Chapitre 4

Séries de Fourier

Ce chapitre débute la partie "Analyse Harmonique" du cours. L'analyse harmonique est l'analyse des « harmoniques » c'est-à-dire de la décomposition d'un signal en superposition de signaux élémentaires.

4.1 Séries de Fourier, convolution, polynômes trigonométriques

4.1.1 Analyse sur le tore

Soit $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$; c'est un groupe commutatif pour l'addition car il en ainsi pour $\mathbb{R}$ et que $2\pi\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$ pour l'addition. C'est aussi un espace métrique avec la distance quotient (i.e. distance modulo 2π) : $d(\overline{x}, \overline{y}) = \inf_{k\in\mathbb{Z}} |x - y - 2k\pi|$ où $\overline{x} = x + 2\pi\mathbb{Z}$. Si on considère le cercle $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \; ; \; |z| = 1\}$ alors $\mathbb{T}$ et S^1 sont homéomorphes (i.e. c'est le même espace métrique) via le passage au quotient de l'application $t \to e^{it}$ de $\mathbb{R}$ dans S^1.

Tout élément dans $\mathbb{T}$ admet donc un unique représentant dans $[0, 2\pi[$ et on peut identifier $\mathbb{T}$ avec $[0, 2\pi[$. Cependant on préfère identifier les fonctions sur $\mathbb{T}$ avec les fonctions 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$. Une fonction continue sur $\mathbb{T}$ sera donc une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. Sur $\mathbb{T}$ et S^1 on a aussi une structure différentielle (groupe de Lie). C'est simple : une fonction de classe C^k sur $\mathbb{T}$ est une fonction C^k sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique, et sa dérivée sur $\mathbb{T}$ est la dérivée sur $\mathbb{R}$ (qui est automatiquement 2π-périodique). On retiendra que, sauf mention contraire, une fonction sur $\mathbb{T}$ est une fonction 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$.

Passons à la mesure. Pour $A \subset \mathbb{R}$ regardons son image par la projection canonique, $\overline{A} = \bigcup_{x\in A} \overline{x} = A + 2\pi\mathbb{Z}$ que l'on voit à la fois comme un sous-ensemble de $\mathbb{T}$ et de $\mathbb{R}$. On a que $\overline{A}$ est borélien si et seulement si A l'est (on pourrait aussi considérer sur $\mathbb{R}$ la tribu des boréliens invariants par translation de $\pm 2\pi$). On pose pour A borélien, $\overline{A} = \lambda(\overline{A} \cap [0, 2\pi]) = \lambda(\overline{A} \cap [2k\pi, 2(k+1)\pi])$, $k \in \mathbb{Z}$, qui est donc la mesure image de $\lambda_{|[0,2\pi]}$ par la projection canonique. On définit ainsi une mesure borélienne positive sur $\mathbb{T}$ de masse totale égale à 2π. Notez que pour tout ensemble borélien $\overline{A} \subset \mathbb{T}$ on peut trouver un ensemble $B \in [0, 2\pi[$ tel que $\overline{A} = \overline{B}$. On a aussi la propriété suivante : $\lambda(\overline{A}) = \lim\limits_{(a,b)\to(-\infty,+\infty)} \dfrac{2\pi}{|b-a|} \lambda(\overline{A} \cap [a, b])$, en approchant a et b par des multiples de 2π.

On parle aussi de la mesure de Lebesgue sur S^1 pour l'image de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ par l'application $t \to e^{it}$.

Une fonction sur $\mathbb{T}$ étant vue comme une fonction périodique sur $\mathbb{R}$, on a

$$\int_{\mathbb{T}} f \, d\overline{\lambda} = \int_{[0,2\pi[} f \, d\lambda.$$

Par définition, cela a un sens lorsque f est borélienne positive ou dans $L^1(\overline{\lambda})$. Notez que comme on travaille avec la mesure de Lebesgue, intégrer sur $[0, 2\pi[$ ou sur $[0, 2\pi]$ c'est pareil. On fera donc souvent le léger abus de considérer les fonctions sur $\mathbb{T}$ comme des fonctions sur $[0,2\pi]$. Il y a une bonne raison : une fonction continue sur $[0,2\pi[$ ne s'étend pas nécessairement en une fonction 2π-périodique (et donc ne peut pas être vue comme une fonction continue sur $\mathbb{T}$; il faut qu'elle ait une limite en $(2\pi)^-$ et que cette limite soit égale à la valeur en zéro. Il y a moins de risque de se tromper si on part d'une fonction continue sur $[0,2\pi]$: à partir du moment où l'on a la condition $f(0)=f(2\pi)$, elle s'étend de manière unique en une fonction 2π-périodique continue sur $\mathbb{R}$.

Il est important de remarquer que pour toute fonction sur $\mathbb{T}$ borélienne positive ou dans $L^1(\overline{\lambda})$ on a

$$\int_{\mathbb{T}} f\,d\overline{\lambda} = \int_{[0,2\pi]} f\,d\lambda = \int_{[T,T+2\pi]} f\,d\lambda$$

quel que soit $T\in\mathbb{R}$. Cela découle à la fois de l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue et d'un découpage de l'intégrale pour se ramener à un segment de la forme $[2k\pi, 2(k+1)\pi]$.

On peut avoir un point de vue plus conceptuel sur la formule précédente, qui permet d'introduire une notion essentielle, celle de translation dans $\mathbb{T}$. Puisque qu'on a une structure de groupe (l'addition passe au quotient), on peut définir pour une fonction sur $\mathbb{T}$ la fonction $f_{\overline{y}}$ par $f_{\overline{y}}(\overline{x}) = f(\overline{x}-\overline{y})$. A quoi cela correspond-t-il avec le point de vue fonctions périodiques sur $\mathbb{R}$? En fait, on est en train de regarder simplement la fonction $x\to f_y(x) := f(x-y)$ qui est encore 2π-périodique et qui représente effectivement $f_{\overline{y}}$. La mesure de Lebesgue $\overline{\lambda}$ est invariante par translation, ce qui peut se voir par

$$\overline{\lambda}(\overline{A}+\overline{y}) = \overline{\lambda}(\overline{A}+y) = \lim_{T\to+\infty}\frac{\pi}{T}\lambda((\overline{A}+y)\cap[-T,T]) = \lim_{T\to+\infty}\frac{\pi}{T}\lambda(\overline{A}\cap[-(T-y),T-y]) = \overline{\lambda}(\overline{A})$$

Ainsi, on a $\int_{\mathbb{T}} f_{\overline{y}}\,d\overline{\lambda} = \int_{\mathbb{T}} f\,d\overline{\lambda}$, ce qui se traduit, en terme de fonctions 2π-périodique

$$\int_{[0,2\pi]} f\,d\lambda = \int_{[0,2\pi]} f_y\,d\lambda = \int_{[y,y+2\pi]} f\,d\lambda$$

ce qui redonne la formule ci-dessus.

On travaille sur un espace topologique (métrique) compact (donc localement compact !). En particulier, toutes les mesures boréliennes finies sur $\mathbb{T}$ sont régulières, ce qui est donc le cas de $\overline{\lambda}$. Par conséquent, pour $p\in[1,+\infty[$, les fonctions continues sont denses dans $L^p(\mathbb{T})$. Le même argument que celui dans $\mathbb{R}$ permet alors de dire que pour $f\in L^p(\mathbb{T})$ l'application

$$t\to f_t$$

est continue de $\mathbb{T}$ dans $L^p(\mathbb{T})$.

Enfin, un mot sur le point de vue "cercle". Sur S^1, on peut prendre la mesure image notée μ de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ par l'application $t\to e^{it}$. C'est le même espace mesuré que $(\mathbb{T},\overline{\lambda})$. La mesure μ s'appelle aussi parfois la mesure de Lebesgue sur S^1. C'est la mesure naturelle sur le cercle (elle est de masse 2π). Si à une fonction g sur le cercle on associe la fonction 2π-périodique $f(t)=g(e^{it})$ on a

$$\int_{S^1} g\,d\mu = \int_{\mathbb{T}} f\,d\lambda = \int_0^{2\pi} g(e^{it})\,dt.$$

Mais $(S^1,\times)$ étant maintenant un groupe (abélien) multiplicatif, l'opération de translation correspondant à $z\to z_0\,z$ sur le cercle. Pour $g:S^1\to\mathbb{C}$ on définit $g_{z_0}(z)=g(z_0\,z)$ et $\int g\,d\mu = \int g_{z_0}\,d\mu$.

Retenons pour la suite.

— On notera simplement λ ou "dx" la mesure de Lesbesgue sur $\mathbb{T}$; c'est une mesure borélienne finie sur $\mathbb{T}$, et $L^p(\mathbb{T},\lambda)$ s'identifie à $L^p([0,2\pi[,\lambda)$ ou mieux à $L^p([0,2\pi],\lambda)$. En fait, dans la suite on normalisera la mesure pour avoir une probabilité que l'on notera σ pour éviter les confusion.

$$\sigma = \frac{1}{2\pi}\overline{\lambda} = \frac{1}{2\pi}\lambda_{|[T,T+2\pi]} = \frac{1}{2\pi}dx_{|[T,T+2\pi]}.$$

— On identifiera systématiquement (sauf mention explicite contraire) une fonction sur $\mathbb{T}$ à une fonction 2π-périodique, et aussi à une fonction sur $[0, 2\pi]$, avec $f(0) = f(2\pi)$ si besoin (pour les fonctions continues par exemple). Les fonctions intégrables sur $\mathbb{T}$ sont les fonctions boréliennes 2π-pérdiodiques telles que

$$\int_{\mathbb{T}} |f|\, d\lambda = \int_{[0,2\pi]} |f|\, d\lambda < +\infty$$

— Pour toute fonction périodique positive ou intégrables sur $\mathbb{T}$ on a

$$\int_{\mathbb{T}} f\, d\lambda = \int_{\mathbb{T}} f_y\, d\lambda = \int_{[y,y+2\pi]} f\, d\lambda \tag{4.1}$$

pour $y \in \mathbb{R}$.

