) < 2^{-n}$ et $|\mu|(E_n) > \varepsilon$. Donc $|\mu|(E_n) > \varepsilon$. Posons

$$\forall n \geq 1, A_n = \bigcup_{m\geq n} E_m \quad \text{et} \quad A = \bigcap_{n\geq 1} A_n.$$

Alors $\lambda(A_n) < 2^{-n+1}$ et $A_{n+1} \subset A_n$. Donc, par convergence monotone $\lambda(A) = 0$ et $|\mu|(A) = \lim_{n\to+\infty} |\mu|(A_n) \geq \varepsilon > 0$ (comme $|\mu|(A_n) \geq |\mu|(E_n)$). Ceci contredit $|\mu| \ll \lambda$ et, en utilisant le point 5 de la proposition 2.15, cela contredit également le point 1.
Ceci achève la preuve du théorème 2.20. □

2.2.3 Conséquences du théorème de Lebesgue-Radon-Nicodym

Les mesures que nous considérons sont σ-finies.

Théorème 2.22 (Décompostion polaire d'une mesure complexe)**.** *Soit μ une mesure complexe sur $(X,\mathcal{S})$. Alors il existe h mesurable telle que $|h(x)| = 1$ pour tout $x \in X$ et $d\mu = h\,d|\mu|$.*

Ce résultat est le pendant pour les mesures complexes de la décomposition polaire des nombres complexes.

Démonstration. On a bien sûr $\mu \ll |\mu|$. Donc le théorème 2.16 garantit l'existence de $h \in L^1(|\mu|)$ telle que $d\mu = h\,d|\mu|$.
Pour $r > 0$, soit $A^r = \{x;\ |h(x)| < r\}$ et soit $(A^r_j)_j$ une partition de A^r. Alors

$$\sum_j |\mu(A^r_j)| = \sum_j \left| \int_{A^r_j} h d|\mu| \right| \leq \sum_j r|\mu|(A^r_j) = r|\mu|(A_r).$$

En maximisant sur les partitions, on obtient que $r|\mu|(A_r) \geq |\mu|(A_r)$. Donc si $r < 1$, $|\mu|(A_r) = 0$. Ainsi $|h| \geq 1$ $|\mu|$-presque partout.
D'autre part, si $|\mu|(E) > 0$, comme $d\mu = h\,d|\mu|$, on a

$$\left| \frac{1}{|\mu|(E)} \int_E h\,d|\mu| \right| = \frac{|\mu(E)|}{|\mu|(E)} \leq 1. \tag{2.9}$$

Ainsi $|h| \leq 1$ $|\mu|$-presque partout. En effet, supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$, $|\mu|(\{1/\varepsilon \geq |h(x)| > 1+\varepsilon\}) > 0$. On écrit $h(x) = e^{i\theta(x)}|h(x)|$ avec θ mesurable à valeurs dans $[0, 2\pi[$. Ainsi, pour tout $n > 0$, il existe un entier $1 \leq k \leq n$ tel que $|\mu|(E_{n,\varepsilon}) > 0$ où on a posé $E_{n,\varepsilon} := \{|h(x)| > 1+\varepsilon \text{ et } n\theta(x) \in 2\pi[k-1, k[\}$; alors

$$\frac{1}{|\mu|(E_{n,\varepsilon})} \int_{E_{n,\varepsilon}} h\, d|\mu| = e^{2i\pi k/n} \frac{1}{|\mu|(E_{n,\varepsilon})} \int_{E_{n,\varepsilon}} |h|\, d|\mu| + \frac{1}{|\mu|(E_{n,\varepsilon})} \int_{E_{n,\varepsilon}} |h(x)| \left(e^{i\theta(x)} - e^{2i\pi k/n}\right) d|\mu|.$$

Ainsi, si n est assez grand, on obtient

$$\left| \frac{1}{|\mu|(E_{n,\varepsilon})} \int_{E_{n,\varepsilon}} h\, d|\mu| \right| \geq 1 + \varepsilon - \frac{1}{n\varepsilon} > 1.$$

Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, $|\mu|(\{1/\varepsilon \geq |h(x)| > 1+\varepsilon\}) = 0$. Donc, comme $h \in L^1(|\mu|)$, on a $|h| \leq 1$ $|\mu|$-presque partout.
On voir que, $|\mu|$-presque partout, $|h| = 1$. On peut donc prendre $|h| = 1$ en tout point sans modifier la validité de $d\mu = h\, d|\mu|$. Ceci achève la preuve du théorème 2.22. □

Théorème 2.23. *Soient λ une mesure positive sur $(X, \mathcal{S})$ et $g \in L^1(\lambda)$. Si on pose $d\mu = g\, d\lambda$ alors $d|\mu| = |g|\, d\lambda$.*

Démonstration. Par le théorème 2.22, on peut écrire $d\mu = h\, d|\mu|$ avec $|h| = 1$. Par hypothèse, $d\mu = g\, d\lambda$ et $|\lambda| = \lambda$ (comme λ est positive). Ainsi $d|\mu| = \overline{h}\, d\mu = \overline{h}\, g\, d\lambda$. Or λ et μ sont positives ; donc $\overline{h}g$ est positive λ-presque partout ; comme $|h| = 1$, λ-presque partout, on a $\overline{h}g = |g|$. □

Théorème 2.24 (Décompostion de Hahn)**.** *Soit μ une mesure réelle sur $(X, \mathcal{S})$. Alors il existe deux ensembles A_+ et A_- mesurables tels que $A_+ \cup A_- = X$, $A_+ \cap A_- = \emptyset$ et tels que les variations positives et négatives de μ vérifient $d\mu^+ = \mathbf{1}_{A^+}\, d\mu$ et $d\mu^- = \mathbf{1}_{A^-}\, d\mu$.*

Ce théorème nous dit que l'on peut trouver deux ensembles disjoints tels que l'un porte toute la masse positive de μ et l'autre toute sa masse négative.

Démonstration. Par le théorème 2.22, on écrit $d\mu = h\, d|\mu|$ où $|h| = 1$. Comme μ est réelle, h l'est aussi. Donc h ne prend que les valeurs ± 1. Posons $A^\pm = \{x;\ h(x) = \pm 1\}$. Comme $\mu^+ = 1/2(|\mu| + \mu)$ et $[1/2(h+1)]_{|A^+} = 1$ et $[1/2(h+1)]_{|A^-} = 0$, pour $E \in \mathcal{S}$, on a

$$\mu^+(E) = \frac{1}{2} \int_E (1+h) d|\mu| = \int_{E \cap A^+} h d|\mu| = \mu(E \cap A).$$

Donc $d\mu^+ = \mathbf{1}_{A^+}\, d\mu$.
Comme $\mu(E) = \mu(E \cap A) + \mu(E \cap B)$ et comme $\mu = \mu^+ - \mu^-$, on a $d\mu^- = \mathbf{1}_{A^-}\, d\mu$. □

Corollaire 2.25. *Si $\mu = \mu_1 - \mu_2$ où μ_1 et μ_2 sont des mesures positives, alors $\mu_1 \geq \mu^+$ et $\mu_2 \geq \mu^-$.*

On voit ainsi que μ^+ et μ^-, les variations positive et négative de μ, sont minimales parmi toutes les décompositions possibles de μ en différence de deux mesures positives.

