Chapitre 3

Différentiation

3.1 Dérivée d'une mesure et fonction maximale

Exemple 3.1. Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et $f \in L^1(\lambda)$. Peut-on dire que la fonction $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f\,d\lambda = \int_{]-\infty,x[} f\,d\lambda$ est dérivable de dérivée f, au moins presque partout ? (on ne peut espérer mieux que presque partout en général). Dans ce chapitre, on va répondre à cette question. Cela va découler du résultat suivant : pour presque tout x on a

$$f(x) = \lim_{R\to 0,\, x\in I,\, \mathrm{diam}(I)=R} \frac{1}{R}\int_I f\,d\lambda.$$

Exemple 3.2. Pour se persuader de la difficulté en général, prenons un exemple intéressant et à l'opposé. Considérons la mesure borélienne sur $\mathbb{R}$ suivante :

$$\mu = \sum_{n\geq 1} a_n \delta_{x_n}.$$

Ici (x_n) est une suite de réels, et prenons-là pour simplifier dans le compact $[0,1]$. La suite (a_n) est votre suite positive sommable préférée ($a_n = \frac{1}{n\log(n)^2}$ ou $a_n = \frac{1}{n^2}$, par exemple). Ainsi la mesure μ est une mesure borélienne positive finie concentrée sur $[0,1]$. La fonction

$$F(x) = \mu(]0,x[)$$

s'écrit

$$F(x) = \sum_{n \text{ t.q. } x_n<x} a_n.$$

Il est classique de voir que F est continue exactement en dehors de (x_n) (pour être précis, en dehors des x_n pour lesquels $a_n \neq 0$) ; ainsi la fonction croissante F est continue en dehors de l'ensemble dénombrable (x_n)). Mais qu'en est-il des points où F est dérivable ? Imaginez que les (x_n) sont denses dans $[0,1]$. Il y en a partout : tous les points de $[0,1]$ sont points d'accumulation de la suite (x_n). Un théorème général va néanmoins nous dire que F est dérivable presque partout. Mais même pour des (x_n) et (a_n) explicites, il est difficile d'en dire plus, car cela va dépendre de la manière dont les sous-suites de $(x_n$ et de (a_n) se comportent (simultanément).

Le prochain résultat sert à motiver les définitions qui lui font suite.

Théorème 3.3. *Soient λ_1 la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et μ une mesure de Borel complexe sur $\mathbb{R}$. On définit F_μ, la fonction de répartition de μ : pour $x \in \mathbb{R}$, $F_\mu(x) = \mu(]-\infty,x[)$.*
Pour $x \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$, les deux assertions suivantes sont équivalentes

1. *F_μ est dérivable en x et $F'_\mu(x) = z$*

2. *$\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ tel que, pour I intervalle ouvert contenant x, si $0 < \lambda_1(I) < \delta$ alors $\left|\dfrac{\mu(I)}{\lambda_1(I)} - z\right| < \varepsilon$.*

Démonstration. Sans perte de généralité, nous supposons $x = 0$ et $z = 0$: pour voir cela, on choisit χ une fonction continue à support compact égale à 1 au voisinage de x et on considère la mesure complexe $d\mu - z\,\chi\, d\lambda_1$ que l'on translate de façon à déplacer le point x en 0.
Supposons 1. Si F_μ est dérivable en 0, elle est continue en ce point donc $\mu(\{0\}) = 0$. D'autre part, si $x < x' < 0$, on a

$$\begin{aligned} \frac{F_\mu(0) - F_\mu(x)}{x} - \frac{F_\mu(0) - F_\mu(x')}{x'} &= (F_\mu(0) - F_\mu(x'))\frac{x' - x}{xx'} + \frac{F_\mu(x') - F_\mu(x)}{x} \\ &= (F_\mu(0) - F_\mu(x'))\frac{x' - x}{xx'} + \frac{\mu(\{x\})}{x} + \frac{\mu(]x, x'[)}{x}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Pour $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $-\delta < x < x' < 0$, on a

$$\left|\frac{F_\mu(0) - F_\mu(x)}{x}\right| + \left|\frac{F_\mu(0) - F_\mu(x')}{x'}\right| \leq \varepsilon/2.$$

Pour tout $x \in] - \delta, 0[$, on peut choisir x' proche de x tel que $|x' - x| + |\mu(]x, x'[)| \leq \varepsilon|x|/2$. Ainsi, tout $x \in] - \delta, 0[$, par (3.1), on obtient $\left|\dfrac{\mu(\{x\})}{x}\right| \leq \varepsilon$. On a donc montré que $\dfrac{\mu(\{x\})}{x} \underset{x\to 0^-}{\to} 0$.
Donc, pour $I =]a, b[\ni 0$, on a

$$\frac{\mu(I)}{\lambda_1(I)} = \frac{\mu(]a, 0[) + \mu(]0, b[)}{b - a} = \frac{b}{b - a}\frac{F_\mu(b) - F_\mu(0)}{b} + \frac{a}{b - a}\frac{F_\mu(0) - F_\mu(a)}{a} + \frac{\mu(\{a\})}{a}\frac{a}{b - a}.$$

Or $-1 < a(b - a)^{-1} < 0 < b(b - a)^{-1} < 1$ car $a < 0 < b$. Ainsi

$$\left|\frac{\mu(I)}{\lambda_1(I)}\right| \leq \left|\frac{F_\mu(b) - F_\mu(0)}{b}\right| + \left|\frac{F_\mu(0) - F_\mu(a)}{a}\right| + \left|\frac{\mu(\{a\})}{a}\right|.$$

On obtient donc 2.
Réciproquement, supposons 2 vérifié. Alors clairement $\mu(\{x\}) = 0$ et F_μ est continue en 0. Pour $x \not{0}$, on a

$$\frac{F_\mu(x) - F_\mu(0)}{x} = \begin{cases} \frac{\mu([0,x[)}{x} & \text{si } x > 0, \\ \frac{\mu([x,0[)}{x} & \text{si } x < 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Si 2 est vérifié alors on a également 2 où $I =]a, b[$ est remplacé par $]a, b]$, $[a, b[$ ou $[a, b]$; pour voir cela par exemple pour $[a, b]$, on calcule pour $[a, b] \subset]a', b'[$

$$\frac{\mu(]a', b'[)}{\lambda_1(]a', b'[)} - \frac{\mu([a, b])}{\lambda_1([a, b])} = \frac{\mu(]a', b'[)}{b' - a'} - \frac{\mu([a, b])}{b - a} = \frac{\mu(]a', a[\cup]b, b'[])}{b - a} + \frac{\mu(]a', b'[)}{b' - a'}\frac{b' - b + a - a'}{b - a} \tag{3.3}$$