4.1.2 Coefficients de Fourier

Soit donc $L^1(\mathbb{T})$ l'ensemble des fonctions à valeurs complexes Lebesgue intégrables sur $\mathbb{T}$. On le munit de

$$\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)| dt$$

qui est une norme sur $L^1(\mathbb{T})$. On sait que $(L^1(\mathbb{T}), \|\cdot\|_1)$ est un espace de Banach.
Pour $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $n \in \mathbb{Z}$, on définit le n-ième coefficient de Fourier de f par

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-int} dt. \tag{4.2}$$

On a

Proposition 4.1. *Soient f et g dans $L^1(\mathbb{T})$. Alors, pour $n \in \mathbb{Z}$, on a*
- $\widehat{f+g}(n) = \hat{f}(n) + \hat{g}(n)$;
- *si* $\alpha \in \mathbb{C}$, $\widehat{\alpha f}(n) = \alpha \hat{f}(n)$;
- *si* $\overline{f}$ *est la conjuguée complexe de* f, $\hat{\overline{f}}(n) = \overline{\hat{f}(-n)}$;
- *pour* $\tau \in \mathbb{T}$, *si on définit* $f_\tau(t) = f(t - \tau)$ *alors* $\hat{f}_\tau(n) = \hat{f}(n)\, e^{-in\tau}$;
- $|\hat{f}(n)| \leq \|f\|_1$.

Corollaire 4.2. *Soit $(f_j)_{j\geq 0}$, $f_j \in L^1(\mathbb{T})$ telle que $\|f_j - f_0\|_1 \underset{j\to+\infty}{\to} 0$ alors $\hat{f}_j(n) \underset{j\to+\infty}{\to} \hat{f}_0(n)$ uniformément en n.*

On a aussi l'observation utile suivante :

Proposition 4.3. *Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ telle que $\hat{f}(0) = 0$. Définissons $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(\tau) d\tau$.*

Alors F est absolument continue, 2π-périodique et $\hat{F}(n) = \dfrac{1}{in} \hat{f}(n)$ pour $n \neq 0$.

Démonstration. L'absolue continuité suit de la proposition 3.25. On calcule

$$F(t + 2\pi) - F(t) = \int_t^{t+2\pi} f(\tau) d\tau = 2\pi \hat{f}(0) = 0.$$

Enfin, en utilisant le théorème de Fubini, si $n \neq 0$, on calcule

$$\begin{aligned}\hat{F}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} f(\tau) \mathbf{1}_{[0,t]}(\tau) d\tau \right) e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) \left(\int_0^{2\pi} \mathbf{1}_{[\tau,2\pi]}(t) e^{-int} dt \right) d\tau = \frac{1}{2i\pi\, n} \int_0^{2\pi} f(\tau) \left(e^{-in\tau} - 1 \right) d\tau = \frac{1}{in} \hat{f}(n).\end{aligned}$$

□

4.1.3 Convolution sur $L^1(T)$

On va utiliser la structure de groupe de $\mathbb{T}$. Si f et g intégrables sur $\mathbb{T}$ alors pour presque tout $t \in \mathbb{T}$, la fonction $\tau \mapsto f(t-\tau)g(\tau)$ est intégrable sur $\mathbb{T}$. En effet, posons $h(t) := \int_{\mathbb{T}} |f|(t-\tau)|g|(\tau)\,d\tau \geq 0$. La fonction $(t,\tau) \in \mathbb{T}^2 \mapsto f(t-\tau)g(\tau)$ est intégrable sur $\mathbb{T}^2$ car mesurable et, par le théorème de Fubini-Tonelli et (4.1),

$$\begin{aligned}\int_\tau h = \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} |f(t-\tau)g(\tau)| d\tau \right) dt = \int_{\mathbb{T}^2} |f(t-\tau)g(\tau)| dt\, d\tau \\ = \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} |f(t-\tau)| dt \right) |g(\tau)| d\tau = 2\pi \int_{\mathbb{T}} \|f\|_1 |g(\tau)| d\tau = (2\pi)^2 \|f\|_1 \, \|g\|_1 < +\infty.\end{aligned}$$

et cela implique que $h < +\infty$ presque partout, comme annoncé. On peut donc *définir* pour presque tout $t \in \mathbb{T}$ par

$$(f * g)(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

La fonction $f * g$ s'appelle la convolée de f et g. Pour se souvenir de la normalisation, on peut noter que

$$(f \equiv 1 \text{ et } g \equiv 1) \Longrightarrow f * g \equiv 1.$$

On observe que le calcul précédent nous dit aussi que $f * g \in L^1(\mathbb{T})$, avec

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \, \|g\|_1.$$

$$\|f * g\|_1 = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}} \left| \int_{\mathbb{T}} f(t-\tau)g(\tau)d\tau \right| dt \leq \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} |f(t-\tau)g(\tau)| d\tau \right) dt.$$

Théorème 4.4. *Si f et g intégrables sur $\mathbb{T}$ alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$*

$$\widehat{f * g}(n) = \hat{f}(n)\, \hat{g}(n).$$

Démonstration. L'égalité sur les coefficients de Fourier est obtenue comme suit en utilisant le théorème de Fubini, puisque $(t,x) \to f(t-x)g(x)e^{int}$ est intégrable sur $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$ (par Fubini-Tonelli) :

$$\begin{aligned}\widehat{f * g}(n) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} f(t-\tau)g(\tau)d\tau \right) e^{-int} dt \\ = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} f(t-\tau)e^{-in(t-\tau)} dt \right) g(\tau)e^{-in\tau} d\tau = \hat{f}(n)\, \hat{g}(n).\end{aligned}$$

□

Proposition 4.5. *$L^1(\mathbb{T})$ muni de l'addition et de la convolution est une algèbre commutative (i.e. la loi $*$ est interne, commutative, associative et distributive).*

La preuve est laissée en exercice.

4.1.4 Séries trigonométriques

Définition 4.6. On appelle *série trigonométrique* une expression de la forme $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{int}$ où $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une suite à valeurs complexes. Les $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ sont appelés coefficients de la série.

La *série trigonométrique conjuguée* de la série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{int}$ est par définition la série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbb{Z}} -i\mathrm{sgn}(n) a_n e^{int}$.

Une série trigonométrique est un *polynôme trigonométrique* si au plus un nombre fini de ses coefficients sont non nuls. Son degré est alors le maximum des valeurs absolues des indices des coefficients non nuls (dans ce cas la somme est définie et c'est une fonction C^∞ sur $\mathbb{T}$).

Ainsi un P est un polynôme trigonométrique de degré N si

$$P(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{int} \tag{4.3}$$

avec $a_{-N}, \ldots, a_0, a_1, \ldots a_N \in \mathbb{C}$ et de plus $a_N \neq 0$ ou $a_{-N} \neq 0$.

Notons $\mathcal{P}_N$ l'ensemble des polynôme trigonométriques de degré au plus $N \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynôme trigonométrique. On a

$$\mathcal{P}_N = \mathrm{vect}(\{t \to e^{int}\ ;\ -N \leq n \leq N\}) \quad \text{et} \quad \mathcal{P} = \mathrm{vect}(\{t \to e^{int}\ ;\ n \in \mathbb{Z}\}) \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T}).$$

Remarquons que si P est un polynôme trigonométrique, que l'on écrit sous la forme (4.3), alors

$$\hat{P}(n) = a_n \text{ pour } |n| \leq N \text{ et } \hat{P}(n) = 0 \text{ pour } |n| > N,$$

soit encore

$$P = \sum \hat{P}(n) e^{int}.$$

En particulier, si $P, Q \in \mathcal{P}$ avec $P = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{int}$ et $Q = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n e^{int}$; alors $P = Q$ si et seulement si $a_n = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ (ce qui est est une manière de dire que la famille des fonctions $t \to e^{nit}$ est libre). Ces propriétés sont aussi, plus conceptuellement, des conséquences immédiates du fait que les fonctions $t \to e^{nit}$ forment une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$.

On verra plus loin une réciproque : si une fonction $L^1(\mathbb{T})$ a tous ses coefficients nuls à partir d'un certain rang (en valeur absolue) alors la fonction est un polynôme trigonométrique. Cela permet d'avoir le bon point de vue (par le Théorème 4.4) à la propriété suivante, qui s'obtient par ailleurs aussi de manière directe :

$$(f \in L^1(\mathbb{T}) \text{ et } P \in \mathcal{P}_N) \implies f * P \in \mathcal{P}_N.$$

En effet, si $P \in \mathcal{P}$

$$f * P(t) = \frac{1}{2\pi} \sum \hat{P}(n) e^{int} \int e^{-in\tau} f(\tau)\, d\tau = \sum \hat{P}(n) \hat{f}(n) e^{int} \in \mathcal{P}.$$

On en déduit en particulier que l'ensemble des polynôme trigonométriques est un sous-espace vectoriel $L^1(\mathbb{T})$ stable par la convolution et qu'à ce titre, il constitue une sous-algèbre commutative de $(L^1(\mathbb{T}), +, \cdot, *)$.

À une fonction f intégrable sur $\mathbb{T}$ on associe naturellement (et formellement) sa série de Fourier, la série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{int}$, c'est-à-dire la suite (indéxée par $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$) de fonctions $\Big(\sum_{n=-N}^{M} \hat{f}(n) e^{int}\Big)_{N,M\geq 0}$.

C'est une opération abstraite : on ne regarde pas la convergence (pour cette dernière, on regardera d'ailleurs plutôt les sommes symétriques.

On va maintenant étudier les relations entre f et sa série de Fourier.

4.2 Convergence des séries trigonométriques

Définition 4.7 ((Approximation de l'identité))**.** Soit $(k_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions intégrables sur $\mathbb{T}$. Cette suite est appelée *approximation de l'identité* si elle satisfait

1. $\forall n \geq 0,\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{T}} k_n(t)dt = 1,$
2. $\sup\limits_{n\geq 0} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{T}} |k_n(t)|dt < +\infty,$
3. $\forall \delta > 0,\ \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_{\delta}^{2\pi-\delta} |k_n(t)|dt = 0.$
   (On a une suite de segments I_k avec $\cup I_k = \mathbb{T}\setminus\{0\}$ et $k_n \to 0$ dans $L^1(I_k)$.)

On remarquera que nécessairement $\max\limits_{\mathbb{T}} |k_n| \to +\infty$ (car sinon $\int_{\mathbb{T}} |k_n \to 0$, en découpant l'intégrale par exemple) ; en général k_n sera continue (et même C^∞) et son max sera atteint en 0. Notez que dans le cas (principal) où k_n est à valeurs positives, le point 1 implique trivialement le 2.

Le point $0 \in \mathbb{T}$ jouant un rôle particulier ici, il sera souvent plus sympathique de travailler sur $[-\pi,\pi]$ plutôt que sur $[0, 2\pi]$.

On aura souvent une condition plus forte que le point 3) à savoir

3') Pour $\delta \in]0,\pi[$, $\sup\limits_{\mathbb{T}\setminus]-\delta,\delta[} |k_n| \to 0$.