Preuve du corollaire 2.25. Supposons que $\mu = \mu_1 - \mu_2$. En conservant les notations du théorème 2.24 et de sa preuve, comme $\mu \leq \mu_1$, on a

$$\mu^+(E) = \mu(E \cap A^+) \leq \lambda_1(E \cap A^+) \leq \lambda_1(E).$$

Clairement on a $\mu^- = (-\mu)^+$; l'inégalité $\mu_2 \geq \mu^-$ suit. □

Le dual de $L^p(\lambda)$

Soit $1 \leq p \leq \infty$ et λ une mesure positive sur $(X, \mathcal{S})$. Soit q l'exposant conjugué de p i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors, toute fonction $g \in L^q(\lambda)$ fournit une forme linéaire continue (bornée) $\Phi_g :\ L^p(\lambda) \to \mathbb{C}$ définie par

$$\Phi_g(f) = \int_X fg\, d\lambda, \quad \forall f \in L^p(\lambda). \tag{2.10}$$

C'est un corollaire immédiat de l'inégalité de Hölder (proposition 0.9).
Quand $p = 2$, on est dans le cadre hilbertien et on sait que ce résultat a une réciproque : par le théorème de Riesz (cf [1, Chapitre 4.4]), toute forme linéaire continue sur $L^2(\lambda)$ peut être représentée sous la forme (2.10) où $g \in L^2(\lambda)$.
Nous allons maintenant voir que cela reste vrai quand $1 \leq p < +\infty$.

Théorème 2.26 (Le dual de L^p est isométriquement isomorphe à L^q)**.** *Soient $p \in [1, +\infty[$ et λ une mesure σ-finie positive sur X. Soit Φ une forme linéaire continue sur $L^p(\lambda)$. Alors il existe une unique fonctions g dans $L^q(\lambda)$ (où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) telle que $\Phi = \Phi_g$ définie par* (2.10)*. De plus, on a $\|\Phi\| = \|g\|_q$.*

Démonstration. 1 L'unicité est claire : si on a deux telles fonctions, disons, g et $\tilde{g}$, alors $\int_X f(g - \tilde{g})d\lambda = 0$ pour toute f dans $L^p(\lambda)$; soit E telle que $\lambda(E) < +\infty$ alors la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \mathbf{1}_E \dfrac{\overline{g(x) - \tilde{g}(x)}}{|g(x) - \tilde{g}(x)|} \text{ si } g(x) \neq \tilde{g}(x), \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

est dans $L^q(\lambda)$ et $\int_X f(g - \tilde{g})d\lambda = \int_E |g - \tilde{g}|d\lambda$. Ainsi $g - \tilde{g}$ s'annule sur tout ensemble de mesure finie. Par σ-finitude, elle est nulle.
Pour construire g, commençons par supposer que $\lambda(X) < +\infty$. Pour $E \subset X$ mesurable, on définit $\mu(E) = \Phi(\mathbf{1}_E)$. Comme Φ est linéaire, μ est additive. Montrons qu'elle est σ-additive. Soit E mesurable partitionné en $E = \cup_{j \geq 1} E_j$. Posons $A_k = \cup_{1 \leq j \leq k} E_j$. Comme $A_k \subset E$, on a $\|\mathbf{1}_E - \mathbf{1}_{A_k}\|_p = (\lambda(E \setminus A_k))^{1/p} \underset{k \to +\infty}{\to} 0$ par convergence monotone. Comme Φ est continue, on a $\mu(A_k) = \sum_{j=1}^{k} \mu(E_j) \underset{k \to +\infty}{\to} \mu(E)$. Ainsi μ est σ-additive.
Clairement, si $\lambda(E) = 0$ alors $\mu(E) = 0$ (car $\mathbf{1}_E$ est nulle λ-presque partout). Ainsi $\mu \ll \lambda$ et le théorème 2.16 garantit l'existence de $g \in L^1(\lambda)$ telle que pour, tout $E \subset X$ mesurable, on a

$$\Phi(\mathbf{1}_E) = \int_E g\, d\lambda = \int_X \mathbf{1}_E\, g\, d\lambda.$$