Soit $I =]a, b[$ vérifiant 2 (pour $\varepsilon/3$ et δ). Alors on peut choisir $]a', b'[\supseteq [a, b]$ tel que $\lambda_1(]a', b'[) < \delta$, $\mu(]a', a[\cup]b, b'[]) \leq \varepsilon/3(b - a)$ et $(b' - b + a - a') \leq (b - a)/3$. Par (3.3), on obtient

$$\left|\frac{\mu([a, b])}{\lambda_1([a, b])}\right| \leq \left|\frac{\mu(]a', b'[)}{\lambda_1(]a', b'[)}\right| + \left|\frac{\mu(]a', a[\cup]b, b'[])}{b - a}\right| + \left|\frac{\mu(]a', b'[)}{b' - a'}\right|\left|\frac{b' - b + a - a'}{b - a}\right| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

De la même façon, on voit que si l'on prend $a = 0$ ou $b = 0$ (et $a \neq b$) dans 2, la conclusion reste vraie pour des intervalles I de la forme $]a, b[$, $]a, b]$, $[a, b[$ ou $[a, b]$. Ceci nous dit que le quotient défini en (3.2) tend vers 0 quand x tend vers 0. Ainsi F_μ est dérivable en 0 et sa dérivée y est nulle.
Le théorème 3.3 est démontré. □

Le théorème 3.3 suggère de définir la dérivée de la mesure μ en x comme la limite de $\mu(I)/\lambda(I)$ quand l'intervalle I rétrécit vers le point x. En dimension plus grande, la généralisation naturelle est de comparer les mesures sur des voisinages symétriques d'un point.

Notations : On va travailler sur $\mathbb{R}^d$ avec la mesure de Lebesgue, que l'on notera indiféremment λ_d ou λ ou dx ou $\mathrm{vol}(\cdot)$ ou $|\cdot|$. On prendra aussi la tribu de Borel ou celle complétée de Lebesgue. On notera $B(x,r)$ la boule ouverte centrée en x de rayon $r>0$, i.e.

$$B(x,r) := \{y \in \mathbb{R}^d\,;\ |y-x|<r\}.$$

Remarquons que

$$\lambda(B(x,r)) = \lambda(B(0,r)) = c_d\, r^d$$

pour une certaine constante $c_d>0$ qui dépend de la dimension (et qui vaut $c_d = \lambda(B(0,1))$).

Par ailleurs, on dit qu'une fonction borélienne f sur $\mathbb{R}^d$ est **localement intégrable** (par rapport à Lebesgue), et on écrit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ ou $f \in L^1_{loc}(\lambda)$ si pour tout compact K de $\mathbb{R}^d$ on a $\int_K |f|\,d\lambda < \infty$, ou de manière équivalente si pour toute boule B de $\mathbb{R}^d$ on a $\int_B |f| < +\infty$ (ou plus généralement pour tout borélien borné) ; en particulier, pour une telle fonction l'intégrale $\int_B f\,d\lambda$ a bien un sens pour toute boule $B \subset \mathbb{R}^d$.

Définition 3.4. Soit μ une mesure de Borel complexe sur $\mathbb{R}^d$. On rappelle que λ_d est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

1. La *dérivée symétrique* de μ en $x \in \mathbb{R}^d$ est définie, quand celle-ci existe, comme la limite

$$D\mu(x) := \lim_{r\to 0} \frac{\mu(B(x,r))}{\lambda_d(B(x,r))}. \tag{3.4}$$

2. La *fonction maximale* de μ en $x \in \mathbb{R}^d$ est définie comme $M\mu(x) := \sup\limits_{r>0} \dfrac{|\mu|(B(x,r))}{\lambda_d(B(x,r))}$.
3. Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, la *fonction maximale* de f est la fonction maximale de la mesure $f\,d\lambda_d$; elle est notée Mf.

Remarquons que, par définition, $M\mu = M|\mu|$ et $Mf = M|f|$. Plus généralement, pour $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ on peut définir

$$Mf(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{\lambda_d(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f|\,d\lambda.$$

Lemme 3.5. *La fonction maximale $M\mu$ est semi-continue inférieurement, donc, mesurable.*

Démonstration. Quitte à la remplacer par $|\mu|$, on peut supposer que μ est positive. Soient $T>0$ et $E = \{x;\ M\mu(x) > T\}$. Fixons $x \in E$. Alors, il existe $r>0$ et $t>T$ tel que $\mu(B(x,r)) = t\lambda_d(B(x,r))$ et on peut trouver $\delta>0$ tel que $(r+\delta)^d < r^d t/T$. Aussi, si $|x-y|<\delta$, on a $B(x,r) \subset B(y, r+\delta)$; par conséquent

$$\mu(B(y,r+\delta)) \geq t\lambda_d(B(x,r)) = t\left[\frac{r}{r+\delta}\right]^d \lambda_d(B(y,r+\delta)) > T\,\lambda_d(B(y,r+\delta)).$$

Donc $B(x,\delta) \subset E$. E est donc ouvert. $\square$

Le résultat central pour la suite est l'estimation suivante de la mesure des ouverts $\{x; M\mu(x) > t\}$.

Théorème 3.6 (Estimée L^1-faible pour la fonction maximale)**.** *Soit μ une mesure de Borel complexe. Alors pour $t>0$, on a*

$$\lambda_d(\{M\mu > t\}) \leq 3^d t^{-1} \|\mu\| \quad \textit{où} \quad \|\mu\| = |\mu|(\mathbb{R}^d). \tag{3.5}$$

Démonstration. On commence par montrer le joli

Lemme 3.7 (Lemme de recouvrement de Vitali)**.** *Soit* $W = \bigcup_{1\leq i\leq N} B(x_i, r_i)$. *Alors il existe* $S \subset \{1, \ldots, N\}$ *tel que*

1. *les boules* $(B(x_i, r_i))_{i\in S}$ *sont deux à deux disjointes ;*
2. $W \subset \bigcup_{i\in S} B(x_i, 3r_i)$ *;*

En particulier on a

$$\lambda_d(W) \leq 3^d \sum_{i\in S} \lambda_d(B(x_i, r_i)) = 3^d \lambda\Big(\bigcup_{i\in S} B(x_i, r_i)\Big).$$

