

Chapitre 5

Fonctions harmoniques

5.1 Généralités

Pour $z \in \mathbb{C}$, on note $z = x + iy$.

Définition 5.1. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. On dit que $u \in \mathcal{C}(U)$ est *harmonique sur U* si en tout point de U , ses dérivées partielles $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ existent et vérifient $\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Pour qu'une fonction soit harmonique, il faut et il suffit que ses parties réelle et imaginaire le soient.

Remarque 5.2. On rappelle que si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe (c'est-à-dire \mathbb{C} -différentiable i.e. pour $z_0 \in U$, il existe $f'(z_0) \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + o(z - z_0)$ au voisinage de z_0) alors elle est indéfiniment différentiable en (x, y) . La fonction f vérifie alors dans U l'équation de Cauchy-Riemann

$$(5.1) \quad \bar{\partial}f := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0.$$

De plus, si on note $\partial f := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$, alors $f'(z_0) = \partial f(z_0)$.

Réciproquement, si f est continue et vérifie l'équation de Cauchy-Riemann sur U alors elle est holomorphe dans U .

Rappelons, enfin, que f est holomorphe dans U si et seulement si f est développable en série entière au voisinage de chaque point de U .

On calcule

$$(5.2) \quad 4\bar{\partial}\partial f = 4\partial\bar{\partial}f = \Delta f.$$

Ainsi une fonction holomorphe dans U est harmonique dans U .

L'égalité (5.2) implique que la partie réelle (ainsi que la partie imaginaire) d'une fonction holomorphe est harmonique. On verra un peu plus loin que ce résultat admet une réciproque.

5.1.1 Le noyau de Poisson

Pour $0 \leq r < 1$ et $t \in \mathbb{T}$, le noyau de Poisson est la fonction

$$(5.3) \quad P(r, t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} r^{|j|} e^{ijt} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2} = \operatorname{Re} \left(\frac{1 + re^{it}}{1 - re^{it}} \right).$$

On vérifie facilement que

1. $P(r, t) > 0$,
2. $P(r, -t) = P(r, t)$,
3. $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, t) dt = 1$,
4. pour $0 < \delta < |t| \leq \pi$, on a $P(r, t) \leq P(r, \delta)$,
5. $P(r, \delta) \rightarrow 0$ quand $r \rightarrow 1^-$ (avec $0 < \delta \leq \pi$)

Ainsi, si $(r_n)_n$ est une suite positive telle que $r_n \rightarrow 1^-$ la suite $(t \mapsto P(r_n, t))_n$ est une approximation de l'identité (voir la définition 4.7).

On note $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$, le disque unité ouvert, et \bar{D} sa clôture, le disque unité fermé. En posant $z = re^{it} \in D$, on calcule

$$(5.4) \quad P(r, t - \tau) = \operatorname{Re} \left(\frac{e^{i\tau} + z}{e^{i\tau} - z} \right) = \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\tau} - z|^2}.$$

5.1.2 L'intégrale de Poisson

En posant $z = e^{it}$, on identifie \mathbb{T} avec le cercle unité $\{z; |z| = 1\}$ du plan complexe. Pour $f \in L^1(\mathbb{T})$, on note $f(re^{it})$, $r < 1$, son intégrale de Poisson (voir la remarque 4.22),

$$(5.5) \quad f(re^{it}) := P(r, \cdot) * f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{int} \hat{f}(n).$$

On va considérer cette fonction comme une fonction de la variable complexe $z = re^{it}$ dans D . Si f est à valeurs réelles, alors

$$(5.6) \quad f(z) = f(re^{it}) = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{i\tau} + z}{e^{i\tau} - z} f(e^{i\tau}) d\tau \right].$$

Par le théorème d'holomorphic sous le signe somme, la fonction

$$z \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{i\tau} + z}{e^{i\tau} - z} f(e^{i\tau}) d\tau$$

est holomorphe dans D . Ainsi $z \mapsto f(re^{it})$ est harmonique dans D si f est à valeurs réelles. Ceci reste vrai pour f intégrable sur \mathbb{T} en la décomposant comme la somme de ses parties réelle et imaginaire. On a donc démontré

Proposition 5.3. *Pour $f \in L^1(\mathbb{T})$, l'intégrale de Poisson $f(re^{it})$ est une fonction harmonique dans D .*

On a

Théorème 5.4. *Soit u une fonction continue à valeurs réelles sur \bar{D} harmonique dans D . Alors, dans D , u est l'intégrale de Poisson de sa restriction à \mathbb{T} et elle est la partie réelle de la fonction holomorphe*

$$(5.7) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{i\tau} + z}{e^{i\tau} - z} u(e^{i\tau}) d\tau, \quad z \in D.$$

Démonstration. Par le théorème d'holomorphic sous le signe somme, la fonction f définie par (5.7) est holomorphe dans D . Il nous suffit de montrer que $u = u_1$ où $u_1 = \operatorname{Re} f$.

Montrons d'abord que u_1 se prolonge continûment sur \bar{D} et que $(u_1)|_{\mathbb{T}} = u|_{\mathbb{T}}$. Il suffit donc de montrer que

$$(5.8) \quad \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \operatorname{Re} \frac{e^{i\tau} + re^{it}}{e^{i\tau} - re^{it}} u(e^{i\tau}) d\tau = u(e^{it}).$$

En utilisant les propriétés de $P(r, t)$ (voir les points 1-5 dans la section 5.1.1), pour δ positif petit arbitraire, on calcule

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \operatorname{Re} \frac{e^{i\tau} + re^{it}}{e^{i\tau} - re^{it}} u(e^{i\tau}) d\tau - u(e^{it}) \right| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\mathbb{T}} \operatorname{Re} \frac{e^{i\tau} + re^{it}}{e^{i\tau} - re^{it}} (u(e^{i\tau}) - u(e^{it})) d\tau \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} P(r, t - \tau) |u(e^{i\tau}) - u(e^{it})| d\tau \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \sup_{|t-\tau| \leq \delta} |u(e^{i\tau}) - u(e^{it})| + 2 \sup_{t \in \mathbb{T}} |u(e^{it})| \sup_{\substack{|t| \geq \delta \\ t \in \mathbb{T}}} P(r, t). \end{aligned}$$

La continuité uniforme de u sur \overline{D} nous permet de conclure (5.8).