Par linéarité, on a

$$\Phi(f) = \int_X fg\, d\lambda. \tag{2.11}$$

si f est simple et mesurable, puis, pour $f \in L^\infty(\lambda)$. En effet, comme toute fonction dans $L^\infty(\lambda)$ est limite uniforme d'une suite de fonctions simples et que la convergence uniforme implique celle dans $L^p(\lambda)$ comme $\lambda(X) < +\infty$, on obtient l'égalité comme résultat de la continuité de Φ.
On veut maintenant montrer que $g \in L^q(\lambda)$. On va distinguer deux cas selon que $p = 1$ ou $1 < p < +\infty$.
Cas 1 : $p = 1$. Alors, pour $\lambda(E) \neq 0$, (2.11) implique

$$\frac{1}{\lambda(E)} \left| \int_E g\, d\lambda \right| \leq \|\Phi\| \frac{\|\mathbf{1}_E\|_1}{\lambda(E)} = \|\Phi\|.$$

On a alors que $|g(x)| \leq \|\Phi\|$ presque partout i.e. que $\|g\|_\infty \leq \|\Phi\|$.

Cas 2 : $1 < p < +\infty$. La fonction $\alpha = \mathbf{1}_{\{x;\ g(x)=0\}} + \dfrac{\overline{g(x)}}{|g(x)|}\mathbf{1}_{\{x;\ g(x)\neq 0\}}$ est mesurable et satisfait $|\alpha| = 1$ et $\alpha g = |g|$. Pour $n \geq 1$, on définit $E_n = \{x;\ |g(x)| \leq n\}$ et $f_n = \mathbf{1}_{E_n}|g|^{q-1}\alpha$. Alors $|f_n|^p = |g|^q$ sur E_n, $f_n \in L^\infty(\lambda)$ et (2.11) nous dit que

$$\int_{E_n} |g|^q d\lambda = \int_X f_n\, g\, d\lambda = \Phi(f_n) \leq \|\Phi\| \left(\int_{E_n} |g|^q d\lambda\right)^{1/p}.$$

Ainsi

$$\int_X \mathbf{1}_{E_n}|g|^q d\lambda \leq \|\Phi\|^q.$$

On peut maintenant appliquer le théorème de convergence monotone pour obtenir $\|g\|_q \leq \|\Phi\|$.
On a donc obtenu que $g \in L^q(\lambda)$ et que sa norme satisfait l'égalité annoncée dans le théorème 2.26.
Ceci nous dit que les deux cotés de l'égalité (2.11) sont continues sur $L^p(\lambda)$ mais elles coïncident sur $L^\infty(\lambda)$ qui dense dans $L^p(\lambda)$ (car $\lambda(X) < +\infty$) ; elles coïncident donc sur $L^p(\lambda)$ ce qui achève la preuve du théorème 2.26 quand $\lambda(X) < +\infty$.
Quand $\lambda(X) = +\infty$ et λ σ-finie, on prend $w \in L^1(\lambda)$ comme dans le lemme 2.19. Alors $d\tilde{\lambda} = w\, d\lambda$ est une mesure positive finie sur $\mathcal{S}$. Comme w est strictement positive, l'application $f \mapsto w^{1/p} f$ est une isométrie linéaire de $L^p(\tilde{\lambda})$ à valeurs dans $L^p(\lambda)$. Ainsi $\Psi(\cdot) = \Phi(w^{1/p}\,\cdot)$ est linéaire et bornée sur $L^p(\tilde{\lambda})$ et satisfait $\|\Psi\|_{L^p(\tilde{\lambda})} = \|\Phi\|_{L^p(\lambda)}$. Donc il existe $h \in L^q(\tilde{\lambda})$ telle que $\Psi(f) = \int_X f\, h\, d\tilde{\lambda}$. Posons $g = w^{1/q}h$. Alors

$$\int_X |g|^q\, d\lambda = \int_X |h|^q\, d\tilde{\lambda} = \|\Psi\|^q_{L^p(\tilde{\lambda})} = \|\Phi\|^q_{L^p(\lambda)}.$$

D'autre part, pour $f \in L^p(\lambda)$, on calcule

$$\Phi(f) = \Psi(w^{-1/p} f) = \int_X w^{-1/p}\, f\, h d\tilde{\lambda} = \int_X f\, g\, d\lambda.$$