Démonstration. On va donner une procédure pour construire la sous-famille. On notera $B_i = B(x_i, r_i)$, $1 \leq i \leq N$, les boules composant W. On suppose que leurs rayons sont ordonnés de façon décroissante : $r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_N$. Posons $i_1 = 1$. Écartons toutes les boules rencontrant B_{i_1}. Soit B_{i_2} la première qui en est disjointe. Écartons toutes les boules rencontrant B_{i_1} et soit i_3, l'indice de la première boule ne rencontrant ni B_{i_1} ni B_{i_2}. On poursuit ce processus jusqu'à épuisement de la famille de boules considérée (qui est finie). On appelle $S = \{i_1, i_2, \cdots\}$ les indices ainsi construits.
On a clairement 1. D'autre part, chaque boule écartée rencontrant l'une des B_{i_j} est contenue dans $B(x_{i_j}, 3r_{i_j})$ par le fait général suivant : si $B(x, R) \cap B(y, r) \neq \emptyset$ et $R \geq r$ alors $B(y, r) \subset B(x, 3R)$. Ceci nous donne 2. Enfin, le 'en particulier' s'en déduit car $\lambda_d(B(x, 3r)) = 3^d \lambda_d(B(x, r))$. □

Fixons μ et t. Soit K un compact de $\{x; M\mu(x) > t\}$. Pour chaque point x de K, il existe une boule B centrée en x telle que $|\mu|(B) > t\lambda_d(B)$. On peut de ce recouvrement de K par des boules ouvertes extraire un recouvrement fini, disons, $K \subset B_1 \cup \cdots \cup B_n$; pour S construit comme dans le lemme 3.7, on a alors

$$\lambda_d(K) \leq 3^d \sum_{i\in S} \lambda_d(B_i) \leq 3^d t^{-1} \sum_{i\in S} |\mu|(B_i) \leq 3^d t^{-1} \|\mu\|.$$

Dans la dernière étape, on a utilisé le fait que les $(B_i)_{1\leq i\leq n}$ sont deux à deux disjointes. On obtient alors (3.5) en prenant le supremum sur les compacts K par la régularité intérieure de la mesure de Lebesgue.
Ceci achève la preuve du théorème 3.6. □

Définition 3.8 (L^1-faible)**.** Soit f Lebesgue mesurable sur $\mathbb{R}^d$. On dit que f est *faiblement intégrable* ou appartient L^1 *faible* si la fonction $x \to x\, \lambda_d(\{y \in \mathbb{R}^d;\ |f(y)| > x\})$ est bornée sur $]0, +\infty[$.
L'ensemble des fonctions mesurables faiblement intégrables sur $\mathbb{R}^d$ est noté $L^1_w(\mathbb{R}^d)$.

L'inégalité (de Markov)

$$\lambda_d(\{y \in \mathbb{R}^d;\ |f(y)| > t\}) \leq t^{-1} \|f\|_1 \tag{3.6}$$

garantit qu'une fonction intégrable est faiblement intégrable.
Le théorème 3.6 dit lui que l'opérateur maximal i.e. l'application $f \to Mf$ va de $L^1(\mathbb{R}^d)$ dans $L^1_w(\mathbb{R}^d)$: pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et tout $t > 0$, on a

$$\lambda_d(\{x \in \mathbb{R}^d;\ Mf(x) > t\}) \leq 3^d t^{-1} \|f\|_1.$$

3.2 Points de Lebesgue et différentiation

Définition 3.9 (Points de Lebesgue)**.** Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. On dit que $x \in \mathbb{R}^d$ est *un point de Lebesgue* de f si

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{1}{\lambda_d(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| d\lambda_d(y) = 0. \tag{3.7}$$

Clairement (par application immédiate de la définition), un point de continuité de f est un point de Lebesgue de f. Mais il n'est pas clair à priori qu'une fonction intégrable ait un point de Lebesgue. Néanmoins on démontre le résultat essentiel suivant :

Théorème 3.10. *Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, presque tout point de $\mathbb{R}^d$ est point de Lebesgue de f.*

Démonstration. Pour $x \in \mathbb{R}^d$ et $r > 0$, on pose

$$T(f)(x) = \limsup_{r \searrow 0} \frac{1}{\lambda_d(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| d\lambda_d(y) \in [0, +\infty] \tag{3.8}$$

On veut donc démontrer que $Tf = 0$ λ_d-presque partout.
Remarquons d'abord que si $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ alors Tg est nulle.
Soit $\varepsilon > 0$ et $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ telle que si $\|f - g\|_{L^1} \leq \varepsilon$. On vérifie (par inégalité triangulaire et passage à la limite sup) que

$$Tf \leq T(f - g) + Tg = T(f - g).$$

De plus, comme pour toute fonction (localement) intégrable h on a trivialement $Th \leq Mh + |h|$ ponctuellement, on en tire que sur $\mathbb{R}^d$ on a

$$Tf \leq M(f - g) + |f - g|.$$

Ainsi, pour $t > 0$ on a

$$\{x \in \mathbb{R}^d;\ Tf(x) > t\} \subset \{x \in \mathbb{R}^d;\ Mh(x) > t/2\} \cup \{x \in \mathbb{R}^d;\ |h(x)| > t/2\} \tag{3.9}$$

Par les estimées L^1-faible on en tire que

$$\lambda(\{Tf > t\}) \leq (3^d + 1)\frac{2}{t}\,\varepsilon$$

et ceci pour tout $\varepsilon > 0$. Donc $\lambda(\{Tf > t\}) = 0$ pour tout $t > 0$ et donc $Tf = 0$ λ-pp. □

Le théorème 3.10 va nous donner accès à beaucoup d'information sur la dérivation de mesures.

Théorème 3.11. *Soit μ une mesure de Borel complexe sur $\mathbb{R}^d$ absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Soit f sa dérivée de Radon-Nikodym par rapport à la mesure de Lebesgue. Alors $D\mu = f$ Lebesgue presque partout ; pour tout borélien E de $\mathbb{R}^d$, on a*

$$\mu(E) = \int_E (D\mu) d\lambda_d. \tag{3.10}$$

Ceci nous dit que la dérivée de Radon-Nicodym d'une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue peut aussi être obtenue par la limite (3.4).