Posons $h = u - u_1$. Alors h est continue sur \overline{D} , harmonique dans D et nulle sur \mathbb{T} . Supposons qu'il existe $z_0 \in D$ tel que $h(z_0) > 0$. Soit $0 < \varepsilon < h(z_0)$. Pour $z \in \overline{D}$, posons $g(z) = h(z) + \varepsilon|z|^2$. Alors $g(z_0) \geq h(z_0) > \varepsilon$ or $g|_{\mathbb{T}} = \varepsilon$. Don il existe un point $z_1 \in D$ où g admet un maximum local. Ainsi en ce point $\partial_x^2 g \leq 0$ et $\partial_y^2 g \leq 0$. Mais le calcul direct montre que $\Delta g = 4\varepsilon > 0$ (comme $\Delta h = 0$).

Ainsi $h = u - u_1 \leq 0$. Le même argument montre que $u_1 - u \leq 0$ c'est-à-dire que $u = u_1$. Ceci achève la preuve du théorème 5.4. \square

Le théorème 5.4 montre que, si u est harmonique dans D , il existe f holomorphe dans D tel que $u = \operatorname{Re} f$. En effet, u est continue dans D ; pour $0 < r < 1$, on peut donc appliquer le théorème précédent à la fonction $z \mapsto u(rz)$ ce qui définit une fonction $z \mapsto f_r(rz)$ holomorphe sur D . Ainsi $u(z) = \operatorname{Re} f_r(z)$ sur rD . Si $0 < r < r' < 1$, on a $\operatorname{Re}(f_r - f_{r'})(z) = 0$ sur rD . Donc, $f_r - f_{r'}$ est une fonction holomorphe à valeurs purement imaginaires sur rD ; elle est donc constante et cette constante peut être choisie nulle. Ainsi $f_{r'}$ est un prolongement holomorphe de f_r à $r'D$. On construit ainsi une fonction holomorphe sur $D = \bigcup_{0 < r < 1} rD$

telle que $u = \operatorname{Re} f$. On peut étendre ce résultat à un ouvert connexe.

Théorème 5.5. *Soit U un ouvert et $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ harmonique. Alors il existe $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe telle que $u = \operatorname{Re} f$. De plus, si U est connexe, pour $z_0 \in U$, f est définie de façon unique par la valeur $f(z_0)$.*

Démonstration. Pour tout $z_0 \in U$ et $r_0 > 0$ tel que $z_0 + r_0\overline{D} \subset U$, le raisonnement fait ci-dessus construit une fonction, disons, f_{z_0, r_0} holomorphe sur $z_0 + r_0D$ telle que $u|_{z_0 + r_0D} = \operatorname{Re} f_{z_0, r_0}$. Si $z_0 + r_0D \cap z'_0 + r'_0D \neq \emptyset$, on peut, quitte à les modifier par une constante imaginaire pure, garantir que $f_{z_0, r_0} = f_{z'_0, r'_0}$ sur $z_0 + r_0D \cap z'_0 + r'_0D$. La collection de fonctions $(f_{z_0, r_0})_{z_0 + r_0\overline{D} \subset U}$ définit alors une fonction holomorphe sur U telle que $u = \operatorname{Re} f$.

Supposons U est connexe et f et \tilde{f} telles que $u = \operatorname{Re} f = \operatorname{Re} \tilde{f}$. Alors, pour $c \in \mathbb{R}$, $\{z \in U; f(z) - \tilde{f}(z) = c\}$ est fermé car $f - \tilde{f}$ est continue et ouvert car $f - \tilde{f}$ est holomorphe. Donc, comme U est connexe, $\{z \in U; f(z) - \tilde{f}(z) = c\} = \emptyset$ ou $\{z \in U; f(z) - \tilde{f}(z) = c\} = U$. Ainsi si f et \tilde{f} prennent la même valeur en un point, elles sont égales sur U .

Ceci achève la preuve du théorème 5.5. \square

Corollaire 5.6. *Soient U et V des ouverts de \mathbb{C} . Si f est holomorphe de V dans U et que g est harmonique de U dans \mathbb{C} alors $g \circ f$ est harmonique sur V .*

Démonstration. En décomposant g en partie réelle et imaginaire, il suffit de prouver le corollaire pour g à valeurs réelles. On écrit alors $g = \operatorname{Re} G$ où G est holomorphe sur U . Donc $g \circ f = \operatorname{Re}(G \circ f)$ et $G \circ f$ est holomorphe sur V . La conclusion du corollaire suit. \square

Exercice 5.7. Démontrer le corollaire en calculant directement $\Delta(g \circ f)$.

Définition 5.8. Soient $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ harmonique et $v : U \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que v est une *conjuguée harmonique* de u (sur U) si est seulement si $u + iv$ est holomorphe sur U .

Le théorème 5.5 garantit l'existence d'une conjuguée harmonique. Si U est connexe, elle unique à une constante réelle près.

Remarque 5.9. Dans D , la conjuguée harmonique de (5.5) est la fonction

$$(5.9) \quad \tilde{f}(re^{it}) = -i \sum_{n \in \mathbb{Z}} \text{sign} n r^{|n|} e^{int} \hat{f}(n) = Q(r, \cdot) * f(t)$$

où l'on a posé

$$(5.10) \quad Q(r, t) = -i \sum_{n \in \mathbb{Z}} \text{sign} n r^{|n|} e^{int} = \frac{2r \sin t}{1 - 2r \cos t + r^2}.$$

Q est la conjuguée harmonique du noyau de Poisson P (normalisé de façon que $Q(0, t) = 0$).