Ceci complète la preuve du théorème 2.26. □

Remarque 2.27. *La construction faite dans la preuve précédente est, dans le cas $p = q = 2$, celle qui a permis la preuve du théorème de Lebesgue-Radon-Nicodym. Et celui-ci est la clé de voûte de la preuve du cas général. La preuve dans le cas $p = 2$ repose elle sur le théorème de représentation de Riesz pour les espaces de Hilbert.*

Le théorème de représentation de Riesz : le dual de $\mathcal{C}_0(X)$

Soit X un espace de Hausdorff localement compact. On va maintenant voir le pendant du théorème de représentation de Riesz des fonctionnelles positives (théorème 1.1) dans le cas complexe. Pour pallier le manque de positivité, il est crucial d'ajouter une hypothèse de continuité des formes que l'on veut représenter. On va donc représenter les formes linéaires bornée sur $\mathcal{C}_c(X)$ (muni de la norme uniforme). Comme $\mathcal{C}_0(X)$ est le complété de $\mathcal{C}_c(X)$ pour la norme uniforme, une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}_c(X)$ se prolonge de façon unique en une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}_0(X)$. On travaillera donc sur cet espace.
On dit qu'une mesure borélienne complexe μ est *régulière* si sa variation totale $|\mu|$ l'est (au sens de la définition 1.15).
Clairement, si μ est une mesure de Borel complexe sur X, la forme

$$f \mapsto \int_X f\, d\mu \tag{2.12}$$

est bien définie et continue sur $\mathcal{C}_0(X)$. En effet, par le théorème 2.22, on peut écrire $d\mu = h\,d|\mu|$ où $|h| = 1$; ainsi

$$\left|\int_X f\,d\mu\right| = \left|\int_X f\,h\,d|\mu|\right| \leq \|f\,h\|_\infty\,|\mu|(X) = |\mu|(X)\,\|f\|_\infty.$$

Voyons maintenant que la réciproque est vraie.

Théorème 2.28 (Le théorème de représentation de Riesz)**.** *Soit X un espace de Hausdorff localement compact. Alors toute forme linéaire bornée sur $\mathcal{C}_0(X)$, disons, Φ peut être représentée d'une unique manière par une mesure de Borel complexe régulière, disons, μ, au sens où*

$$\Phi(f) = \int_X f d\mu \tag{2.13}$$

pour tout $f \in \mathcal{C}_0(X)$. De plus, on a alors $\|\Phi\| = |\mu|(X)$.

Démonstration. Commençons par démontrer l'unicité. Par linéarité de l'expression (2.13) en μ, il suffit de montrer que, si μ est une mesure de Borel complexe régulière telle que $\int_X f\,d\mu = 0$ pour tout $f \in \mathcal{C}_0(X)$ alors $\mu = 0$. Pour cela, par le théorème 2.22, on décompose $\mu = h|\mu|$ où $|h| = 1$. Pour $f \in \mathcal{C}_0(X)$, on a alors

$$|\mu|(X) = \int_X (\overline{h} - f)hd|\mu| \leq \int_X |\overline{h} - f|hd|\mu|. \tag{2.14}$$

Or $\overline{h} \in L^1(|\mu|)$ (car $|\mu|(X) < +\infty$) et $\mathcal{C}_0(X)$ est dense dans $L^1(|\mu|)$. On peut donc faire tendre f vers $\overline{h}$ dans (2.14) ce qui donne $|\mu|(X) = 0$. Ainsi $|\mu| = 0$ donc $\mu = 0$.
Soit Φ une forme linaire bornée sur $\mathcal{C}_0(X)$. On peut supposer que $\|\Phi\| = 1$. On démontre

Lemme 2.29. *Il existe Λ, une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}_0(X)$, telle que*

$$|\Phi(f)| \leq \Lambda(|f|) \leq \|f\|_\infty, \quad \forall f \in \mathcal{C}_0(X). \tag{2.15}$$