On aura aussi parfois des familles indexées par un paramètre continu, comme les noyau de Poisson $(P_r)_{r\in[0,1[}$ pour lesquels la convergence se regarde quand $r \to 1$ (si on y tient, on peut dire qu'on prend une suite quelconque r_n qui tend vers 1^- et on regarde $(P_{r_n})_n$).

Théorème 4.8. *Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $(k_n)_{n\geq 0}$ une approximation de l'identité. Alors $\|f - k_n * f\|_1 \to 0$ quand $n \to +\infty$.*

Démonstration. Supposons $\|f\|_1 \neq 0$ sinon il n'y a rien à faire. On calcule

$$
\begin{aligned}
(2\pi)^2\|f - k_n * f\|_1 &= \int_{\mathbb{T}} \left| \int_{\mathbb{T}} (f(t) - f(t-\tau))k_n(\tau)d\tau \right| dt \\
&\leq \int_{\mathbb{T}} |k_n(t)|dt \cdot \sup_{[0,\delta]\cup[2\pi-\delta,2\pi]} \|f - f_\tau\|_1 + 2\|f\|_1 \int_{\delta}^{2\pi-\delta} |k_n(t)|dt.
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

Par le corollaire 1.32 (comme rappelé en introduction ci-dessus) l'application $\tau \mapsto \|f - f_\tau\|_1$ est continue en 0 et en 2π (par périodicité de f).
Pour $\varepsilon > 0$, il existe donc $\delta > 0$ tel que $\sup\limits_{[0,\delta]\cup[2\pi-\delta,2\pi]} \|f - f_\tau\|_1 < \dfrac{\varepsilon}{2\sup_{n\geq 0}\int_{\mathbb{T}} |k_n(t)|dt}$ et pour cette valeur de δ il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$ on ait $\displaystyle\int_{\delta}^{2\pi-\delta} |k_n(t)|dt < \frac{\varepsilon}{4\|f\|_1}$.
Ainsi, par (4.4), pour $n \geq n_0$, on a $\|f - k_n * f\|_1 < \varepsilon$. □

Noyeaux de Dirichlet et de Fejér

On définit le *noyau de Dirichlet* par

$$D_n(t) := \sum_{j=-n}^{n} e^{ijt} = \frac{\sin((2n+1/2)t)}{\sin(t/2)}$$

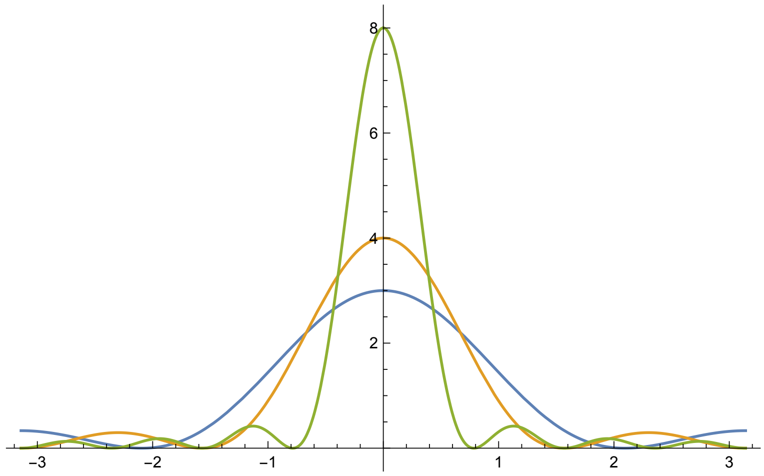

FIGURE 4.1 – Les noyaux de Fejér $K_2,\ K_3$ et K_7.

On notera que $(D_n)_{n\geq 0}$ n'est pas une approximation de l'identité : si la condition 1 de la définition est vérifiée, 2 et 3 ne le sont pas.

Considérons la somme de Fourier partielle d'ordre n de f dans $L^1(\mathbb{T})$:

$$S_n(f)(t) := \sum_{j=-n}^{n} \hat{f}(j)e^{ijt} = D_n * f(t). \tag{4.5}$$

La question de la convergence de cette suite de fonction est difficille. Celle de sa convergence en moyenne (de Césaro) est plus simple.

On définit donc le *noyau de Fejér* par

$$\begin{aligned} F_n(t) &:= \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} D_j(t) \\ &= \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin((n+1)t/2)}{\sin(t/2)}\right)^2 \\ &= \sum_{j=-n}^{n}\left(1-\frac{|j|}{n+1}\right)e^{ijt} \end{aligned} \tag{4.6}$$

La vérification de ces égalités est laissée au lecteur.

On a donc pour $f \in L^1(\mathbb{T})$:

$$F_n * f(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} S_j(f)(t) = \sum_{j=-n}^{n}\left(1-\frac{|j|}{n+1}\right)\hat{f}(j)e^{ijt}. \tag{4.7}$$

Lemme 4.9. *La suite $(F_n)_{n\geq 0}$ est une approximation de l'identité.*

Le lemme se vérifie aisément. On en déduit que pour $f \in L^1(\mathbb{T})$,

$$F_n * f \to f \quad \text{dans } (L^1(\mathbb{T}), \|\cdot\|_1).$$

Cela montre en particulier que les polynômes trigonométriques sont denses dans $(L^1(\mathbb{T}), \|\cdot\|_1)$.

Théorème 4.10 (Théorème d'unicité)**.** *Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ et que $\hat{f}(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, alors $f = 0$.*

Soit encore, pour $f, g \in L^1(\mathbb{T})$:

$$f = g \Longleftrightarrow \hat{f}(n) = \hat{g}(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Démonstration. Par (4.7), si $f \in L^1(\mathbb{T})$ et que $\hat{f}(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, alors $F_n * f = 0$. Donc $f = 0$ par le théorème 4.8. □

On obtient donc en particulier que s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\hat{f}(n) = 0$ pour $n > |N|$, alors $f \in \mathcal{P}_N$. En fait, on peut énoncer une propriété plus générale :

Corollaire 4.11. *Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ tel que $\hat{f} \in \ell_1(\mathbb{Z})$. Alors la série de fonctions (périodiques) $\sum \hat{f}(n)e^{int}$ converge normalement sur $\mathbb{T}$ et sa somme est donc une fonction continue (donc intégrable) sur $\mathbb{T}$ qui vérifie*

$$F(t) = f(t) \qquad \textit{presque partout},$$

i.e. pour presque tout $t \in \mathbb{T}$ on a $f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{int}$.

Il n'est bien sûr pas possible d'avoir mieux qu'une égalité presque partout, puisque $\hat{f}$ ne change pas si on modifie f sur un ensemble de mesure nulle.

Si on sait que f est continue (et en particulier si f est un polynôme trigonométrique), l'égalité a donc lieu partout (pourquoi ?).

Démonstration. L'argument explicité dans l'énoncé nous dit que la somme de la série normalement convergente $F(t) := \sum \hat{f}(n)e^{int}$ est une fonction continue. Par convergence de $\sum |f(n)|$ et le fait qu'on travaille avec une mesure finie, on peut permuter somme et intégrale et on trouve $\hat{F}(n) = \hat{f}(n)$ pour tout n. On a donc $F = f$... dans $L^1(\mathbb{T})$. □

Théorème 4.12 (Lemme de Riemann-Lebesgue)**.** *Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. Alors $\hat{f}(n) \underset{|n|\to+\infty}{\to} 0$.*

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}$, On a

$$|\hat{f}(n)| \leq |\widehat{F_m * f}(n)| + |\widehat{F_m * f}(n) - \hat{f}(n)| \leq |\widehat{F_m * f}(n)| + \|F_m * f - f\|_1. \tag{4.8}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Fixons m tel que $\|F_m * f - f\|_1 < \varepsilon$. Or $F_m * f|$ est un polynôme trigonométrique de degré au plus m par (4.7), donc si $|n| > m$, on a $|\widehat{F_m * f}(n)| = 0$. Ainsi $|\hat{f}(n)| < \varepsilon$. □

Soit $K \subset L^1(\mathbb{T})$ compact. Alors, pour $\varepsilon > 0$, il existe $P_1, \cdots, P_N$ polynômes trigonométriques tel que $\forall f \in K$, $\exists j$, $1 \leq j \leq N$ tel que $\|f - P_j|_1 \leq \varepsilon$. Si n est supérieur au $\max_{1\leq j\leq N}(\deg P_j)$, on a $\sup\limits_{f\in K} |\hat{f}(n)| \leq \varepsilon$. On a donc démontré le

Lemme 4.13 (Lemme de Riemann-Lebesgue uniforme)**.** *Soit $K \subset L^1(\mathbb{T})$ compact. Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{f\in K} |\hat{f}(n)| = 0. \tag{4.9}$$

Si dans ce chapitre on étudie principalement le noyau de Féjer, il faut signaler qu'il y a d'autres approximation de l'identité intéressantes. Par exemple, on a le le *noyau de de la Vallée Poussin* :

$$V_n(t) = 2F_{2n+1}(t) - F_n(t). \tag{4.10}$$

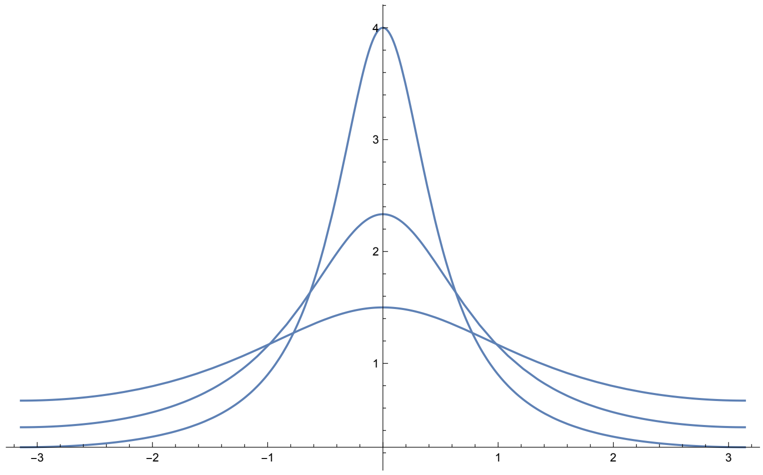

FIGURE 4.2 – Les noyaux de Poisson $P_{1/5}$, $P_{2/5}$ et $P_{3/5}$.