Du théorème 5.5 et de la remarque 5.2, on déduit immédiatement le

Corollaire 5.10. Une fonction harmonique est indéfiniment différentiable.

5.1.3 La propriété de la moyenne et le principe du maximum

Théorème 5.11. Soit U un ouvert de \mathbb{C} .

Une fonction $u : U \rightarrow \mathbb{C}$ continue est harmonique sur U si et seulement si elle vérifie la propriété de la moyenne en tout point de U i.e. $\forall z_0 \in U, \forall r > 0$ tels que $z_0 + r\overline{D} \subset U$, on a

$$(5.11) \quad u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it}) dt.$$

Démonstration. Supposons u harmonique dans U . Sans perte de généralité, on peut supposer que u est à valeurs réelles. Soient $z_0 \in U$ et $r_0 > 0$ tels que $z_0 + r_0\overline{D} \subset U$. La formule de Poisson pour u dans $z_0 + r_0\overline{D}$ s'écrit alors, pour $0 < r < r_0$ et $z \in D$,

$$u(z_0 + rz) = \text{Re} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{i\tau} + z}{e^{i\tau} - z} f(z_0 + r_0 e^{i\tau}) d\tau \right].$$

soit encore en écrivant $z = r r_0^{-1} e^{it}$ pour $0 \leq r < r_0$,

$$(5.12) \quad u(z_0 + re^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2 - 2r r_0 \cos(t - \tau) + r^2} f(z_0 + r_0 e^{i\tau}) d\tau.$$

En prenant $r = 0$, on obtient (5.11).

Réciproquement, soit u continue sur U et y vérifiant la propriété de la moyenne. Soient $z_0 \in U$ et $r_0 > 0$ tels que $z_0 + r_0\overline{D} \subset U$. La formule de Poisson construit une fonction harmonique à valeurs réelles, disons, \tilde{u} qui coïncide avec u sur le cercle $z_0 + r_0\mathbb{T}$. Soit $v = u - \tilde{u}$. La fonction v vérifie la propriété de la moyenne. Supposons $m := \max_{z_0 + r_0\overline{D}} v(z) > 0$. v étant continue et $z_0 + r_0\overline{D}$ compact, ce maximum existe et est atteint.

Comme il est strictement positif, il est atteint dans $z_0 + r_0D$. Soit \tilde{z}_0 un tel maximum. Soit \tilde{r}_0 tel que $\tilde{z}_0 + \tilde{r}_0\overline{D} \subset z_0 + r_0D$. Par la formule de la moyenne, pour $0 < r < \tilde{r}_0$, on a

$$(5.13) \quad m = v(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} v(\tilde{z}_0 + re^{it}) dt \leq m.$$

Or v est majorée par m dans $z_0 + r_0\overline{D}$. Comme v est continue, elle est constante égale à m sur $\tilde{z}_0 + r\mathbb{T}$ pour $0 < r < \tilde{r}_0$, c'est-à-dire, sur le disque $\tilde{z}_0 + \tilde{r}_0\overline{D}$. On voit ainsi que l'ensemble $\{z \in z_0 + r_0\overline{D}; v(z) = m\}$ est ouvert ; il est clairement fermé ; ainsi, comme $z_0 + r_0\overline{D}$ est connexe, v est constante sur $z_0 + r_0\overline{D}$. Or, sur le bord $z_0 + r_0\mathbb{T}$, elle est nulle ; ainsi $m \leq 0$. Comme on peut appliquer le même raisonnement à $-v$, on obtient v est identiquement nulle et que u et \tilde{u} coïncident sur $z_0 + r_0\overline{D}$. Enfin, comme z_0 et r_0 sont arbitraires tels que $z_0 + r_0\overline{D} \subset U$, on obtient que $u = \tilde{u}$ sur U .

Ceci achève la preuve du théorème 5.11. □

Remarque 5.12. *En intégrant (5.11) par rapport au rayon du cercle, on voit que si u vérifie la propriété de la moyenne (5.11) sur U , elle vérifie aussi*

$$(5.14) \quad u(z_0) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{z_0+r\overline{D}} u(z) dx dy$$

si $z_0 + r\overline{D} \subset U$.

Une autre propriété importante des fonctions harmoniques est

Théorème 5.13 (Le principe du maximum). *Soit U un ouvert connexe borné et $u : \overline{U} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et harmonique dans U . Alors $\max_{\overline{U}} u = \max_{\partial U} u$ et s'il existe $x_0 \in U$ tel que $u(x_0) = \max_{\overline{U}} u$ alors u est constante égale à $u(x_0)$.*

Démonstration. Comme u est continue sur \overline{U} compact, il existe $x_0 \in \overline{U}$ tel que $u(x_0) = \max_{\overline{U}} u$. En prenant $v = u$ dans la preuve du théorème 5.11, on obtient immédiatement l'énoncé du théorème 5.13. □

Une conséquence de la formule de la moyenne est le

Théorème 5.14 (Théorème de Harnack). *Soit $(u_n)_n$ une suite de fonctions harmoniques dans un ouvert connexe U .*

1. *Si $u_n \rightarrow u$ localement uniformément dans U (i.e. uniformément sur tout compact de U) alors u est harmonique sur U .*
2. *Si $u_1 \leq u_2 \leq \dots$ alors soit $(u_n)_n$ converge localement uniformément dans U soit elle diverge vers $+\infty$ sur tout U .*

Démonstration. Démontrons 1. Comme $(u_n)_n$ converge uniformément vers u sur tout compact de U , u est continue et elle vérifie la propriété de la moyenne (comme conséquence du théorème de convergence dominée et car tous les $(u_n)_n$ la vérifie). Donc u est harmonique.