Démonstration. Le théorème 2.18 nous dit que (3.10) est vraie avec $D\mu$ remplacée par $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. En tout point x qui de Lebesgue pour f, on a

$$f(x) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\lambda_d(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y) d\lambda_d(y) = \lim_{r \to 0} \frac{\mu(B(x,r))}{\lambda_d(B(x,r))}.$$

Ainsi, presque partout, $(D\mu)(x)$ existe et vaut $f(x)$. On a donc (3.10). □

Définition 3.12. On dit qu'une suite de boréliens de $\mathbb{R}^d$, disons $(E_j)_{j\geq 0}$, *converge gentiment* vers le point $x \in \mathbb{R}^d$ s'il existe $\alpha > 0$ et une suite de rayons $(r_j)_{j\geq 0}$ réels positifs tendant vers 0 tels que, pour tout $j \geq 0$, $E_j \subset B(x, r_j)$ et $\lambda_d(E_j) \geq \alpha r_j^d$.

Remarque 3.13.
- *Pour qu'une suite converge gentiment vers un point x il n'est pas nécessaire que x soit dans l'un des éléments de la suite, pas même dans l'adhérence de l'un des éléments. Par exemple la suite de boréliens de $\mathbb{R}$*
$$]\frac{1}{2k}, \frac{1}{k}]$$
converge gentiment vers 0. Par contre, ce n'est pas le cas de la suite $]\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}, \frac{1}{k}]$.
- *Une suite de carré dans $\mathbb{R}^2$ dont le diamètre tend vers zéro converge gentiment vers 0. Ce n'est pas forcément le cas d'une suite de rectangle, par contre.*
- *Si une suite $E_j \subset \mathbb{R}^d$ converge gentiment vers 0, alors $E_j(x) := x + E_j$ converge gentiment vers x.*

Théorème 3.14. *À tout $x \in \mathbb{R}^d$, associons une suite de boréliens, disons $(E_j(x))_{j\geq 0}$ qui converge gentiment vers le point x. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors, en tout point x qui est de Lebesgue pour f (donc, en particulier, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$), on a*

$$f(x) = \lim_{j\to+\infty} \frac{1}{\lambda_d(E_j(x))} \int_{E_j(x)} f d\lambda_d. \tag{3.11}$$

Démonstration. Soit x un point de Lebesgue de f. Soient $\alpha(x)$ et $B(x, r_i)$ le nombre positif et la boule associés à la suite $(E_i(x))_i$ par la définition 3.12. Comme $E_i(x) \subset B(x, r_i)$, on a

$$0 \leq \frac{\alpha(x)}{\lambda_d(E_i(x))} \int_{E_i(x))} |f(y) - f(x)| d\lambda_d(y) \leq \frac{1}{\lambda_d(B(x, r_i))} \int_{B(x,r_i)} |f(y) - f(x)| d\lambda_d(y).$$

Comme $r_i \to 0$ et que x est un point de Lebesgue de f, le membre de droite de cette inégalité tend vers 0. Le membre de gauche tend aussi vers 0. On a donc démontré (3.11). $\square$

Corollaire 3.15. *Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f\, d\lambda_1$. Alors F est dérivable en tout point de Lebesgue de f et, en ces points, $F'(x) = f(x)$.*

Démonstration. Soit x un point de Lebesgue de f et $(\varepsilon_i)_{i\leq 0}$ une suite strictement positive tendant vers 0. Si on pose $E_i(x) = [x, x + \varepsilon_i]$ (resp. $E_i(x) = [x - \varepsilon_i, x]$), le théorème 3.14 nous dit que la dérivée à droite (resp. gauche) de F en x existe et vaut $f(x)$. On a donc démontré le corollaire. $\square$

Définition 3.16. Soit $E \subset \mathbb{R}^d$ Lebesgue mesurable. On appelle *densité métrique* de E en $x \in \mathbb{R}^d$ la limite $\displaystyle\lim_{r\to 0} \frac{\lambda_d(E \cap B(x, r))}{\lambda_d(B(x, r))}$ lorsqu'elle existe.

En appliquant le théorème 3.11 à la fonction indicatrice de E, on obtient la

Proposition 3.17. *La densité métrique de E vaut 1 en presque tout point de E et 0 en presque tout point de son complémentaire.*

Remarque 3.18. *En considérant $E = \mathbb{Q}$, on voit qu'on ne peut en général pas obtenir l'égalité donnée par la proposition 3.17 en tout point.*

Pour l'instant on a étudié les mesures absolument continues par rapport à celle de Lebesgue. Tournons nous vers celles singulières.

Théorème 3.19. *À tout $x \in \mathbb{R}^d$, associons une suite de boréliens, disons $(E_j(x))_{j\geq 0}$ qui converge gentiment vers le point x.*
Soit μ une mesure de Borel complexe telle que $\mu \perp \lambda_d$. Alors, pour Lebesgue presque tout x, $D\mu(x) = 0$ et plus généralement on a

$$\lim_{j\to+\infty} \frac{\mu(E_j(x))}{\lambda_d(E_j(x))} = 0 \qquad \lambda_d - pp. \tag{3.12}$$

Démonstration. En décomposant μ en ses partie réelle et imaginaire puis en utilisant la décomposition de Jordan de celles-ci (voir le commentaire suivant la définition 2.12), on voit qu'on peut supposer que μ est positive (finie, donc). Dans ce cas, en suivant le preuve du théorème 3.14 et en en conservant les notations, on a

$$\frac{\alpha(x)\,\mu(E_i(x))}{\lambda_d(E_i(x))} \leq \frac{\mu(E_i(x))}{\lambda_d(B(x,r_i))} \leq \frac{\mu(B(x,r_i))}{\lambda_d(B(x,r_i))}.$$

Ainsi, (3.12) sera une conséquence de

$$D\mu(x) = 0 \quad \lambda_d\text{-presque partout} \tag{3.13}$$

que nous allons maintenant démontrer.

Si μ était portée par un fermé F de mesure nulle, on aurait immédiatement que $D\mu(x) = 0$ sur $\mathbb{R}^d \setminus F$ et donc le résultat voulu. On va adapter cette idée en utilisant la régularité de μ : on va perdre un petit bout qu'on contrôlera à l'aide de la fonction maximale.