Pour la suite du cours, le *noyau de Poisson* sera de première importance. Pour $0 \leq r < 1$ on introduit pour $t \in \mathbb{T}$,

$$P_r(t) := P(r,t) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|}e^{ikt} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2} = \mathrm{Re}\left(\frac{1+re^{it}}{1-re^{it}}\right) > 0. \tag{4.11}$$

Notez que pour $0 \leq r < 1$ fixé, la série est normalement (donc uniformément donc simplement absolument) convergente sur $\mathbb{T}$ et que la somme est (donc !) bien une fonction continue (et même C^∞) sur $\mathbb{T}$. La famille $(P_r)_{r\in[0,1]}$ est alors une approximation de l'identité (sur $\mathbb{T}$) lorsque $r \to 1^-$: si $(r_n)_{n\geq 0}$ est une suite à termes positifs tendant vers 1, alors $(P(r_n,t))_{n\geq 0}$ est une approximation de l'identité. Il est plus sympathique d'étudier P_r sur $[-\pi,\pi]$ plutôt que $[0,2\pi]$, car c'est une fonction 2π-périodique paire.

Notez que pour $f \in L^1(\mathbb{T})$

$$\forall t \in \mathbb{T} \qquad P(r,\cdot) * f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|}\hat{f}(k)e^{ikt}.$$

Attention, on ne sait rien de la convergence de la série de Fourier de $\sum \hat{f}(k)epikt$, quand bien même on va pouvoir dire des choses sur la limite de $P(r,\cdot) * f$ lorsque $r \to 1^-$.

Dans certains cas, les raisonnements fait sur L^1 passent à des des espaces de Banach plus généraux, ce qui va se révéler être très utile.

Définition 4.14. Un *espace de Banach homogène sur* $\mathbb{T}$ est un sous-espace vectoriel $\mathcal{B}$ de $L^1(\mathbb{T})$ muni d'une norme $\|\cdot\|_{\mathcal{B}} \geq \|\cdot\|_1$ qui en fait un espace de Banach et tel que

1. si $f \in \mathcal{B}$ et $\tau \in \mathbb{T}$ alors $f_\tau \in \mathcal{B}$ et $\|f_\tau\|_{\mathcal{B}} = \|f\|_{\mathcal{B}}$;
2. pour $f \in \mathcal{B}$, $\lim_{t\to 0} \|f_t - f\|_{\mathcal{B}} = 0$.

Remarque 4.15 (Intégration d'une fonction continue à valeurs dans un espace de Banach)**.** *Grâce à la condition 1, la condition 2 implique* $\lim_{t\to\tau} \|f_t - f_\tau\|_{\mathcal{B}} = 0$ *pour* $\tau \in \mathbb{T}$. *Ainsi l'application* $\tau \in \mathbb{T} \mapsto f_\tau \in \mathcal{B}$ *est continue.*

Exemples d'espaces de Banach homogènes :

1. $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, l'espace des fonction continues sur $\mathbb{T}$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$;
2. $\mathcal{C}^n(\mathbb{T})$, l'espace des fonction n fois continûment différentiables sur $\mathbb{T}$ muni de sa norme naturelle ;
3. $L^p(\mathbb{T})$ muni de sa norme naturelle pour $1 \leq p < +\infty$.

Notez que $L^\infty(\mathbb{T})$ n'est pas un espace de Banach homogène.

Proposition 4.16. *Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach homogène sur $\mathbb{T}$. Soient $g \in L^1(\mathbb{T})$ et $f \in \mathcal{B}$. Alors $f * g \in \mathcal{B}$ et $\|f * g\|_\mathcal{B} \leq \|g\|_1 \|f\|_\mathcal{B}$.*

Démonstration. On peut supposer que $\|f\|_\mathcal{B} \neq 0$ sinon il n'y a rien à faire. Le résultat de la proposition découle du cas quand g est la fonction indicatrice d'un intervalle, disons, $g = \mathbf{1}_{[a,b]}$. Notons que

$$\mathbf{1}_{[a,b]} * f(t) = \int_{[a,b]} = f(t-\tau)d\tau = \int_{[-b+t,-a+t]} f.$$

Lemme 4.17. *Pour $[a,b] \in [0, 2\pi[$ et $f \in \mathcal{B}$ on a $\mathbf{1}_{[a,b]} * f \in \mathcal{B}$ avec $\|\mathbf{1}_{[a,b]} * f\|_\mathcal{B} \leq |b-a| \|f\|_\mathcal{B}$.*

Supposons le lemme 4.17 prouvé et démontrons la proposition 4.16. Pour $g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, on commence par montrer établir la décomposition dyadique suivante :

$$f * g(t) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} g\left(2\pi k 2^{-n}\right) \int_{\pi k 2^{-n+1}}^{\pi(k+1)2^{-n+1}} f(t-\tau)d\tau. \tag{4.12}$$

L'expression ci-dessus converge ponctuellement (par convergence dominée) mais aussi dans L^1 (et dans $\mathcal{B}$) ; en effet, pour $m > n$, on calcule

$$\begin{aligned}
&\left\| \sum_{k=0}^{2^m-1} g\left(2\pi k 2^{-m}\right) \int_{\pi k 2^{-m+1}}^{\pi(k+1)2^{-m+1}} f(t-\tau)d\tau - \sum_{k=0}^{2^n-1} g\left(2\pi k 2^{-n}\right) \int_{\pi k 2^{-n+1}}^{\pi(k+1)2^{-n+1}} f(t-\tau)d\tau \right\|_\mathcal{B} \\
&= \left\| \sum_{k=0}^{2^n-1} \sum_{j=0}^{2^{m-n}-1} \left[g\left(2\pi k 2^{-n}\right) - g\left(2\pi(k2^{-n} + j2^{-m})\right) \right] \int_{2\pi(k2^{-n}+j2^{-m})}^{2\pi(k2^{-n}+(j+1)2^{-m})} f(t-\tau)d\tau \right\|_\mathcal{B} \\
&\leq \sum_{k=0}^{2^n-1} \sum_{j=0}^{2^{m-n}-1} 2^{-m} \|f\|_\mathcal{B} \sup_{0 \leq \tau \leq 2^{-n}} \|g - g_\tau\|_\infty = \|f\|_\mathcal{B} \sup_{0 \leq \tau \leq 2^{-n}} \|g - g_\tau\|_\infty
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé le lemme 4.17 dans la dernière estimation.
Ainsi, la suite $\left(\sum_{k=0}^{2^n-1} g\left(2\pi k 2^{-n}\right) \int_{\pi k 2^{-n+1}}^{\pi(k+1)2^{-n+1}} f(t-\tau)d\tau. \right)_{n \geq 1}$ est de Cauchy dans $\mathcal{B}$, donc converge dans $\mathcal{B}$ vers la même limite que dans L^1. On a donc (4.12). D'autre part, comme ci-dessus, on estime

$$\left\| \sum_{k=0}^{2^m-1} g\left(2\pi k 2^{-m}\right) \int_{\pi k 2^{-m+1}}^{\pi(k+1)2^{-m+1}} f(t-\tau)d\tau \right\|_\mathcal{B} \leq 2^{-n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \left| g\left(2\pi k 2^{-n}\right) \right| \|f\|_\mathcal{B}$$

Or comme g est continue, par convergence des sommes de Riemann, le membre de droite de l'inégalité ci-dessus converge vers $\|g\|_{L^1} \|f\|_\mathcal{B}$. On obtient donc que, pour g continue, $f * g \in \mathcal{B}$ et $\|f * g\|_\mathcal{B} \leq \|g\|_1 \|f\|_\mathcal{B}$. Pour finir la preuve de la proposition 4.16, il suffit d'approcher alors les fonctions intégrables par des fonctions continues. $\square$

Preuve du lemme 4.17. Comme on a l'égalité $\int_a^b f(t-\tau)d\tau = \int_0^{b-a} f(t-\tau-a)d\tau = \int_0^{b-a} f_a(t-\tau)d\tau$, il suffit d'étudier $I_a(f)(t) := \int_0^a f(t-\tau)d\tau$.

Rappelons que, pour $f \in \mathcal{B}$, on a $\sup_{\tau' \in \mathbb{T}} \|f_{\tau'} - f_{\tau'+\tau}\|_{\mathcal{B}} = \|f - f_\tau\|_{\mathcal{B}} \underset{\tau \to 0}{\to} 0$. Donc, pour tout $n \geq 1$, il existe $j_n \geq 1$ tel que $\sup_{|\tau| \leq 2^{-j_n}} \|f - f_\tau\|_{\mathcal{B}} \leq 2^{-n}\|f\|_{\mathcal{B}}$. On peut prendre la suite $(j_n)_n$ strictement croissante.

On va encore utiliser une décomposition dyadique ; on définit la fonction $S_n f := 2^{-j_n} \sum_{0 \leq k \leq a2^{j_n}} f_{k2^{-j_n}}$. Elle est dans $\mathcal{B}$ comme combinaison linéaire de fonctions de $\mathcal{B}$. De plus, on calcule

$$\|S_n f\|_{\mathcal{B}} \leq 2^{-j_n} \sum_{0 \leq k \leq a2^{j_n}} \|f_{k2^{-j_n}}\|_{\mathcal{B}} \leq a2^{j_n}2^{-j_n}\|f\|_{\mathcal{B}} = a\|f\|_{\mathcal{B}}. \tag{4.13}$$

D'autre part, on calcule

$$\begin{aligned}
\|S_n f - S_{n+1} f\|_{\mathcal{B}} &= \left\| 2^{-j_{n+1}} \sum_{0 \leq k \leq a2^{j_n}} \sum_{0 \leq l \leq 2^{j_{n+1}-j_n}} f_{k2^{-j_n}} - f_{k2^{-j_n}+l2^{-j_{n+1}}} \right\|_{\mathcal{B}} \\
&\leq 2^{-j_{n+1}} \sum_{\substack{0 \leq k \leq a2^{j_n} \\ 0 \leq l \leq 2^{j_{n+1}-j_n}}} \left\| f_{k2^{-j_n}} - f_{k2^{-j_n}+l2^{-j_{n+1}}} \right\|_{\mathcal{B}} = 2^{-j_{n+1}} \sum_{\substack{0 \leq k \leq a2^{j_n} \\ 0 \leq l \leq 2^{j_{n+1}-j_n}}} \left\| f_- f_{l2^{-j_{n+1}}} \right\|_{\mathcal{B}} \leq 2^{-n} \\
&\leq 2^{-j_{n+1}} a2^{j_n}2^{j_{n+1}-j_n}2^{-n}\|f\|_{\mathcal{B}} = a2^{-n}\|f\|_{\mathcal{B}}.
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la propriété définissant j_n dans la dernière majoration.
On en déduit que $S_n f = S_1 f + \sum_{1 \leq k \leq n-1} S_{k+1} f - S_k f$ converge dans $\mathcal{B}$ (qui est un espace de Banach) vers une limite notée Sf. Par (4.13), on sait que $\|Sf\|_{\mathcal{B}} \leq a\|f\|_{\mathcal{B}}$. Comme L^1 est un Banach homogène, on sait que Sf est dans L^1 et que $\|Sf\|_{L^1} \leq a\|f\|_{L^1}$. Quand f est une fonction continue, l'approximation de l'intégrale par des sommes de Riemann nous dit que $Sf(t) = \int_0^a f(t-\tau)d\tau$. Comme S est bornée sur L^1 et que les fonctions continues y sont denses, ceci reste vrai pour f dans L^1 donc dans $\mathcal{B}$. Ceci achève la preuve du lemme 4.17. □