Démontrons 2. Quitte à soustraire u_1 à tous les éléments de la suite, on peut supposer $u_1 \geq 0$. Posons $u = \sup u_n$. Soit $z_0 + r_0\overline{D} \subset U$. Alors, pour $0 \leq r \leq r_0$, le noyau de Poisson satisfait à

$$\frac{r_0 - r}{r_0 + r} \leq \frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2 - 2r r_0 \cos(t - \tau) + r^2} \leq \frac{r_0 + r}{r_0 - r}.$$

Ainsi, par la formule de Poisson (5.12), pour tout n , on obtient

$$(5.15) \quad \frac{r_0 - r}{r_0 + r} u_n(z_0) \leq u_n(z_0 + r e^{it}) \leq \frac{r_0 + r}{r_0 - r} u_n(z_0) \quad (\text{Inégalité de Harnack}).$$

La même inégalité reste donc vraie pour u . On en déduit que soit $u(z) = +\infty$ sur tout $z_0 + r_0\overline{D}$ soit $u(z) < +\infty$ (et donc $(u_n)_n$ converge) sur tout $z_0 + r_0\overline{D}$. Si m est le supremum de u dans $z_0 + r_0\overline{D}$, l'inégalité (5.13) pour $v = u$ reste vraie. Donc l'ensemble des points z où u est fini (c'est-à-dire où $(u_n)_n$ converge) est ouvert

et fermé dans U connexe ; il est donc vide ou égal à U tout entier. S'il est U tout entier, on peut appliquer le théorème de convergence monotone à la formule de Poisson pour les $(u_n)_n$ ce qui nous dit que u vérifie la formule de Poisson dans U et ainsi est harmonique dans U . L'uniformité de la convergence sur tout compact provient par exemple de (5.15) appliqué à $u - u_n$ qui donne, pour $z_0 + r_0\bar{D} \subset U$,

$$\frac{r_0 - r}{r_0 + r}(u - u_n)(z_0) \leq \sup_{z \in z_0 + r_0\bar{D}} (u - u_n)(z) \leq \frac{r_0 + r}{r_0 - r}(u - u_n)(z_0).$$

Ceci achève la preuve du théorème 5.14. □

5.2 La fonction conjuguée

Nous allons maintenant étudier la fonction conjuguée d'une fonction intégrable sur \mathbb{T} .

5.2.1 Définition

Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. À f , par la formule de Poisson (5.5), on peut associer une fonction harmonique dans D que l'on notera aussi f . Le théorème de Fatou (théorème 4.29) et la remarque qui le suit nous disent qu'en tout point de Lebesgue de $t \mapsto f(e^{it})$, on a $f(e^{it}) = \lim_{r \rightarrow 1^-} f(re^{it})$.

Exercice 5.15. Montrer qu'en tout point de Lebesgue de $t \mapsto f(e^{it})$, on a $f(z) \rightarrow f(e^{it})$ quand $z \rightarrow e^{it}$, $|z| < 1$ non tangentiellement (i.e. si z reste dans un secteur de la forme $\{z \in D; |\arg(1 - ze^{-it})| \leq \alpha\}$ (où $0 < \alpha < \pi$ est arbitraire)).

La conjuguée harmonique de f (normalisée par la valeur 0 au point 0) est alors définie par (5.9) ; on la note $\tilde{f}(re^{it})$ ($0 \leq r < 1$, $t \in \mathbb{T}$). On va montrer que, pour presque tout $t \in \mathbb{T}$, cette fonction harmonique admet une limite radiale en e^{it} i.e. la limite $\lim_{r \rightarrow 1^-} \tilde{f}(re^{it})$ existe.

Lemme 5.16. *Toute fonction harmonique bornée sur D est la transformée de Poisson d'une fonction bornée sur \mathbb{T} .*

Démonstration. Soit F harmonique et bornée sur D . Soit $(r_n)_n$ une suite positive telle que $r_n \rightarrow 1^-$. Posons $f_n(e^{it}) = F(r_n e^{it})$. La suite $(f_n)_n$ est bornée dans $L^\infty(\mathbb{T})$. Comme $L^\infty(\mathbb{T})$ est le dual de $L^1(\mathbb{T})$, il existe une sous-suite $(f_{n_j})_{j \geq 1}$ qui converge faiblement (i.e. pour tout $g \in L^1(\mathbb{T})$, $(\langle f_{n_j}, g \rangle)_{j \geq 1}$ converge) vers, disons, $F(e^{it})$. Soit $\rho e^{i\tau} \in D$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} F(e^{it}) P(\rho, \tau - t) dt &= \langle F, P(\rho, \tau - \cdot) \rangle = \lim_{j \rightarrow +\infty} \langle f_{n_j}, P(\rho, \tau - \cdot) \rangle \\ &= \lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f_{n_j}(e^{it}) P(\rho, \tau - t) dt = \lim_{j \rightarrow +\infty} F(r_{n_j} \rho e^{it}) = F(\rho e^{it}). \end{aligned}$$

Ainsi $F(re^{it})$ est bien la transformée de Poisson de F ce qui prouve le lemme 5.16. □

Lemme 5.17. *Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ et soit $\tilde{f}(re^{it})$ définie par (5.9). Alors, pour presque tout t , $\tilde{f}(re^{it})$ a une limite quand $r \rightarrow 1^-$.*

Démonstration. On peut décomposer $f = f_1 - f_2 + if_3 - if_4$ où $(f_j)_{1 \leq j \leq 4}$ sont intégrables et positives. Par linéarité de l'application $f \mapsto \tilde{f}(re^{it})$ on peut supposer que f est positive.

Par définition de la conjuguée harmonique, la fonction $F(z) := e^{-f(z) - i\tilde{f}(z)}$ est holomorphe (donc aussi harmonique) dans D . L'intégrale de Poisson d'une fonction positive est positive ; la conjuguée harmonique

d'une fonction à valeurs réelles est à valeurs réelles. Ainsi $|F(z)| \leq 1$ dans D . Par le lemme 5.16 (et le théorème 4.29), F admet une limite radiale de module $e^{-f(e^{it})}$ presque partout. Cette limite est non nulle presque partout car f est intégrable. Et en chaque point où cette limite est non nulle, comme F admet une limite radiale, la fonction $\tilde{f}(re^{it})$ admet une limite radiale. Ceci achève la preuve du lemme. \square

Définition 5.18. La fonction conjuguée d'une fonction f intégrable sur \mathbb{T} est la limite radiale de $\tilde{f}(re^{it})$.