Définissons la dérivée supérieur $D^+\mu$ comme

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad D^+\mu(x) = \limsup_{r\to 0} \frac{\mu(B(x,r))}{\lambda_d(B(x,r))} = \lim_{n\to+\infty}\left[\sup_{0<r<1/n} \frac{\mu(B(x,r))}{\lambda_d(B(x,r))}\right].$$

C'est une fonction borélienne comme la quantité dans le crochet est semi-continue inférieurement (voir la démonstration du lemme 3.5).
Soit $t > 0$ et $\varepsilon > 0$. Comme $\mu \perp \lambda_d$, μ est concentrée sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle. Comme μ est régulière (par le théorème 2.7), il existe K compact tel que $\lambda_d(K) = 0$ et $\mu(K) > \|\mu\| - \varepsilon$.
Soit $\mu_1(E) := \mu(K \cap E)$ pour E borélien. La mesure donnée par $\mu_2(E) = \mu(E) - \mu_1(E) = \mu(K^c \cap E)$ est telle que $\|\mu_2\| = \mu_2(X) \leq \varepsilon$. Pour $x \notin K$, on a $D^+\mu(x) = D^+\mu_2(x) \leq (M\mu_2)(x)$. Ainsi $\{x \in \mathbb{R}^d;\ D^+\mu(x) > t\} \subset K \cup \{x \in \mathbb{R}^d;\ (M\mu_2)(x) > t\}$ et le théorème 3.6 montre que $\lambda_d(\{x \in \mathbb{R}^d;\ D^+\mu(x) > t\}) \leq 3^d t^{-1}\|\mu_2\| \leq 3^d t^{-1}\varepsilon$, ceci pour tout $t > 0$ et $\varepsilon > 0$. On en déduit que $D^+\mu = 0$, λ_d-presque partout. □

En combinant ce résultat avec le théorème 3.11, on obtient le

Corollaire 3.20. *À tout $x \in \mathbb{R}^d$, associons une suite de boréliens, disons $(E_j(x))_{j\geq 0}$ qui converge gentiment vers le point x. Soit μ une mesure de Borel complexe.*
Si la décomposition de Lebesgue de μ s'écrit $d\mu = f\,d\lambda_d + d\mu_s$ alors, pour Lebesgue presque tout x, on a

$$\lim_{j\to+\infty} \frac{\mu(E_j(x))}{\lambda_d(E_j(x))} = f(x).$$

En particulier $\mu \perp \lambda_d$ si et seulement si $(D\mu)(x) = 0$ pour Lebesgue presque tout x.

Sur les ensembles qui ne sont pas μ négligeables, $D\mu$ se comporte tout-à-fait différemment comme le montre le

Théorème 3.21. *Si μ une mesure de Borel positive telle que $\mu \perp \lambda_d$ alors $(D\mu)(x) = +\infty$ pour μ-presque tout x.*

Démonstration. Il existe un borélien $S \subset \mathbb{R}^d$ tel que $\lambda_d(S) = 0$ et $\mu(\mathbb{R}^d \setminus S) = 0$.
Pour $n \geq 1$, soit E_n l'ensemble des $x \in S$ pour lesquels il existe une suite de rayons $(r_i)_{i\geq 1} = (r_i(x))_{i\geq 1}$ strictement positifs tendant vers 0 tels que

$$\mu(B(x, r_i)) < n\, \lambda_d(B(x, r_i)). \tag{3.14}$$

Alors, on a $(D\mu)(x) = +\infty$ pour tout $x \in S \setminus \bigcup_{n\geq 1} E_n$. En effet, si la limite définissant $D\mu(x)$ ne tend par vers $+\infty$, vela veut dire qu'on peut trouver une suite $r_j \to 0$ et un $M > 0$ tel que $\frac{\mu(B(x,r_j))}{\lambda_d(B(x,r_j))}$ et donc x appartient à $E_{\lceil M \rceil}$. Il suffit donc de montrer que chaque E_n est inclus dans un borélien de mesure nulle (donc leur union aussi).

Pour $j \geq 1$, soit $V_j \supset S$ un ouvert tel que $\lambda_d(V_j) < 1/j$. Fixons pour l'instant n et j. Tout point E_n est le centre d'une boule ouverte $B_x \subset V_j$ satisfaisant (3.14). Soit β_x la boule de centre x de rayon un tiers celui de B_x. La réunion de ces boules $(\beta_x)_x$ est un ouvert noté $W_{j,n}$ qui contient E_n et qui se trouve dans V_j. Si on admet l'estimation

Fait 3.22. *$\mu(W_{j,n}) < 3^d n/j$.*

alors, en posant $\Omega_n = \cap_j W_{j,n}$ on a $E_n \subset \Omega_n$, Ω_n est un G_δ avec $\mu(\Omega_n) = 0$. Ceci achève la preuve du théorème 3.21. □

Preuve du Fait 3.22. En effet, soit $K \subset W_{j,n}$ compact. On peut le recouvrir par un nombre finie de β_x. Le lemme 3.7 assure qu'il existe $F \subset E_n$ fini tel que

1. les éléments de $\{\beta_x;\ x \in F\}$ sont deux à deux disjoints,
2. $K \subset \bigcup_{x\in F} B_x$.

Ainsi

$$\mu(K) \leq \sum_{x\in F} \mu(B_x) \leq n \sum_{x\in F} \lambda_d(B_x) = 3^d n \sum_{x\in F} \lambda_d(\beta_x) \leq 3^d\, n\, \lambda_d(V_j) < 3^d n j^{-1}.$$

Ceci prouve le lemme 3.22. □

3.3 Primitives et dérivées

On sait que, si $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ est continue alors, pour tout nombre complexe $F(a)$, la fonction définie par

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt \tag{3.15}$$

sur $[a, b]$ est continûment dérivable et $F'(x) = f(x)$. F est une primitive de f. Ceci peut aussi s'exprimer par le fait que si F est une fonction continûment dérivable sur $[a, b]$ alors elle est une primitive de sa dérivée. On veut comprendre comment ceci s'étend au cadre de l'intégrale de Lebesgue ; voici quelques questions naturelles que l'on peut se poser :

— pour que F soit une primitive suffit-il de supposer que f est intégrable ?
— si F est continue et dérivable presque partout sur $[a, b]$, a-t-on (3.15) avec $f = F'$?