On en déduit

Théorème 4.18. *Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach homogène et $(k_n)_{n \geq 0}$ une approximation de l'identité. Alors pour $f \in \mathcal{B}$, on a $\|k_n * f - f\|_{\mathcal{B}} \underset{n \to +\infty}{\to} 0$.*

Démonstration. Supposons $\|f\|_{\mathcal{B}} \neq 0$ sinon il n'y a rien à faire. On calcule

$$\begin{aligned}
\|f - k_n * f\|_{\mathcal{B}} &= \left\| \int_{\mathbb{T}} (f(\cdot) - f(\cdot - \tau))k_n(\tau)d\tau \right\|_{\mathcal{B}} \\
&\leq \int_{\mathbb{T}} \|f - f_\tau\|_{\mathcal{B}} \, |k_n(\tau)| d\tau \\
&\leq \int_{\mathbb{T}} |k_n(t)|dt \cdot \sup_{[0,\delta] \cup [2\pi-\delta, 2\pi]} \|f - f_\tau\|_{\mathcal{B}} + 2\|f\|_{\mathcal{B}} \int_\delta^{2\pi-\delta} |k_n(t)|dt.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Mutatis mutandis, on conclut comme dans la preuve du théorème 4.8. □

,

Corollaire 4.19. *Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach homogène contenant les polynômes trigonométriques. Alors l'espace des polynômes trigonométriques dans $\mathcal{B}$ est dense dans $\mathcal{B}$.*

Corollaire 4.20 (Le théorème d'approximation de Weierstrass)**.** *Toute fonction continue 2π-périodique est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques.*

Convergence ponctuelle de $F_n * f$ et $P_r * f$

Théorème 4.21 (Théorème de Fejér)**.** *Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $t_0 \in \mathbb{T}$.*

1. *Si $\lim_{h\to 0} f(t_0+h)+f(t_0-h) =: 2f_0$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ (condition de Fejér) alors $\lim_{n\to+\infty}(F_n * f)(t_0) = f_0$.*
2. *Si f est continue en tout point d'un intervalle compact I, $F_n * f$ converge uniformément vers f sur I.*
3. *Si $f \geq 0$ presque partout alors $F_n * f \geq 0$ presque partout pour tout n.*

Remarque 4.22. *Clairement le point (3) reste vrai si 0 est remplacé par un réel arbitraire ou si l'inégalité $\geq$ est remplacée par $\leq$. Ceci suit de la positivité de F_n et de l'égalité 1. de la définition 4.7.*

Démonstration. On suppose que la limite $\lim_{h\to 0} f(t_0+h)+f(t_0-h) =: 2f_0$ existe et est finie. Le cas quand elle est infinie se traite de la même manière.
Soit $\delta > 0$. On calcule

$$\begin{aligned} F_n * f(t_0) - f_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} F_n(\tau)(f(t_0-\tau)-f_0)d\tau = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{2\pi-\delta}\right) F_n(\tau)(f(t_0-\tau)-f_0)d\tau \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\right) F_n(\tau)\left(\frac{f(t_0-\tau)+f(t_0+\tau)}{2} - f_0\right)d\tau \end{aligned} \tag{4.15}$$

Pour obtenir la dernière égalité on a utilisé la parité de F_n.
Pour $\varepsilon > 0$ fixé on choisi

— $\delta > 0$ tel que, si $|h| \leq \delta$ alors $|f(t_0+h)+f(t_0-h)-2f_0| \leq \varepsilon$,

— puis $n_0 > 0$ tel que pour $n \geq n_0$, $\sup_{t\in[\delta,2\pi-\delta]} |F_n(t)|dt \leq \varepsilon$.

Par (4.15), pour $n \geq n_0$, on a $|F_n * f(t_0) - f_0| \leq \varepsilon + \varepsilon\|f - f_0\|_{L^1(\mathbb{T})}$. Ceci achève la preuve du point 1.
Le point 2. est une conséquence immédiate du calcul précédent et de l'uniforme continuité de f sur I.
Enfin le point 3. est une conséquence immédiate de la positivité de F_n. $\square$

Remarque 4.23. *Dans la preuve du Théorème de Fejér, on a utilisé que l'approximation de l'identité $(F_n)_{n\geq 0}$ était positive (i.e. pour tout n, la fonction F_n est à valeurs positives), paire et qu'elle vérifie : $\forall \delta > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \sup_{t\in[\delta,2\pi-\delta]} |F_n(t)|dt = 0$ (ce qui est plus fort que point 3. de la définition 4.7).*

Ces conditions sont néanmoins vérifiées par le noyau de Poisson. On vérifie donc que la conclusion du Théorème de Fejér, sont aussi vraie pour $P_r * f$ lorsque $r \to 1$.

Corollaire 4.24. *Si f est continue en t_0 et si la série de Fourier de f converge en ce point alors sa somme est $f(t_0)$.*

On peut affaiblir la condition de Fejér que la limite $\lim_{h\to 0} f(t_0+h)+f(t_0-h) =: 2f_0$ existe de deux manières différentes.

D'abord, si on prend $f_0 = f(x_0)$ il suffit d'avoir que $\frac{1}{h}\int_{-h}^{h}|f(x_0+h)-f(x_0)| \to 0$, i.e. qu'on soit en un point de Lebesgue de f.

En fait, on a un résultat assez général dès qu'on a une approximation "sympathique".

Définition 4.25 (Approximations régulières)**.** On dira qu'une approximation de l'identité (k_n) sur $\mathbb{T}$ est *régulière* s'il existe une suite de fonctions $K_n : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ au dessus de k_n, i.e. pour tout n

$$0 \leq |k_n| \leq K_n \quad \text{sur } \mathbb{T},$$

vérifiant les conditions suivantes :

— pour tout n la fonction K_n est positive, paire et <u>décroissante</u> sur $[0,\pi]$;

— $\sup_n \int_{\mathbb{T}} K_n < +\infty$;

— pour $\delta \in]0,\pi]$, $\lim_{n\to\infty} \max_{x\notin[-\delta,\delta]} K_n(x) = 0$ (ce qui équivaut simplement à $K_n(t) \to 0$ pour $t \neq 0$, par la monotonie de K_n).

Ces points sont trivialement vérifiés par P_r avec $K_r = P_r$ (ou plutôt pour $(P_{r_n})_n$ le long de n'importe quelle sous-suite $r_n \to 1^-$) puisque le noyau de Poisson est décroissant sur $[0,\pi]$. Pour le noyau de Fejer (qui vérifie ces points sauf la décroissance sur $[0,\pi]$) on peut prendre $K_n(t) = n+1$ sur $[0, \frac{\pi}{n+1}]$ et $K_n(t) = \frac{1}{n+1}\frac{\pi^2}{t^2}$ pour $t \in [\frac{\pi}{n+1}, \pi]$. On laisse la vérification en exercice (en particulier de l'intégrabalité uniforme).

On a le résultat remarquable suivant :

Théorème 4.26. *Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ et x_0 un point de Lebesgue de f. Alors, si (k_n) est une approximation de l'identité régulière, on a $k_n * f(x_0) \to f(x_0)$. En particulier*

$$k_n * f \to f \qquad \textit{presque partout sur } \mathbb{T}.$$

On en déduit que pour le noyau de Fejér on a $F_n * f \to f$ presque partout sur $\mathbb{T}$, et que pour le noyau de Poisson on a $P_r * f \to f$ presque partout sur $\mathbb{T}$.

Notez que la convergence dans $L^1(\mathbb{T})$ déjà établie permet de conclure à la convergence presque partout d'une sous-suite ; mais ici on a même la convergence de la suite

Démonstration. Soit donc K_n au dessus de k_n vérifant les hypothèses ci-dessous. On a vu en exercice au chapitre précédent qu'à une fonction monotone (ou plus généralement à variations bornée) on peut associer une mesure borélienne (dite de Stieltjes). Ici, pour notre fonction décroissante K_n, il existe donc une mesure borélienne positive μ_n sur $[0,\pi]$ telle que pour tout $t \in [0,\pi]$,

$$K_n(t) = \int_t^{\pi} d\mu_n(u).$$

Notons que dans notre cas, on pourrait même supposer que K_n est C^1 par morceaux et donc lipschitzienne, donc absolument continue, auquel cas on peut prendre $d\mu_n = (-K_n'(u))\,du + K_n(\pi)\delta_\pi$ (avec le choix ci-dessus on a en effet $\mu_n(\{\pi\}) = K_n(\pi)$).

On peut alors écrire,

$$\begin{aligned}
|k_n * f(x_0) - f(x_0)| &\le \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(x_0 - x) - f(x_0)|\, K_n(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(x - x_0) - f(x_0)|\, K_n(|x|)\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x_0 - x) - f(x_0)| \Big(\int_{|x|}^{\pi} d\mu_n(u)\Big)\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \Big(\int_{-u}^{u} |f(x - x_0) - f(x_0)|\,dx\Big)\, d\mu_n(u)
\end{aligned}$$

après avoir vérifié qu'on peut effectivement appliquer Fubini (OK ?). Posons

$$\phi(h) := \frac{1}{h}\int_{-h}^{h} |f(x_0 - t) - f(x_0)|\,dt$$

pour $h \in]0,\pi]$ et $\phi(0) = 0$. C'est alors une fonction continue sur $[0,\pi]$, puisque x_0 est un point de Lebesgue (en dehors de 0, on remarque que la fonction $h \to \int_{-h}^{h} |f(x) - f(x_0)|\,dx$ est même absolument continue puisque

f est intégrable) ; elle est en particulier bornée, par une constante $M > 0$ disons. Avec cette notation, on a donc établit que

$$|k_n * f(x_0) - f(x_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi u\,\phi(u)\,d\mu_n(u).$$

On souhaite montrer que cette dernière expression tend vers 0. Pour $\delta \in]0,\pi]$, en découpant cette intégrale avant et après δ on a

$$\int_0^\pi u\,\phi(u)\,d\mu_n(u) \leq \frac{1}{2\pi}(\max_{[0,\delta]} \phi) \int_0^\delta u\,d\mu_n(u) + \frac{1}{2\pi} M\pi \int_\delta^\pi d\mu_n.$$

En reprenant dans l'autre sens le calcul fait plus haut on voit que

$$\int_0^\delta u\,d\mu_n(u) \leq \int_0^\pi u\,d\mu_n(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}} K_n \leq \tilde{M} := \frac{1}{2}\sup_n \int_{\mathbb{T}} K_n.$$

Ainsi, on a

$$|k_n * f(x_0) - f(x_0)| \leq \frac{\tilde{M}}{2\pi}\max_{[0,\delta]} \phi + \frac{M}{2} K_n(\delta).$$

Étant donné un $\varepsilon > 0$ on peut trouver, par continuité de ϕ en 0, un $\delta > 0$ tel que le premier terme est inférieur à ε. Pour ce δ fixé, il existe un rang à partir duquel le deuxième terme est inférieur à ε.