Remarque 5.19. On notera que la fonction conjuguée d'une fonction à valeurs réelles est elle aussi à valeurs réelles (voir la preuve du Lemme 5.17).

Si la série conjuguée de la série de Fourier de f intégrable est la série de Fourier d'une fonction g intégrable, alors, clairement, l'intégrale de Poisson de g est $\tilde{f}(re^{it})$ qui converge radialement vers $g(e^{it})$ presque partout (théorème 4.29). On a alors que $\tilde{f} = g$; ainsi, la définition 5.18 généralise la définition donnée dans la section 4.2.2.

À la suite du théorème 4.31 et du corollaire 4.32, nous avons vu que $\sum_{n \geq 2} \frac{\cos nt}{\log n}$ est une série de Fourier alors que sa série conjuguée $\sum_{n \geq 2} \frac{\sin nt}{\log n}$ n'en est pas une. Comme $\sum_{n \geq 2} \frac{\sin nt}{\log n}$ converge en tout point (par le critère des séries alternées), sa somme est la fonction conjuguée de $f = \sum_{n \geq 2} \frac{\cos nt}{\log n}$ et on peut vérifier que $t \mapsto \sum_{n \geq 2} \frac{\sin nt}{\log n}$ n'est pas intégrable. Il existe donc des fonctions intégrables dont la fonction conjuguée n'est pas intégrable.

Remarque 5.20. Le fait que $\sum_{n \geq 2} \frac{\sin nt}{\log n}$ n'est pas une série de Fourier ne suffit pas à démontrer qu'elle ne définit pas une fonction intégrable. Néanmoins on montrera plus loin que si f et \tilde{f} sont intégrables, alors $\tilde{f}(re^{it})$ est l'intégrale de Poisson de \tilde{f} . Ceci permet alors de démontrer que si \tilde{f} est intégrable alors sa série de Fourier est la série conjuguée de celle de f ; ainsi si cette série n'est pas une série de Fourier alors \tilde{f} ne peut être intégrable.

Ce qui nous fait défaut ici est que nous n'avons que la convergence radiale ponctuelle (presque partout); nous ne pouvons donc pas contrôler la convergence d'intégrales de telles fonctions.

5.2.2 Fonction de répartition

La mesure de Lebesgue de $E \subset \mathbb{T}$ est notée $|E|$.

Définition 5.21. La fonction de répartition d'une fonction sur \mathbb{T} mesurable à valeurs réelles est la fonction

$$m(x) = m_f(x) = |\{t \in \mathbb{T}; f(t) \leq x\}|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Les fonctions de répartition sont croissantes et continues à droite; elles tendent vers 0 en $-\infty$ et vers 2π en $+\infty$. On peut donc associer à m_f sa mesure de Stieltjes-Lebesgue notée dm_f (voir l'exercice 3.30). C'est une mesure de Borel positive (car m_f croît) de masse totale 2π . dm_f est la mesure image par f de la mesure de Lebesgue sur \mathbb{T} .

Lemme 5.22. Pour $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée ou continue positive, on a

$$(5.16) \quad \int_{\mathbb{T}} F(f(t)) dt = \int_{\mathbb{R}} F(x) dm_f(x).$$

Démonstration. Si F est une fonction en escalier i.e. $F = \sum_{k=1}^n f_k \mathbf{1}_{]a_k, a_{k+1}]}$, (5.16) est clairement vrai par la définition de m_f : en effet,

$$(5.17) \quad \int_{\mathbb{T}} F(f(t)) dt = \sum_{k=1}^n f_k \int_{\mathbb{T}} \mathbf{1}_{]a_k, a_{k+1}]}(f(t)) dt = \sum_{k=1}^n f_k [m_f(a_{k+1}) - m_f(a_k)] = \int_{\mathbb{R}} F(x) dm_f(x).$$

Supposons maintenant que F est continue bornée (non identiquement nulle). Les deux intégrales dans (5.16) sont bien définies. Pour $\varepsilon > 0$, on sait qu'il existe $X_\varepsilon > 0$ tel que $m_f(-X_\varepsilon) + (2\pi - m_f(X_\varepsilon)) \leq \varepsilon/(4\|F\|)$. Ainsi on a

$$(5.18) \quad \int_{\mathbb{T}} |F(f(t))| (\mathbf{1}_{f(t) \leq -X_\varepsilon} + \mathbf{1}_{f(t) > X_\varepsilon}) dt + \left(\int_{]-\infty, -X_\varepsilon]} + \int_{]X_\varepsilon, +\infty[} \right) |F(x)| dm_f(x) \leq \varepsilon/2.$$

D'autre part, on construit F_ε en escalier nulle hors de $] -X_\varepsilon, X_\varepsilon]$ telle que $\sup_{-X_\varepsilon < t \leq X_\varepsilon} |F(t) - F_\varepsilon(t)| \leq \varepsilon/8\pi$. Ainsi, par (5.17) et (5.18), on calcule

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{T}} F(f(t)) dt - \int_{\mathbb{R}} F(x) dm_f(x) \right| &\leq \left| \int_{\mathbb{T}} F_\varepsilon(f(t)) dt - \int_{\mathbb{R}} F_\varepsilon(x) dm_f(x) \right| + \int_{\mathbb{T}} |\mathbf{1}_{]-X_\varepsilon, X_\varepsilon]}(F - F_\varepsilon)|(f(t)) dt \\ &\quad + \int_{]-X_\varepsilon, X_\varepsilon]} |F - F_\varepsilon(x)| dm_f(x) + \varepsilon/2 \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on obtient (5.16) quand F est continue bornée. Supposons F est continue positive. Pour $n \geq 1$, on définit la fonction

$$x \mapsto F_n(x) = F(x) [\mathbf{1}_{]-n, n[} + \mathbf{1}_{[-n-1, -n]}(x + n + 1) + \mathbf{1}_{[n, n+1]}(n + 1 - x)].$$