Remarque 3.23. *Deux exemples :*

1. *Soit $f(x) = x^2 \sin(x^{-2})$ sur $\mathbb{R}^*$ et $f(0) = 0$. Elle est dérivable en tout point mais $\int_0^1 |f'(t)|dt = +\infty$.*

2. Supposons F continue sur $[a,b]$, F dérivable presque partout sur $[a,b]$ et F' intégrable. Cela implique-t-il que (3.15) pour $f = F'$?
La réponse est non ! En effet, soit $(\delta_n)_{n\geq 0}$ strictement décroissante à termes positifs. Posons $C_0 = [0,1]$. Pour $n \geq 0$, si C_n est la réunion de 2^n segments de longueur $2^{-n}\delta_n$, construisons C_{n+1} à partir de C_n en ôtant de chacun de ces segments en leur centre un segment de façon que la partie restante soit la réunion de deux segments de longueur $2^{-n-1}\delta_{n+1}$ (ceci est possible car $\delta_n > \delta_{n+1}$). Alors C_{n+1} est la réunion de 2^{n+1} segments de longueur $2^{-n-1}\delta_{n+1}$.
Alors $C_0 \supset C_1 \supset \cdots \supset C_n \supset \cdots$, $|C_n| = \delta_n$ et si on pose $C = \bigcap_{n\geq 1} C_n$ alors C est compact et $|C| = \lim_{n\to 0} \delta_n$. C est un ensemble de Cantor.
On définit alors $f_n : x \in [0,1] \mapsto \int_0^x g_n(t)dt$ où $g_n := \dfrac{1}{\delta_n}\mathbf{1}_{C_n}$. On voit alors que f_n est croissante et constante sur le complémentaire de C_n, $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = 1$. D'autre part, si I est l'un des 2^n segments composant C_n, on a $\displaystyle\int_I \mathbf{1}_{C_n}(t)dt = \int_I \mathbf{1}_{C_{n+1}}(t)dt$. Ainsi pour $x \notin C_n$, on a $f_n(x) = f_{n+1}(x)$ et, pour $x \in I$ l'un des segments composant C_n, $|f_n(x) - f_{n+1}(x)| \leq \displaystyle\int_I |g_n - g_{n+1}|(t)dt \leq 2^{-n+1}$. Par le théorème de Dini la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction continue f telle que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $f'(x) = 0$ si $x \notin C$. Ainsi f' s'annule presque partout si $\lim_{n\to 0} \delta_n = 0$.

Définition 3.24. Soit $f : I := [a,b] \to \mathbb{C}$. On dit que f est *absolument continue* si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que

$$\sum_{j=1}^{n} |f(\beta_j) - f(\alpha_j)| < \varepsilon \tag{3.16}$$

pour tout n et toute famille de segments dans I, disons, $]\alpha_1, \beta_1[, \ldots,]\alpha_n, \beta_n[$, deux à deux disjoints vérifiant $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(\beta_j - \alpha_j) < \delta$.

On remarque que, sur $I = [a,b]$,
— les fonctions absolument continues forment un espace vectoriel ;
— une fonction absolument continue est en particulier continue ;
— une fonction continue n'est pas nécessairement absolument continue, comme le montre le second exemple de la remarque 3.23 qui fournit une fonction continue croissante qui n'est pas absolument continue ;
— Par contre, une fonction lipschtizienne est absolument continue.

Démontrons d'abord le résultat simple suivant.

Proposition 3.25. *Soit $f \in L^1([a,b])$. Soit $F(a) \in \mathbb{C}$. Si sur $]a,b]$, on définit F par (3.15) alors F est absolument continue sur $[a,b]$.*

Démonstration. Considérons la mesure $d\mu = f\, d\lambda_1$. Comme $\mu \ll \lambda_1$, le théorème 2.18 nous dit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour E mesurable, si $\lambda_d(E) \leq \delta$ alors $|\mu|(E) \leq \varepsilon$. En particulier, en prenant E comme une réunion disjointe dénombrable de segments, on voit que F est absolument continue. □

On va démontrer le résultat important suivant, qui fournit une réciproque à la proposition 3.25 dans le cas des fonctions réelles croissantes.

Théorème 3.26. *Soit $F : I := [a,b] \to \mathbb{R}$ continue croissante. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. F est absolument continue.

2. *L'image par F d'un ensemble de mesure de Lebesgue nulle de I est de mesure de Lebesgue nulle.*
3. *F est dérivable presque partout sur I, $f := F'$ est Lebesgue intégrable et on a (3.15).*

Remarque 3.27. *L'hypothèse de continuité est nécessaire pour montrer obtenir la propriété 2 à partir de 1 ou 3 comme le montre l'exemple suivant : considérer la fonction $F : [0,2] \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = x$ si $x \in [0,1]$ et $F(x) = x+1$ si $x \in]1,2]$.*
On peut noter que la fonction f construite dans le second exemple de la remarque 3.23 envoie l'ensemble de Cantor qui est compact de mesure de Lebesgue nulle sur l'intervalle $[0,1]$. Elle n'est donc pas absolument continue.

Démonstration. La proposition 3.25 dit que 3⇒1. Il suffit donc de montrer 1⇒2⇒3.
On appelle $\mathcal{S}$ la σ-algèbre des sous-ensembles Lebesgue mesurables de $\mathbb{R}$. Puisque f est continue croissante, on a

$$F(I) = F([a,b]) = [F(a), F(b)].$$

Supposons que F est AC sur $I = [a,b]$ et soit $E \subset I$, $E \in \mathcal{S}$ tel que $\lambda_1(E) = 0$. On veut montrer que $F(E) \in \mathcal{S}$ et $\lambda_1(F(E)) = 0$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\{a,b\} \cap E = \emptyset$ (enlever ces points ne fait qu'au pire enlever deux points à l'image, ce qui ne changera pas sa mesure).
Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\delta > 0$ associé à F et ε par la définition 3.24. Il existe V ouvert tel que $\lambda_s(V) < \delta$ et $E \subset V \subset I$. Alors $V = \bigcup_{i\geq 1}]\alpha_i, \beta_1[$. Ainsi $\sum_{i\geq 1} (\beta_i - \alpha_i) < \delta$ et donc $\sum_{i\geq 1} (F(\beta_i) - F(\alpha_i)) < \varepsilon$. Comme $E \subset V$, on a $F(E) \subset \bigcup_{i\geq 1} [F(\alpha_i), F(\beta_i)]$. Donc, $F(E)$ est contenu dans un borélien de mesure arbitrairement petite. Il est donc contenu dans un ensemble de mesure nulle. La mesure de Lebesgue étant complète, il est Lebesgue mesurable et de mesure de Lebesgue nulle. Ceci prouve 1⇒2.