□

On a en fait une condition plus faible qu'être point de Lebesgue ou que celle l'existence d'une limite dans le résultat de Fejér, à savoir

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_0^h \left| \frac{f(t_0+\tau)+f(t_0-\tau)}{2} - f_0 \right| d\tau = 0. \tag{4.16}$$

Cette dernière condition est beaucoup moins restrictive que celle de Fejér.

Théorème 4.27 (Lebesgue)**.** *Si* (4.16) *est vraie alors* $F_n * f(t_0) \underset{n\to+\infty}{\to} f_0$*. En particulier, comme les points de Lebesgue sont de mesure totale,* $F_n * f$ *converge vers* f *presque partout.*

Démonstration. D'après (4.6), comme $\sin(\tau/2) \geq \tau/\pi$ si $0 < \tau < \pi$, on a

$$0 \leq F_n(\tau) \leq \min\left(n+1, \frac{\pi^2}{(n+1)\tau^2}\right). \tag{4.17}$$

Le calcul (4.15) et la positivité de F_n nous donne

$$|F_n * f(t_0) - f_0| \leq \frac{1}{\pi}\left(\int_0^\delta + \int_\delta^\pi\right) F_n(\tau) \left| \frac{f(t_0-\tau)+f(t_0+\tau)}{2} - f_0 \right| d\tau. \tag{4.18}$$

La seconde intégrale du membre de droite est alors majorée par

$$\frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi F_n(\tau) \left| \frac{f(t_0-\tau)+f(t_0+\tau)}{2} - f_0 \right| d\tau \leq \frac{\pi}{(n+1)\delta^2}(\|f\|_1 + |f_0|) \tag{4.19}$$

Ce qui tend vers 0 si on prend par exemple $\delta = n^{-1/4}$.
Pour estimer la première intégrale du membre de droite de (4.18), on pose

$$\phi(h) := \int_0^h \left| \frac{f(t_0+\tau)+f(t_0-\tau)}{2} - f_0 \right| d\tau.$$

Alors, en utilisant (4.17) et le fait que ϕ est absolument continue (cf section 3.3), on estime

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int_0^\delta F_n(\tau)\left|\frac{f(t_0-\tau)+f(t_0+\tau)}{2}-f_0\right|d\tau\\
&=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{1/n}+\int_{1/n}^\delta\right)F_n(\tau)\left|\frac{f(t_0-\tau)+f(t_0+\tau)}{2}-f_0\right|d\tau\\
&\leq\frac{n+1}{\pi}\phi(1/n)+\frac{\pi}{n+1}\int_{1/n}^\delta\frac{\phi'(\tau)}{\tau^2}d\tau\\
&\leq\frac{n+1}{\pi}\phi(1/n)+\frac{\pi}{n+1}\left[\frac{\phi(\tau)}{\tau^2}\right]_{1/n}^\delta+\frac{2\pi}{n+1}\int_{1/n}^\delta\frac{\phi(\tau)}{\tau^3}d\tau.
\end{aligned}\tag{4.20}$$

La dernière étape du calcul a consisté en une intégration par partie, licite comme ϕ est absolument continue. L'hypothèse (4.16) nous alors que pour $\varepsilon>0$, il existe $n_\varepsilon>0$ tel si $n\geq n_\varepsilon$ et $0<\tau<\delta=n^{-1/4}$ alors $0\leq\phi(\tau)\leq\varepsilon\tau$. En remplaçant ceci dans le dernier terme de (4.20), on obtient

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\delta F_n(\tau)\left|\frac{f(t_0-\tau)+f(t_0+\tau)}{2}-f_0\right|d\tau\leq\frac{\varepsilon(n+1)}{n}+\frac{\pi\varepsilon n}{n+1}+\frac{2\pi\varepsilon}{n+1}\int_{1/n}^\delta\frac{d\tau}{\tau^2}\leq 4\pi\varepsilon.$$

Ceci achève la preuve du théorème 4.27. □

Corollaire 4.28. *Si la série de Fourier de f intégrable sur $\mathbb{T}$ converge sur un ensemble E de mesure strictement positive, alors elle vaut f presque partout dans E. En particulier, si une série de Fourier converge vers 0 presque partout, alors les coefficients de Fourier sont tous nuls.*

On peut aussi obtenir des résultats de convergence un peu plus fort pour le noyau de Poisson. Pour f intégrable sur $\mathbb{T}$, on pose

$$\psi(h):=\int_0^h\left(\frac{f(t_0+\tau)+f(t_0-\tau)}{2}-f_0\right)d\tau.$$

Théorème 4.29 (Fatou)**.** *Si $\psi(h)=o(h)$ quand $h\to0$ alors $\lim_{r\to1^-}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)r^{|n|}e^{int_0}=f_0$.*

La preuve qui se fait sur le modèle de celle du théorème 4.27 est laissée au lecteur (voir aussi la section 5.1). On retrouve en particulier qu'en tout point de Lebesgue (donc presque partout, voir la définition 3.9 et le théorème 3.10), on peut appliquer le théorème 4.29.

4.3 Ordre de grandeur des coefficients de Fourier

Pour $f\in L^1(\mathbb{T})$, on sait que $\sup_n|\hat{f}(n)|\leq\|f\|_1$ et $\hat{f}(n)\underset{|n|\to+\infty}{\to}0$ par le lemme de Riemann Lebesgue (théorème 4.12). Dans cette section, nous allons nous intéresser à des questions du type

1. peut-on améliorer le lemme de Riemann Lebesgue et obtenir un taux de décroissance minimal pour $(\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ à l'infini ?
2. toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tendant vers 0 à l'infini est-elle la suite des coefficients de Fourier d'une fonction intégrable ?
3. Comment les propriétés de f (par exemple le fait qu'elle est bornée, continue, dérivable, etc) se reflète-t-il sur la suite $(\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$?

Les réponses aux questions 1. et 2. sont négatives comme nous le verrons. Pour la question 3. nous aurons des éléments de réponse mais nous verrons qu'en général il n'y a pas de caractérisation nécessaire et suffisante des propriétés de régularité de f par la taille de ses coefficients de Fourier. L'espace de fonctions de carré intégrable est un contre-exemple notable à cet état de fait.

Théorème 4.30. *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite paire de nombres positif tendant vers 0 à l'infini. Supposons que*

$$\forall n>0,\quad a_{n+1}+a_{n-1}-2a_n\geq 0. \tag{4.21}$$

Alors il existe une fonction positive f intégrable sur $\mathbb{T}$ telle que $\forall n\in\mathbb{Z}$, $\hat{f}(n)=a_n$.

Démonstration. Clairement $\sum_{n\geq 0}(a_n-a_{n+1})=a_0$; d'autre part par (4.21), la suite $(a_n-a_{n+1})_{n\geq 0}$ est décroissante. Donc $\lim_{n\to+\infty} n(a_n-a_{n+1})=0$. Par conséquent $\sum_{n=1}^{N} n(a_{n-1}+a_{n+1}-2a_n)=a_0-a_N-N(a_N-a_{N+1})$ converge vers a_0 quand $N\to+\infty$. On pose

$$f(t)=\sum_{n\geq 1} n(a_{n-1}+a_{n+1}-2a_n)F_{n-1}(t). \tag{4.22}$$

Comme $\|F_n\|_1=1$ pour tout n, la série (4.22) converge dans L^1 ; étant à termes positifs, sa limite est positive. En utilisant (4.6), on calcule

$$\hat{f}(j)=\sum_{n\geq 1} n(a_{n-1}+a_{n+1}-2a_n)\hat{F}_{n-1}(j)=\sum_{n\geq |j|+1} n(a_{n-1}+a_{n+1}-2a_n)\left(1-\frac{|j|}{n}\right)=a_{|j|}.$$

Ceci achève la preuve du théorème 4.30. □

Théorème 4.31. *Soit $f\in L^1(\mathbb{T})$. Supposons que $\hat{f}(n)=-\hat{f}(-n)\geq 0$, $\forall n\geq 0$. Alors $\sum_{n>0}\frac{1}{n}\hat{f}(n)<+\infty$.*

Démonstration. On a $\hat{f}(0)=0$. On pose $F(t)=\int_0^t f(\tau)d\tau$. Alors F est continue sur $\mathbb{T}$ et ses coefficients de Fourier d'indice non nul sont donnés par $\hat{F}(n)=\frac{1}{in}\hat{f}(n)$ (proposition 4.3). Comme F est continue, le théorème de Fejér appliqué pour F en $t_0=0$ nous dit que

$$\lim_{N\to+\infty} 2\sum_{n=1}^{N}\left(1-\frac{n}{N+1}\right)\frac{\hat{f}(n)}{n}=i(F(0)-\hat{F}(0))=-i\hat{F}(0).$$

Comme $\hat{f}(n)\geq 0$, ceci implique $\sum_{n>0}\frac{1}{n}\hat{f}(n)<+\infty$. □

Corollaire 4.32. *Si $a_n>0$ et $\sum a_n/n=+\infty$ alors $\sum a_n\sin nt$ n'est pas la série de Fourier d'une fonction intégrable. Il existe donc des séries trigonométriques dont les coefficients tendent vers 0 qui ne sont pas des séries de Fourier.*

Par le théorème 4.30, la série trigonométrique

$$\sum_{n\geq 2}\frac{\cos nt}{\log n}=\sum_{|n|\geq 2}\frac{e^{int}}{2\log n}$$

est la série de Fourier d'une fonction intégrable alors que par le théorème 4.31, sa série trigonométrique conjuguée

$$\sum_{n\geq 2} \frac{\sin nt}{\log n} = -i \sum_{|n|\geq 2} \frac{\operatorname{sign}(n)}{2\log |n|} e^{int}$$

n'en est pas une.
On va maintenant développer quelques résultats simples sur la taille des coefficients de Fourier pour des fonctions ayant diverses propriétés de régularité.