Supposons ce résultat démontré. Alors, le théorème 1.1 définit une mesure de Borel positive, disons λ qui représente Λ au sens du point 1 de ce théorème. Par le théorème de convergence monotone, comme X localement compact, on sait que $\lambda(X) = \sup\{\Lambda f;\ 0 \leq f \leq 1,\ f \in \mathcal{C}_c(X)\}$. De (2.15), on tire alors que $\lambda(X) \leq 1$ et le théorème 1.1 nous que λ est régulière.
De (2.15), on tire aussi que

$$|\Phi(f)| \leq \Lambda(|f|) = \int_X |f|\,d\,\lambda, \quad \forall f \in \mathcal{C}_c(X). \tag{2.16}$$

Comme $\mathcal{C}_c(X)$ est dense dans $L^1(\lambda)$ par le théorème 1.30, on peut prolonger Φ en une forme linéaire bornée sur $L^1(\lambda)$ que l'on appellera aussi Φ dans la suite : en effet, pour $f \in L^1(\lambda)$, on prend $(f_n)_n$ une suite dans $\mathcal{C}_c(X)$ approchant f ; comme $(f_n)_n$ est de Cauchy dans $L^1(\lambda)$, (2.16) nous dit que $(\Phi(f_n))_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$, donc, converge vers, disons, $\Phi(f)$; on voit facilement que $\Phi(f)$ ne dépend pas de la suite utilisée pour approcher f, que $f \mapsto \Phi(f)$ est linéaire et continue sur $L^1(\lambda)$ (grâce à (2.16)).
Comme Φ est continue sur $L^1(\lambda)$, le théorème 2.26 nous dit qu'il existe $g \in L^\infty(\lambda)$ telle que

$$\Phi(f) = \int_X f\,g\,d\lambda, \quad \forall f \in \mathcal{C}_c(X). \tag{2.17}$$

L'inégalité (2.16) nous dit alors que $\|g\|_\infty \leq 1$.
Les deux cotés de (2.17) étant continus sur $\mathcal{C}_0(X)$, la densité de $\mathcal{C}_c(X)$ dans $\mathcal{C}_0(X)$ nous dit que (2.17)

s'étend aux fonctions f de $\mathcal{C}_0(X)$ ce qui n'est autre que (2.13) si on pose $d\mu = g\,d\lambda$.
Comme $\|\Phi\| = 1$, par (2.17), on sait que

$$\int_X |g| d\lambda \geq \sup\{|\Phi(f)| : \; f \in \mathcal{C}_0(X), \; \|f\|_\infty \leq 1\} = 1. \tag{2.18}$$

D'autre part, on sait déjà que $\lambda(X) \leq 1$ et $\|g\|_\infty \leq 1$. Ainsi (2.18) n'est possible que si $\lambda(X) = 1$ et $|g(x)| = 1$ pour λ-presque tout x. Par le théorème 2.22, on a alors $d|\mu| = |g[\,d\lambda = d\lambda$, donc aussi, $|\mu|(X) = \lambda(X) = 1$.
Pour achever la preuve du théorème 2.28, il ne nous reste donc qu'à démontrer le lemme 2.29.

Preuve du lemme 2.29. Notons $\mathcal{C}_c^+(X)$ l'ensemble des fonctions dans $\mathcal{C}_c(X)$ à valeurs positives. Pour $f \in \mathcal{C}_c^+(X)$, posons alors

$$\Lambda f = \sup\{|\Phi(h)|; \; h \in \mathcal{C}(X), \; |h| \leq f\}. \tag{2.19}$$