Supposons 2 vraie. On définit pour tout borélien $E \subset [a,b]$

$$\mu(E) := \lambda(F(E)).$$

En général, ça se passe très mal quand on prend les images directes ; en particulier une telle formule ne permet pas de définir une mesure à cause du manque d'injectivité (les images d'ensembles disjoints peuvent alors se rencontrer). Mais lorsque F est croissante, on peut quand même s'en tirer comme suit. De la même manière que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone est au plus dénombrable, on a que les points de $F(I) = [F(a), F(b)]$ ayant plus de deux antécédents est au plus dénombrable, et en particulier de mesure nulle. C'est-à-dire, si on introduit

$$\mathcal{N} := \{z \in F(I) \; ; \; \mathrm{Card}(F^{-1}(\{z\})) \geq 2\},$$

alors $\mathcal{N}$ est au plus dénombrable et donc borélien de mesure nulle. Ca découle de la continuité pour l'inverse à droite par exemple, ou plus directement, on voit que $\mathcal{N} = \cup \mathcal{N}_k$ où

$$\mathcal{N}_k := \{z \in F(I) \, ; F^{-1}(\{z\}) \text{ contient un segment de longeur } \frac{1}{k}\}$$

est forcément fini, puisqu'à deux éléments distincts de $\mathcal{N}_k$ correspondent deux intervalles disjoints de $[a,b]$ de longueur au moins $\frac{1}{k}$. Alors, si (E_j) est une famille de boréliens de $[a,b]$ deux à deux disjoints, on a

$$\begin{aligned}\mu(\cup E_j) = \lambda(F(\cup E_j)) = \lambda(\cup F(E_j)) = \lambda(\cup F(E_j) \setminus \mathcal{N}) = \lambda(\cup (F(E_j) \setminus \mathcal{N})) \\ = \sum \lambda(F(E_j) \setminus \mathcal{N}) = \sum \lambda(F(E_j)) = \sum \mu(E_j),\end{aligned}$$

car les ensembles $F(E_j) \setminus \mathcal{N}$ sont deux à deux disjoints. Ainsi μ est une mesure positive bornée ; comme F satisfait 2, elle est absolument continue par rapport à λ_1. Donc, par le théorème de Radon-Nikodym, $d\mu = f\, d\lambda_1$ avec $f \in L^1(I)$ (pour la mesure de Lebesgue). Pour $E = [a, x]$, on a $F(E) = [F(a), F(x)]$ par croissance et continuité. Ainsi

$$F(x) - F(a) = \lambda_1(F(E)) = \mu(E) = \int_a^x f(t)dt.$$

Par le corollaire 3.15, F est dérivable Lebesgue presque partout et $F'(t) = f$. Ceci prouve 2⇒3 et achève la preuve du théorème 3.26. □

Définition 3.28 (Variation totale)**.** Pour une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ on définit la variation totale de f sur $[a, x]$ pour $x \in [a, b]$ par

$$T_f(a, x) = \sup_{\substack{N\in\mathbb{N}^* \\ a=t_0<t_1<\cdots<t_N=x}} \sum_{j=1}^{N} |f(t_j) - f(t_{j-1})| \tag{3.17}$$

Si $T_f(a, b) < +\infty$, on dit que f est *à variation bornée* sur $[a, b]$ et $T_f(a, b)$ est alors appelée *la variation totale* de f.

Les fonctions à variations bornées forment un espace vectoriel. De plus :
- Une fonction monotone sur $[a, b]$ est à variation bornée sur $[a, b]$. Voir aussi l'exercice plus loin.
- Une fonction lipschtizienne sur $[a, b]$ est à variation bornée sur $[a, b]$.
- Une fonction continue sur $[a, b]$ n'est pas nécessairement à variations bornées (prendre par exemple $x \to x \sin^2(1/x)$ sur $[0, 1]$). Mais une fonction absolument continue est à variations bornées, et même mieux :

Théorème 3.29. *Soit $f : I := [a, b] \to \mathbb{C}$ absolument continue. Pour $x \in I$, on pose $T_f(x) = T_f(a, x)$.*
- *Alors les fonctions T_f, $T_f + f$ et $T_f - f$ sont absolument continues sur I. En particulier f est à variations bornées.*
- *Si f est à valeurs réelles alors les fonctions T_f, $T_f + f$ et $T_f - f$ sont de plus croissantes. En particulier, f est différence de deux fonctions croissantes (absolument) continues.*

Preuve du théorème 3.29. On notera pour simplifier $T := T_f$. Vérifions d'abord que $T(x)$ est finie pour tout x. Considérons une partition de $[a, x]$ comme celles intervenant dans (3.17). Par l'inégalité triangulaire, on voit que la somme dans le membre de droite de (3.17) augmente si on raffine la partition i.e. si on y ajoute des points $(t_j)_j$. Pour tout $\delta > 0$, on peut ajouter des points de façon que l'ensemble des intervalles $\{]t_i, t_{i+1}[; 0 \le i \le N-1\}$ se partitionne en $\{]t_i, t_{i+1}[; 0 \le i \le N-1\} = \bigcup_{1\le j\le m} \{]t_i, t_{i+1}[; i \in I_j\}$ où, pour $1 \le j \le m$, on a $\delta/2 \le \sum_{i\in I_j}(t_{i+1} - t_i) < \delta$, Clairement, m, le nombre total des classes, est majoré par $2(b-a)\delta^{-1}$. Par absolue continuité de f sur $[a, b]$, on choisit $\delta > 0$ tel que $\sup_{1\le j\le m} \sum_{i\in I_j} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| \le 1$.

On obtient alors que $\sum_{j=1}^{N} |f(t_j) - f(t_{j-1})| \le 2(b-a)\delta^{-1}$. Ainsi $T(x) \le 2(b-a)\delta^{-1}$.
Comme $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = x$, pour $y \ge x$, on a

$$T(y) \ge |f(y) - f(x)| + \sum_{j=1}^{N} |f(t_j) - f(t_{j-1})| \ge |f(y) - f(x)| + T(x).$$

Ainsi, si f est à valeurs réelles,

$$T(y) \geq T(x), \quad T(y) \geq -f(y) + T(x) + f(x) \quad \text{et} \quad T(y) \geq f(y) + T(x) - f(x).$$

Ainsi les fonctions T, $T+f$ et $T-f$ sont croissantes.
Il suffit maintenant de montrer que T est absolument continue sur I, les fonctions absolument continues sur I constituant un espace vectoriel.
Soit $]\alpha, \beta[\subset I$. Alors

$$T(\beta) - T(\alpha) = \sup_{\substack{N \in \mathbb{N}^* \\ \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = \beta}} \sum_{j=1}^{N} |f(t_j) - f(t_{j-1})|. \tag{3.18}$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ associé à f et ε par la définition 3.24. Choisissons des intervalles deux à deux disjoints $((\alpha_j, \beta_j))_{j\geq 1}$ tels que $\sum_{j\geq 1}(\beta_j - \alpha_j) < \delta$. Alors , en utilisant pour chacun des $((\alpha_j, \beta_j))_{j\geq 1}$, la formule (3.18) et notre choix de δ dans la définition 3.24, on obtient $\sum_{j\geq 1}(T(\beta_j) - T(\alpha_j)) < \varepsilon$.
Ainsi T est absolument continue et la preuve de théorème 3.29 complète □

Exercice 3.30. Soit BV l'espace des fonctions sur $[a, b]$ à variation bornée.