Théorème 4.33. *Soit f absolument continue sur $\mathbb{T}$ alors $\hat{f}(n) = o(n^{-1})$.*

Démonstration. Comme f est absolument continue, par le théorème 3.31, f est dérivable presque partout sur I, f' est Lebesgue intégrable et on a $f(t) = f(0) + \int_0^t f'(\tau)d\tau$. Donc, pour $n \neq 0$ $\hat{f}(n) = \dfrac{1}{in}\hat{f}'(n)$ par le Proposition 4.3. Comme, par le Lemme de Riemann-Lebesgue, $\hat{f}'(n) \to 0$ quand $|n| \to +\infty$, la preuve est achevée. □

Si on suppose maintenant que f est k-fois dérivable et que $f^{(k-1)}$ est absolument continue (c'est-à-dire que $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{T})$) alors

$$\hat{f}(n) = o(n^{-k}) \quad \text{quand} \quad n \to +\infty. \tag{4.23}$$

Sous les mêmes hypothèses, comme par récurrence pour $0 \leq j \leq k$, on a $\hat{f}(n) = \frac{1}{(in)^j}\widehat{f^{(j)}}(n)$, on sait que

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{|n|^j}\|f^{(j)}\|_1. \tag{4.24}$$

On a donc démontré

Théorème 4.34. *Si f est k-fois dérivable et que $f^{(k-1)}$ est absolument continue alors, pour $n \neq 0$,*

$$|\hat{f}(n)| \leq \min_{0\leq j\leq k} \frac{1}{|n|^j}\|f^{(j)}\|_1$$

Si f est indéfiniment différentiable, alors

$$|\hat{f}(n)| \leq \inf_{0\leq j} \frac{1}{|n|^j}\|f^{(j)}\|_1$$

Théorème 4.35. *Si f est de variations bornées (voir la section 3.3 et l'exercice 3.30) sur $\mathbb{T}$ alors, pour $n \neq 0$, $|\hat{f}(n)| \leq \dfrac{Var(f)}{\pi|n|}$.*

Démonstration. Soit μ la mesure construite dans l'exercice 3.30 à partir de f. Notons que, comme f est périodique, $\displaystyle\int_{\mathbb{T}} d\mu(u) = 0$. En utilisant le théorème de Fubini, on calcule

$$\begin{aligned}|\hat{f}(n)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} e^{-int}f(t)dt\right| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\substack{\{0\leq t\leq 2\pi\} \\ \{t\leq u\leq 2\pi\}}} e^{-int}d\mu(u)\,dt\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^u e^{-int}dt\right)d\mu(u)\right| \\ &= \left|\frac{1}{2in\pi}\int_{\mathbb{T}}(1-e^{-inu})d\mu(u)\right| \leq \frac{|\mu|(\mathbb{T})}{|n|\pi} = \frac{\operatorname{var}(f)}{|n|\pi}.\end{aligned}$$

□

Définition 4.36. Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. On définit le *module de continuité* de f, noté $\omega(f, \cdot)$ par

$$\text{pour } h \in \mathbb{R}^+, \quad \omega(f,h) = \sup_{|y|\leq h} \|f(\cdot + y) - f\|_\infty = \sup_{|y|\leq h} \sup_{\tau\in\mathbb{T}} |f(\tau + y) - f(\tau)|.$$

Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. On définit le *module de continuité intégral* de f, noté $\Omega(f, \cdot)$ par

$$\text{pour } h \in \mathbb{R}^+, \quad \Omega(f,h) = \sup_{|y|\leq h} \|f(\cdot + y) - f\|_1 = \sup_{|y|\leq h} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(\tau + y) - f(\tau)|d\tau. \tag{4.25}$$

On vérifie facilement que si f est continue sur $\mathbb{T}$, $\Omega(f, h) \leq \omega(f, h)$ pour $h \geq 0$.

Théorème 4.37. *Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. Pour $n \neq 0$, on a $|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{2}\Omega\left(f, \frac{\pi}{|n|}\right)$.*

Démonstration. Par changement de variable, on calcule

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} e^{int} f(t)dt = \frac{1}{4\pi}\left(\int_{\mathbb{T}} e^{int} f(t)dt - \int_{\mathbb{T}} e^{in(t-\pi/|n|)} f(t)dt\right) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{T}} e^{int}\left(f(t) - f\left(t + \frac{\pi}{|n|}\right)\right) dt.$$

En prenant le module de part et d'autre et en le faisant passer sous le signe intégrale dans le membre de droite, on achève la preuve du résultat énoncé. □

Théorème 4.38. *Soit $1 < p \leq 2$ et q l'exposant conjugué de p i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $f \in L^p(\mathbb{T})$ alors $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^q < +\infty$.*

Remarque 4.39. *Ce théorème ne peut pas s'étendre à $p > 2$: dans ce cas, si $f \in L^p(\mathbb{T})$, comme $L^p(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T})$ si $p \geq 2$, on obtient seulement que les coefficients de Fourier de f sont de carré sommable. Ceci est optimal car on peut montrer que si $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est positive de carré sommable alors il existe une fonction continue telle que pour $n \in \mathbb{Z}$, $|\hat{f}(n)| \geq c_n$.*

4.4 Intermède : séries de Fourier de fonctions de carré intégrable

Théorème 4.40. *Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$. Alors*

1. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(t)|^2 dt$ *;*
2. $\displaystyle f = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)e^{int}$ *où la convergence est entendue dans le sens de la norme de $L^2(\mathbb{T})$;*
3. *l'application $f \in L^2(\mathbb{T}) \mapsto (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ est un isomorphisme isométrique ;*
4. *pour $g \in L^2(\mathbb{T})$, on a* $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\overline{g(t)}dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}$.

Démonstration. On sait que $L^2(\mathbb{T})$ muni de la norme $\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(t)|^2 dt$ est un espace de Hilbert. Un calcul immédiat nous dit que la famille $(e^{in\cdot})_{n\in\mathbb{Z}}$ forme un système orthonormal dans cet espace. Du théorème 4.18, on tire qu'il est total i.e. l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par ce système est total. Le théorème suit alors de résultats classiques sur les espaces de Hilbert et leurs bases hilbertiennes. On pourra consulter le chapitre 4 du polycopié du cours d'Analyse Fonctionnelle de L3 3M210. □

On en déduit immédiatement le

Corollaire 4.41. *Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$. Alors il existe $\tilde{f}$ une unique fonction de $L^2(\mathbb{T})$ ayant pour série de Fourier la série conjuguée de celle de f (voir la définition 4.6). L'application $f \in L^2(\mathbb{T}) \mapsto \tilde{f} \in L^2(\mathbb{T})$ est continue de norme 1.*

4.5 Convergence des séries de Fourier

La convergence des séries de Fourier est un problème qui se révèle épineux, surtout, celui de la convergence ponctuelle. Souvent les convergences dans certaines normes fonctionnelles sont plus simples à traiter. La question de la convergence est reliée à celle de l'existence et des propriétés de la fonction conjuguée (voir la section 4.1.2).

4.5.1 Convergence en norme dans les espaces de Banach homogènes

Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach homogène sur $\mathbb{T}$. Pour $f \in \mathcal{B}$, on rappelle que

$$S_n(f) = (D_n * f)(t) = \sum_{j=-n}^{n} \hat{f}(j)e^{ijt}. \tag{4.26}$$

Définition 4.42. On dit que $\mathcal{B}$ a la *propriété de convergence en norme* si, pour $f \in \mathcal{B}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \|S_n(f) - f\|_{\mathcal{B}} = 0. \tag{4.27}$$

On a déjà vu que $L^2(\mathbb{T})$ a la propriété de la convergence en norme. On veut maintenant caractériser les espaces de Banach homogènes l'ayant.
L'application $S_n : f \mapsto S_n(f)$ est bien définie et laisse $\mathcal{B}$ invariant. Comme son image est de dimension finie $2n+1$, elle est bornée et on note $\|S_n\|^{\mathcal{B}}$ sa norme.

Théorème 4.43. *Un espace de Banach homogène $\mathcal{B}$ a la propriété de convergence en norme si et seulement si la suite $(\|S_n\|^{\mathcal{B}})_{n\geq 1}$ est bornée c'est-à-dire si et seulement s'il existe $K > 0$ telle que*

$$\forall\, n \geq 1,\ \forall\, f \in \mathcal{B}, \quad \|S_n(f)\|_{\mathcal{B}} \leq K\|f\|_{\mathcal{B}}. \tag{4.28}$$

Démonstration. D'une part, si $(S_n(f))_{n\geq 1}$ tend vers f pour tout f dans $\mathcal{B}$, alors par le théorème de Banach-Steinhaus (cf Th. 3.3.2, polycopié de JY. Chemin 4M005), on sait que (4.28) est vraie.
Réciproquement, supposons (4.28). Pour $\varepsilon > 0$ et $f \in \mathcal{B}$, soit P un polynôme trigonométrique tel que $\|f - P\|_{\mathcal{B}} \leq \varepsilon/(K+1)$ (leur existence est garantie par le théorème 4.18 appliqué au noyau de Fejér). Pour n supérieur au degré de P, on a bien sur $S_n(P) = P$. Donc

$$\|S_n(f) - f\|_{\mathcal{B}} \leq \|S_n(f) - S_n(P)\|_{\mathcal{B}} + \|P - f\|_{\mathcal{B}} \leq K\varepsilon/(K+1) + \varepsilon/(K+1) = \varepsilon.$$

Ceci achève la preuve du théorème 4.43. □

Comme $S_n(f) = D_n * f$, on a $\|S_n(f)\|_{\mathcal{B}} \leq \|D_n\|_1\|f\|_{\mathcal{B}}$ par la proposition 4.16. Ainsi

$$\|S_n\|^{\mathcal{B}} \leq \|D_n\|_1. \tag{4.29}$$

Les nombres $L_n := \|D_n\|_1$ sont appelées *constantes de Lebesgue.*

Exercice 4.44. Montrer que $L_n = \dfrac{4}{\pi^2}\log n + O(1)$.