On voit que Λ vérifie (2.15). De plus, clairement $\Lambda f \geq 0$ (ce qui entraîne que $\Lambda f \geq \Lambda g$ pour $f \geq g \geq 0$) et $\Lambda(cf) = c\Lambda f$ si c est un réel positif.
Montrons que Λ est additive i.e. $\Lambda(f+g) = \Lambda\, f + \Lambda\, g$. Soit f et g dans $\mathcal{C}_c^+(X)$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $u \in \mathcal{C}_c(X)$ et $v \in \mathcal{C}_c(X)$ tels que $|u| \leq f$, $|v| \leq g$, $\Lambda f \leq |\Phi(u)| + \varepsilon$ et $\Lambda g \leq |\Phi(v)| + \varepsilon$. Soit α et β tels que $|\alpha| = |\beta| = 1$ et $\alpha\,\Phi(u) = |\Phi(u)|$ et $\beta\,\Phi(v) = |\Phi(v)|$. Alors

$$\Lambda\, f + \Lambda\, g \leq |\Phi(u)| + |\Phi(v)| + 2\varepsilon = \phi(\alpha\, u + \beta\, v) + 2\varepsilon \leq \Lambda(|u| + |v|) + 2\varepsilon \leq \Lambda(f+g) + 2\varepsilon.$$

En laissant ε tendre vers 0, On obtient donc que Λ est sur-additive i.e. $\Lambda\, f + \Lambda\, g \leq \Lambda(f+g)$.
Soit maintenant $h \in \mathcal{C}_c(X)$ telle que $|h| \leq f + g$ et $V := \{x; \; f(x) + g(x) > 0\}$. Posons

$$f_1 = \frac{f\,h}{f+g}\mathbf{1}_V \quad \text{et} \quad g_1 = \frac{g\,h}{f+g}\mathbf{1}_V.$$

Clairement f_1 et g_1 sont continues sur X et à support compact. Comme $f_1 + g_1 = h$ et que $|f_1| \leq f$ et $|g_1| \leq g$, on a

$$|\Phi(h)| = |\Phi(f_1) + \Phi(g_1)| \leq |\Phi(f_1)| + |\Phi(g_1)| \leq \Lambda f + \Lambda g.$$

Par (2.19), on obtient que Λ est sous-additive i.e. $\Lambda(f+g) \leq \Lambda\, f + \Lambda\, g$. On obtient donc que Λ est additive.
Pour prolonger Λ aux fonctions $f \in \mathcal{C}_c(X)$ à valeurs réelles, comme $f = \frac{1}{2}(|f| + f) - \Lambda(|f| - f)$ et que $|f| + f$ et $|f| - f$ sont positives et dans $\mathcal{C}_c(X)$, on pose

$$\Lambda\, f = \frac{1}{2}\Lambda(|f| + f) - \frac{1}{2}\Lambda(|f| - f)$$

En utilisant la propriété d'additivité de Λ pour les fonctions positives, on vérifie alors facilement que si on décompose $f = \tilde{f}_+ - \tilde{f}_-$ où $f_\pm$ sont continues positives, alors, on a $\Lambda f = \Lambda \tilde{f}_+ - \Lambda \tilde{f}_-$. Ceci entraîne que Λ est $\mathbb{R}$-linéaire sur l'espace vectoriel des fonctions de $\mathcal{C}_0(X)$ à valeurs réelles.
Enfin, pour $f \in \mathcal{C}_c(X)$ à valeurs complexes, on pose

$$\Lambda\, f = \Lambda(\operatorname{Re} f) + i\Lambda(\operatorname{Im} f).$$

On vérifie alors simplement que Λ ainsi définie est $\mathbb{C}$-linéaire sur $\mathcal{C}_0(X)$ et vérifie (2.15) ce qui achève la preuve du lemme 2.29. □

La preuve du théorème 2.28 est donc maintenant complète. □

Exercice 2.30. Soit μ une mesure de Borel positive sur X un espace de Hausdorff localement compact. On considère $\mu : L^1(d\mu) \to (C_0(X))^*$ définit par $j_\mu(f) = f d\mu \in (C_0(X))^*$ pour $f \in L^1(d\mu)$.

1. Montrer que j_μ est isométrique.
2. Montrer que j_μ est injective si et seulement si $\operatorname{supp} d\mu = X$.