La suite $(F_n)_n$ est une suite croissante de fonctions positives continues bornées qui converge ponctuellement vers F . Par le théorème de convergence monotone et ce qui vient d'être montré pour les fonctions continues bornées, on sait que

$$\int_{\mathbb{T}} F(f(t)) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{T}} F_n(f(t)) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} F_n(x) dm_f(x) = \int_{\mathbb{R}} F(x) dm_f(x).$$

Ceci achève la preuve du lemme 5.22. □

Définition 5.23. Pour $0 < p < +\infty$, on dit qu'une fonction mesurable f est de type L^p faible s'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $\lambda > 0$

$$(5.19) \quad |\{t \in \mathbb{T}; |f(x)| > \lambda\}| = 2\pi - m_{|f|}(\lambda) \leq C\lambda^{-p}.$$

Toute fonction dans $L^p(\mathbb{T})$ est de type L^p faible. En effet, par le lemme 5.22, pour $\lambda > 0$, on a

$$(5.20) \quad \|f\|_p^p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} x^p dm_{|f|}(x) \geq \frac{1}{2\pi} \int_\lambda^{+\infty} x^p dm_{|f|}(x) \geq \frac{\lambda^p}{2\pi} \int_\lambda^{+\infty} dm_{|f|}(x) = \frac{\lambda^p}{2\pi} (2\pi - m_{|f|}(\lambda)).$$

On voit que l'on peut prendre $C = 2\pi\|f\|_p^p$.

Il est facile de trouver des fonction de type L^p faible qui ne sont pas L^p ; $t \in \mathbb{T} \mapsto |\sin t|^{-1/p}$ est un exemple.

Lemme 5.24. *Si f est de type L^p faible alors $f \in L^{p'}(\mathbb{T})$ si $0 < p' < p$.*

Démonstration. En intégrant par parties et en utilisant (5.19), on calcule

$$\begin{aligned} \|f\|_{p'}^{p'} &= \int_0^{+\infty} x^{p'} dm_{|f|}(x) \geq m_{|f|}(1) + \int_1^{+\infty} x^{p'} dm_{|f|}(x) \\ &= m_{|f|}(1) - \left[x^{p'} (2\pi - m_{|f|}(x)) \right]_1^{+\infty} + p' \int_1^{+\infty} (2\pi - m_{|f|}(x)) x^{p'-1} dx \\ &\leq 2\pi + Cp' \int_1^{+\infty} x^{p'-p-1} dx < +\infty. \end{aligned}$$

□

5.2.3 L'opérateur de conjugaison

On va maintenant étudier la conjugaison en tant qu'application linéaire. On verra, en particulier, qu'elle envoie les fonctions intégrables dans celles de type intégrable et qu'elle est continue sur $L^p(\mathbb{T})$ pour tout $1 < p < +\infty$ (théorème de Riesz).

Théorème 5.25. *Si f est intégrable alors \tilde{f} est de type L^1 faible.*

Démonstration. Supposons que f est à valeurs positives et que $\|f\|_1 = 1$. Soit $\lambda > 1$. On veut estimer la mesure de Lebesgue de l'ensemble des points t où $|\tilde{f}(t)| > \lambda$. Par la définition de $\tilde{f}(t)$ et le théorème de convergence dominée, il suffit pour cela d'estimer $|\{|\tilde{f}(re^{it})| > \lambda\}|$ pour $0 < r < 1$

Pour cela, on considère la fonction

$$H_\lambda(z) = 1 + \frac{1}{\pi} \arg \frac{z - i\lambda}{z + i\lambda} = 1 + \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \log \frac{z - i\lambda}{z + i\lambda}.$$

Elle est harmonique et à valeurs positive dans le demi-plan $\{z; \operatorname{Re} z > 0\}$ (ici le logarithme est la branche principale du logarithme complexe). Ses lignes de niveau $\{z; H_\lambda(z) = x\}$ sont des arcs de cercle passant par les points $i\lambda$ et $-i\lambda$. La ligne de niveau $\{z; H_\lambda(z) = 1/2\}$ est le demi-cercle $\{\lambda e^{i\theta}; -\pi/2 < \theta < \pi/2\}$. Ainsi, si $|z| > \lambda$ on a $H_\lambda(z) > 1/2$. D'autre part, on a

$$H_\lambda(1) = 1 - \frac{2}{\pi} \arctan \lambda < \frac{2}{\pi\lambda}.$$

La fonction $H_\lambda(f(z) + i\tilde{f}(z))$ est une fonction harmonique (cf 5.6) bien définie dans D ; la propriété de la moyenne nous dit alors que, pour $0 \leq r < 1$,

$$(5.21) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_\lambda(f(re^{it}) + i\tilde{f}(re^{it})) dt = H_\lambda(f(0)) = H_\lambda(1) < \frac{2}{\pi\lambda}$$

en se souvenant que $f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(e^{it}) dt = \|f\|_1 = 1$ et que $\tilde{f}(0) = 0$ par définition.