Quand $\mathcal{B} = L^1(\mathbb{T})$, (4.29) est une égalité. En effet, on a vu que $\|F_m\|_1 = 1$ (cf lemme 4.9 et définition 4.7). Donc, $\|S_n\|^{L^1} \geq \|S_n(F_m)\|_1 = \|D_n * F_m\|_1 = \|F_m * D_n\|_1 = \left\|D_n - \dfrac{1}{m+1}g_n\right\|_1$ si $m \geq n$. Donc, par (4.29), $\|S_n\|^{L^1} = \|D_n\|_1$.
Ainsi $L^1(\mathbb{T})$ n'a pas la propriété de convergence en norme.

Exercice 4.45. Montrer que $\|S_n\|^{\mathcal{C}(\mathbb{T})} = \|D_n\|_1$.
Indication : pour cela, on pourra étudier $S_n(\psi_n)$ où ψ_n est une fonction continue bornée en module par 1 qui prend comme valeur en t le signe de $D_n(t)$ sauf en des voisinages assez petits des points où celui-ci change.

4.5.2 Convergence et divergence en un point

Théorème 4.46. *Il existe une fonction continue dont la série de Fourier diverge en au moins un point.*

Première preuve. Les formes $f \mapsto [S_n(f)](0)$ sont continues sur $\mathcal{C}(\mathbb{T})$. Par le théorème de Banach-Steinhaus (cf Th. 3.3.2 poly JY. Chemin 4M005), si $((S_n(f)](0))_n$ est bornée pour toute f, ces formes sont uniformément bornées. On a déjà vu que ceci ne se peut (i.e. (4.28) n'est pas vrai pour $\mathcal{B} = \mathcal{C}(\mathbb{T})$. Il existe donc f que $((S_n(f)](0))_n$ n'est pas bornée et, donc la série de Fourier de f diverge en 0. □

Seconde preuve du théorème 4.46. On va maintenant donner une preuve plus constructive. Dans l'exercice 4.45, on construit une suite de fonctions, disons, $(\psi_n)_n$ continues sur $\mathbb{T}$ telles que, pour n assez grand,

$$\|\psi_n\|_\infty \leq 1 \quad \text{et} \quad |S_n(\psi_n, 0)| \geq \frac{1}{2} L_n \geq \frac{1}{10} \log n \tag{4.30}$$

Posons $\varphi_n = F_{n^2} * \psi_n$; ce sont des polynômes trigonométriques de degré au plus n^2 vérifiant

$$\|\varphi_n\|_\infty \leq 1 \quad \text{et} \quad |S_n(\varphi_n, 0) - S_n(\psi_n, 0)| \leq \frac{6}{5}. \tag{4.31}$$

En effet, $S_n(\varphi_n) - S_n(\psi_n) = (F_{n^2} * D_n - D_n) * \varphi_n$ et

$$\|F_{n^2} * D_n - D_n\|_\infty = \left\| \frac{1}{n^2+1} \sum_{j=0}^{n-1} (D_j - D_n) \right\|_\infty \leq \frac{1}{n^2+1} \sum_{j=0}^{n-1} \|D_j - D_n\|_\infty \leq \frac{2}{n^2+1} \sum_{j=0}^{n-1} (n-j) = \frac{n(n+1)}{n^2+1} \leq \frac{6}{5}.$$

Ainsi, pour n assez grand,

$$|S_n(\varphi_n, 0)| \geq \frac{1}{10} \log n - \frac{6}{5}. \tag{4.32}$$

Pour $\lambda_n := 2^{3^n}$, on pose

$$f(t) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \varphi_{\lambda_n}(\lambda_n t). \tag{4.33}$$

Par (4.31), cette somme converge normalement dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ et définit donc une fonction continue. Montrons que sa série de Fourier diverge en 0. En remarquant que $\varphi_{\lambda_n}(\lambda_n t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \widehat{\varphi_{\lambda_n}}(m) e^{i\lambda_n m t}$, on voit que la croissance rapide de $(\lambda_n)_n$ garantit que, si $m < n$ alors $S_{\lambda_n^2}(\varphi_{\lambda_m}(\lambda_m \cdot)) = \varphi_{\lambda_m}(\lambda_m \cdot)$ et si $m > n$ alors $S_{\lambda_n^2}(\varphi_{\lambda_m}(\lambda_m \cdot)) = \widehat{\varphi_{\lambda_m}}(0)$. On calcule donc

$$\begin{aligned} |S_{\lambda_n^2}(f, 0)| &= \left| S_{\lambda_n^2}\left(\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^2} \varphi_{\lambda_m}(\lambda_m \cdot), 0 \right) + \sum_{m \geq n+1} \frac{1}{m^2} \widehat{\varphi_{\lambda_m}}(0) \right| \\ &= \left| \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m^2} \varphi_{\lambda_m}(0) + \frac{1}{n^2} S_{\lambda_n}(\varphi_{\lambda_n}, 0) + \sum_{m \geq n+1} \frac{1}{m^2} \widehat{\varphi_{\lambda_m}}(0) \right| \geq \frac{1}{10 n^2} \log \lambda_n - \frac{\pi^2}{6} - \frac{6}{5}. \end{aligned} \tag{4.34}$$

qui tend vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$ par construction de $(\lambda_n)_n$.
Ceci achève la seconde preuve du théorème 4.46. □

On va maintenant donner quelques critères de convergence ponctuelle.

Théorème 4.47. *Soit f intégrable sur $\mathbb{T}$ telle que*

$$\hat{f}(n) = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \textit{quand} \quad n \to +\infty. \tag{4.35}$$

Alors, pour tout $t \in \mathbb{T}$, $S_n(f)(t)$ et $F_n * f(t)$ ont le même type de convergence, et quand elles existent, leurs limites sont égale. De plus, si $F_n * f(t)$ converge uniformément sur un sous-ensemble de $\mathbb{T}$ alors il en est de même pour $S_n(f)(t)$.

Démonstration. Comme $F_n * f(t)$ est une moyenne de Cesaro de $(S_m(f)(t))_{0\le m\le n}$, il est clair que la convergence de $(S_n(f)(t))_n$ implique celle de $(F_n * f(t))_n$. Pour la réciproque, on choisit $\lambda > 1$ et, en utilisant (4.6), on calcule

$$S_n(f)(t) = \frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n} F_{[\lambda n]} * f(t) - \frac{n+1}{[\lambda n]-n} F_n * f(t) - \frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n} \sum_{n\le |m|\le \lambda n} \left(1 - \frac{|m|}{[\lambda n]+1}\right) \hat{f}(m) e^{imt} \tag{4.36}$$

où $[\cdot]$ désigne la partie entière de $\cdot$.
La propriété (4.35) implique que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\lambda > 1$ tel que $\limsup_{n\to+\infty} \sum_{n\le|m|\le\lambda n} |\hat{f}(m)| < \varepsilon$. Pour ce choix de λ, on a

$$\sup_{t\in\mathbb{T}} \left| \frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n} \sum_{n\le |m|\le \lambda n} \left(1 - \frac{|m|}{[\lambda n]+1}\right) \hat{f}(m) e^{imt} \right| = \sup_{t\in\mathbb{T}} \left| \sum_{n\le |m|\le \lambda n} \frac{[\lambda n]-m}{[\lambda n]-n} \hat{f}(m) e^{imt} \right| \le \varepsilon. \tag{4.37}$$

Ainsi, si $(F_n * f(t))_n$ converge vers a, (4.36) donne

$$|S_n(f)(t) - a| \le \frac{[\lambda n]+1}{[\lambda n]-n} |F_{[\lambda n]} * f(t) - a| + \frac{n+1}{[\lambda n]-n} |F_n * f(t) - a| + \varepsilon \le 2\varepsilon$$

si on choisit n assez grand.
Ceci prouve le premier point du théorème 4.47. L'uniformité suit de l'uniformité en t dans la borne (4.37). □

Corollaire 4.48. *Si f est de variations bornées (voir section 3.3), alors, en tout point t, $S_n(f)(t)$ converge vers $\frac{1}{2}(f(t+0)+f(t-0))$ et vers $f(t)$ aux points de continuité. La convergence est uniforme sur les intervalles compacts sur lesquels f est continue.*

Démonstration. Le théorème 4.35 nous dit que les coefficients de Fourier de f à variation bornée vérifient (4.35). Le théorème de Fejér, i.e. le théorème 4.21, nous permet alors de conclure en utilisant l'exercice 3.30. □

Lemme 4.49. *Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ telle que $t \mapsto f(t)/t$ est aussi intégrable sur $\mathbb{T}$. Alors $S_n(f)(0) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.*

Démonstration. Par (4.26), en utilisant la formule d'addition du sinus, on calcule

$$S_n(f)(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{f(t)}{\sin(t/2)} \sin((n+1/2)t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{f(t)\cos(t/2)}{\sin(t/2)} \sin(nt)dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t)\cos(nt)dt. \tag{4.38}$$

Comme, par hypothèse, $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto \frac{f(t)\cos(t/2)}{\sin(t/2)}$ sont intégrables sur $\mathbb{T}$, le résultat du lemme suit directement du lemme de Riemann-Lebesgue. □

Théorème 4.50 (Principe de localisation)**.** *Soit $f \in L^1(T)$ qui s'annule dans un intervalle ouvert I. Alors $S_n(f)(t)$ converge vers 0 pour $t \in I$ et, cette convergence est uniforme sur les compacts de I.*

Démonstration. La convergence vers 0 est un conséquence immédiate du lemme 4.49. Pour $\tau \in \mathbb{T}$, on a

$$S_n(f)(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{f(t+\tau)\cos(t/2)}{\sin(t/2)}\sin(nt)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t+\tau)\cos(nt))dt.$$

Les applications $t \in \mathbb{T} \mapsto f(\cdot+\tau) \in L^1(\mathbb{T})$ et $t \in I \mapsto \dfrac{f(\cdot+\tau)\cos(\cdot/2)}{\sin(\cdot/2)} \in L^1(\mathbb{T})$ sont continues par l'hypothèse faite sur f et I (et par le corollaire 1.32). Si $K \subset I$ est compact, alors les images de K par ces applications sont des compacts de $L^1(\mathbb{T})$ auxquels on peut appliquer le lemme de Riemann-Lebesgue uniforme, lemme 4.13 ce qui donne la convergence uniforme annoncée. $\square$

Une autre conséquence immédiate du lemme 4.49 est le

Théorème 4.51 (Critère de Dini)**.** *Soit f intégrable sur $\mathbb{T}$. Si $t \mapsto \dfrac{f(t+t_0)-f(t_0)}{t}$ est intégrable sur $\mathbb{T}$ alors $S_n(f)(t_0) \underset{n\to+\infty}{\to} f(t_0)$.*