1. Montrer que toute fonction à valeurs réelles, monotone sur $[a, b]$ est à variation bornée.
2. Montrer que si $f \in BV$ est à valeurs réelles, alors il existe f_+ et f_- monotones bornées sur $[a, b]$ telles que $f = f_+ - f_-$.
   Indication : on pourra s'inspirer de la preuve du théorème 3.29.
3. Montrer que si $f \in BV$ alors f admet une limite à droite et à gauche en tout point. Au point x, on les notera $f(x \pm 0)$.
4. Montrer que si f est de plus continue à droite, alors dans la décomposition précédente, on peut choisir f_+ et f_- continues à droite.
5. Montrer que si $f \in BV$ est continue à droite en tout point de $[a, b[$, il existe une mesure de Borel sur $[a, b]$, disons, μ_f telle que

   $$f(x) - f(a) = \mu_f([a, x]) \quad \text{pour} \quad x \in [a, b].$$

   μ_f est la mesure de Stieltjes-Lebesgue associée à f.
   Indication : prenons $[a, b] = [0, 1]$; on pourra s'inspirer de la construction de la mesure de Lebesgue et considérer la suite de formes linéaires $(M_n)_{n\geq 1}$ définies par

   $$M_n(\phi) = \sum_{j=0}^{2^n - 1} \big(f((j+1)2^{-n}) - f(j2^{-n})\big)\, \phi(j2^{-n}), \quad \phi \in \mathcal{C}([0, 1]).$$

   On vérifiera que ces formes linéaires sont continues, que la suite $(M_n)_{n\geq 1}$ converge vers M, une forme linéaire continue que l'on peut par le théorème 2.30 représenter par une mesure complexe μ. On en déduira les propriétés requises sur μ.
6. Vérifier que $|\mu_f|([a, b]) = \mathrm{var}(f)$.
7. Montrer que F définie en (3.17) est une fonction de répartition (celle continue à gauche) de $|\mu_f|$, la variation totale de μ_f (voir définition 2.5).
8. Montrer que $\mu_f \ll \lambda_1$ si et seulement si f est absolument continue sur $[a, b]$.

9. Montrer que toute $f \in BV$ est différentiable Lebesgue presque partout et que $f' \in L^1([a,b])$.

On peut maintenant démontrer le

Théorème 3.31. *Soit $F: \ I := [a,b] \to \mathbb{C}$ absolument continue. Alors F est dérivable presque partout sur I, $f := F'$ est Lebesgue intégrable et on a (3.15).*

Démonstration. Clairement, par linéarité, il suffit de démontrer cela pour F à valeurs réelles ce que l'on supposera dorénavant. On a vu au théorème 3.29 que F s'écrit alors comme difference de deux fonctions croissantes absolument continues F_1 et F_2, $F = F_1 - F_2$. On peut alors appliquer le théorème 3.26 à F_1 et F_2 qui satisfont le point 1 de ce résultat. Elles en satisfont donc aussi le point 3 ; donc $F = F_1 - F_2$ satisfait aussi le point 3 du théorème 3.26. Ceci prouve le théorème 3.31 □

La prochain résultat démontre les mêmes conclusions sous un jeu d'hypothèses différent avec une méthode de preuve différente.

Théorème 3.32. *Soit $F: \ I := [a,b] \to \mathbb{C}$ est dérivable en tout point de I et que $f := F'$ est Lebesgue intégrable alors on a (3.15).*

Notez que dans ce résultat on demande que F soit dérivable *en tout point* ; par contre, on ne suppose rien sur l'absolue continuité de F qui est, par la proposition 3.25, un corollaire du résultat.

Démonstration. Il suffit de démontrer que (3.15) est vraie pour $x = b$; on supposera sans perte de généralité de f est à valeurs réelles. Soit $\varepsilon > 0$. Par le théorème de Vitali-Carathéodory (théorème 1.27), il existe g semi-continue inférieurement sur $[a,b]$ telle que $g \geq f = F'$ et

$$\int_a^b g(t)dt < \int_a^b f(t)dt + \varepsilon. \tag{3.19}$$

On a alors $g + \varepsilon/2(b-a) > f$ et $\displaystyle\int_a^b \left(g(t) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right) dt < \int_a^b f(t)dt + \frac{\varepsilon}{2}$.
On peut donc supposer que $g > f$ sur $[a,b]$ et qu'elle vérifie (3.19).
Pour $\eta > 0$ et $x \in [a,b]$, on pose

$$F_\eta(x) = \int_a^x g(t)dt - F(x) + F(a) + \eta(x-a). \tag{3.20}$$

Comme $F' = f$, comme g est semi-continue inférieurement et que $g > f$, à chaque $x \in [a,b]$ correspond δ_x tel que

$$\forall t \in]x, x+\delta_x[, \quad g(t) > f(x) \quad \text{et} \quad \frac{F(t) - F(x)}{t - x} < f(x) + \eta.$$

Donc pour $t \in]x, x+\delta_x[$, on a

$$F_\eta(t) - F_\eta(x) = \int_x^t g(u)du - F(x) + F(t) + \eta(x-t) > (t-x)f(x) - (t-x)(f(x)+\eta) + \eta(t-x) = 0. \tag{3.21}$$

Comme $F_\eta(a) = 0$ et que F_η est continue, l'ensemble des points $\{x \in [a,b];\ F_\eta(x) = 0\}$ admet un plus grand élément, disons, x_+. Si $x_+ < b$, le calcul (3.21) entraîne que $F_\eta(t) > 0$ pour $t \in]x_+, b]$. On voit donc que $F_\eta(b) \geq 0$. Ceci étant vrai pour tout $\eta > 0$, (3.19) et (3.20) impliquent

$$F(b) - F(a) \leq \int_a^b g(t)dt < \int_a^b f(t)dt + \varepsilon.$$

En laissant $\varepsilon \to 0^+$, on obtient

$$F(b) - F(a) \leq \int_a^b f(t)dt.$$

En changeant f et $-f$, on obtient que F et f satisfont (3.15) en $x = b$.
La preuve du théorème 3.32 est complète. $\square$