Comme $H_\lambda(f + i\tilde{f}) \geq 1/2$ si $|f + i\tilde{f}| > \lambda$, on obtient que, pour $0 \leq r < 1$,

$$\begin{aligned} \left| \left\{ t; |\tilde{f}(re^{it})| > \lambda \right\} \right| &\leq \left| \left\{ t; |f(re^{it}) + \tilde{f}(re^{it})| > \lambda \right\} \right| \leq \left| \left\{ t; H_\lambda(f(re^{it}) + i\tilde{f}(re^{it})) > \frac{1}{2} \right\} \right| \\ &\leq 2 \int_0^{2\pi} H_\lambda(f(re^{it}) + i\tilde{f}(re^{it})) dt \leq \frac{8}{\lambda}. \end{aligned}$$

Ainsi, par homogénéité, pour $f \geq 0$, on a

$$\left| \left\{ t; |\tilde{f}(re^{it})| > \lambda \right\} \right| \leq \frac{8\|f\|_1}{\lambda}.$$

Pour traiter le cas général i.e. quand f intégrable à valeurs complexes, on décompose $f = f_1 - f_2 + if_3 - if_4$ où $(f_i)_{1 \leq i \leq 4}$ sont mesurables positives et $f_1 f_2 = f_3 f_4 = 0$. Alors $\|f_i\|_1 \leq \|f\|_1$ et, par linéarité, on a $\tilde{f} = \tilde{f}_1 - \tilde{f}_2 + i\tilde{f}_3 - i\tilde{f}_4$. Ainsi

$$\left| \left\{ t; |\tilde{f}(re^{it})| > \lambda \right\} \right| \leq \sum_{j=1}^4 \left| \left\{ t; |\tilde{f}_j(re^{it})| > \lambda/4 \right\} \right|.$$

Ainsi, par homogénéité, on obtient que, pour $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $\lambda > 0$, on a

$$(5.22) \quad \left| \left\{ t; |\tilde{f}(re^{it})| > \lambda \right\} \right| \leq \frac{2^8 \|f\|_1}{\lambda}$$

Ceci achève la preuve du théorème 5.25. □

On déduit un corollaire direct de ce résultat et du lemme 5.24.

Corollaire 5.26. *Si f est intégrable sur \mathbb{T} alors $\tilde{f} \in L^p(\mathbb{T})$ pour tout $0 < p < 1$.*

La méthode employée dans la preuve du théorème 5.25 fournit des renseignements supplémentaires si f est supposée bornée.

Théorème 5.27. *Si f est à valeurs réelles telle que $\|f\|_\infty \leq 1$ alors pour $0 \leq \alpha < \pi/2$, on a*

$$(5.23) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\alpha|\tilde{f}(e^{it})|} dt \leq \frac{2}{\cos \alpha}.$$

Démonstration. Posons $F(z) = \tilde{f}(z) - if(z)$. Comme $\cos(\alpha f(z)) \geq \cos(\alpha)$ et que f et \tilde{f} sont à valeurs réelles, on a

$$(5.24) \quad \operatorname{Re} \left(e^{\alpha F(z)} \right) = e^{\alpha \tilde{f}(z)} \cos(\alpha f(z)) \geq e^{\alpha \tilde{f}(z)} \cos \alpha.$$

De plus, comme $z \in D \mapsto \operatorname{Re} \left(e^{\alpha F(re^{it})} \right)$ est harmonique et que $\tilde{f}(0) = 0$, pour $0 \leq r < 1$, on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \left(e^{\alpha F(re^{it})} \right) dt = \operatorname{Re} \left(e^{\alpha F(0)} \right) = \cos(\alpha f(0)) \leq 1.$$

Ainsi, par (5.24), on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\alpha \tilde{f}(re^{it})} dt \leq \frac{1}{\cos \alpha}.$$

De même on démontre

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-\alpha \tilde{f}(re^{it})} dt \leq \frac{1}{\cos \alpha}.$$

Enfin, (5.23) est obtenue en sommant ces deux inégalités et en laissant r tendre vers 1^- . □

Corollaire 5.28. *Si $\|f\|_\infty \leq 1$ on a*

$$(5.25) \quad m_{|\tilde{f}|}(\lambda) > 2\pi \left(1 - \frac{4}{\cos \sqrt{2}} e^{-\lambda} \right).$$

Démonstration. On décompose f en partie réelle et imaginaire i.e. $f = f_r + if_i$. Comme $\tilde{f} = \tilde{f}_r + i\tilde{f}_i$, si $|\tilde{f}(re^{it})| > \lambda$ alors soit $|\tilde{f}_r(re^{it})| > \lambda/\sqrt{2}$ soit $|\tilde{f}_i(re^{it})| > \lambda/\sqrt{2}$. Ainsi, par (5.23) pour $\alpha = \sqrt{2}$, on obtient

$$\left| \left\{ t; |\tilde{f}_\bullet(re^{it})| > \lambda/\sqrt{2} \right\} \right| < \frac{4\pi}{\cos \sqrt{2}} e^{-\lambda} \quad \text{pour } \bullet \in \{i, r\}$$

ce qui donne immédiatement (5.25). □

On va maintenant voir que la fonction de répartition de la fonction conjuguée de l'indicatrice d'un ensemble mesurable ne dépend que de la mesure (de Lebesgue) de cet ensemble et non de l'ensemble lui même.

Théorème 5.29. *Soient $0 \leq \alpha \leq \pi$ et $E \subset \mathbb{T}$ un ensemble de mesure 2α . Soit $\mathbf{1}_E$ sa fonction indicatrice et $\mathbf{1}_{]-\alpha, \alpha[}$ celle de $] - \alpha, \alpha[$. Posons $m_E := m_{\mathbf{1}_E}$ et $m_\alpha := m_{\mathbf{1}_{]-\alpha, \alpha[}}$. Alors $m_E = m_\alpha$.*

Démonstration. Comme elles sont de mesure totale finie, pour montrer que les mesures boréliennes dm_E et dm_α coïncident, il suffit de montrer que

$$(5.26) \quad \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} dm_E(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} dm_\alpha(x), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

En effet, supposons (5.26). On a alors aussi pour $b \in \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i(x-b)\xi} dm_E(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{i(x-b)\xi} dm_\alpha(x), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

On peut alors multiplier cette équation par $e^{-a^2\xi^2/4}$ (pour $a > 0$) et intégrer en ξ sur \mathbb{R} en utilisant le théorème de Fubini pour obtenir

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-a^2\xi^2/4+i(x-b)\xi} d\xi \right) dm_E(x) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-a^2\xi^2/4+i(x-b)\xi} d\xi \right) dm_\alpha(x)$$

soit encore

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-(a\xi/2+i(x-b)/a)^2} d\xi \int_{\mathbb{R}} e^{-a^{-2}(x-b)^2} dm_E(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-(a\xi/2+i(x-b)/a)^2} d\xi \int_{\mathbb{R}} e^{-a^{-2}(x-b)^2} dm_\alpha(x).$$

Comme $a \int_{\mathbb{R}} e^{-(a\xi/2+i(x-b)/a)^2} d\xi = 2\sqrt{\pi}$ pour tout $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, on a, pour ces mêmes a et b ,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-a^{-2}(x-b)^2} dm_E(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-a^{-2}(x-b)^2} dm_\alpha(x).$$

Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue à support compact. On peut alors multiplier l'équation précédente par $\varphi(b)$ et intégrer en b sur \mathbb{R} pour obtenir par le théorème de Fubini et par un changement de variable, pour tout $a > 0$, l'égalité suivante

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(x-at) dm_E(x) \right) dt &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-a^{-2}(x-b)^2} \varphi(b) db \right) dm_E(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-a^{-2}(x-b)^2} \varphi(b) db \right) dm_\alpha(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(x-at) dm_\alpha(x) \right) dt. \end{aligned}$$

En laissant a tendre vers 0, comme $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$, le théorème de convergence dominée nous dit que, pour toute φ continue à support compact, on a $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dm_E(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dm_\alpha(x)$. Ainsi, par le théorème 1.19,

on a $m_E = m_\alpha$.

Démontrons maintenant (5.26). Fixons $\xi \in \mathbb{R}$ et considérons la fonction $z \mapsto F_\xi(z) := e^{\xi(f(z)+i\tilde{f}(z))}$ analytique dans D . Pour $f = \mathbf{1}_E$, par la formule de la moyenne pour $0 < r < 1$, on a

$$2\pi e^{\xi\alpha/\pi} = 2\pi F_\xi(0) = \int_{\mathbb{T}} F_\xi(re^{it}) dt = \int_{\mathbb{T} \setminus E} e^{i\xi\tilde{f}(re^{it})} dt + e^\xi \int_E e^{i\xi\tilde{f}(re^{it})} dt.$$

En laissant r tendre vers 1, on obtient

$$(5.27) \quad 2\pi e^{\xi\alpha/\pi} = \int_{\mathbb{T} \setminus E} e^{i\xi\tilde{f}(e^{it})} dt + e^\xi \int_E e^{i\xi\tilde{f}(e^{it})} dt.$$

En écrivant la même équation pour $-\xi$ et en passant au complexe conjugué, on obtient

$$(5.28) \quad \int_{\mathbb{T} \setminus E} e^{i\xi\tilde{f}(e^{it})} dt + e^{-\xi} \int_E e^{i\xi\tilde{f}(e^{it})} dt = 2\pi e^{-\xi\alpha/\pi}.$$

De (5.27) et (5.28), on tire

$$(5.29) \quad \int_{\mathbb{T} \setminus E} e^{i\xi\tilde{f}(e^{it})} dt = 2\pi \frac{\text{sh}\xi(1 - \frac{\alpha}{\pi})}{\text{sh}\xi} \quad \text{et} \quad \int_E e^{i\xi\tilde{f}(e^{it})} dt = 2\pi \frac{\sin \frac{\xi\alpha}{\pi}}{\sin \xi}.$$

On peut maintenant décomposer $m_{\tilde{f}} = n_1 + n_2$ où

$$n_1(\lambda) = |E \cap \{t; \tilde{f}(e^{it}) \leq \lambda\}| \quad \text{et} \quad n_2(\lambda) = |(\mathbb{T} \setminus E) \cap \{t; \tilde{f}(e^{it}) \leq \lambda\}|.$$

Ainsi, (5.29) se réécrit

$$(5.30) \quad \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} dn_1(x) = 2\pi \frac{\sin \frac{\xi\alpha}{\pi}}{\sin \xi} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} dn_2(x) = 2\pi \frac{\text{sh}\xi(1 - \frac{\alpha}{\pi})}{\text{sh}\xi}.$$

Donc n_1 et n_2 sont déterminées par la seule valeur de α . Elles sont donc les mêmes pour \tilde{f} et $\widetilde{\mathbf{1}_{]-\alpha, \alpha[}}$. On obtient ainsi que les fonctions de répartition de \tilde{f} et $\widetilde{\mathbf{1}_{]-\alpha, \alpha[}}$ coïncident. En fait, on voit de plus que les fonctions de répartition de $\tilde{f}|_E$ et celle de $\left(\widetilde{\mathbf{1}_{]-\alpha, \alpha[}}\right)|_{]-\alpha, \alpha[}$ coïncident également. \square

Par un calcul direct, la série de Fourier de $\mathbf{1}_{]-\alpha, \alpha[}$ est

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\sin n\alpha}{\pi n} e^{int} = \frac{\alpha}{\pi} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\alpha}{\pi n} \cos nt.$$

Donc, pour $0 \leq r < 1$, on a

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{1}_{]-\alpha, \alpha[}}(re^{it}) &= 2 \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \frac{\sin n\alpha}{\pi n} \sin nt = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \frac{\cos n(t - \alpha) - \cos n(t + \alpha)}{\pi n} \\ &= \frac{1}{\pi} \text{Re} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} r^n e^{in(t-\alpha)} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} r^n e^{in(t+\alpha)} \right) = \frac{1}{\pi} \log \left| \frac{1 - re^{i(t-\alpha)}}{1 - re^{i(t+\alpha)}} \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \log \frac{1 + r^2 - 2r \cos(t - \alpha)}{1 + r^2 - 2r \cos(t + \alpha)}. \end{aligned}$$

Donc, en prenant la limite quand $r \rightarrow 1^-$, on trouve

$$(5.31) \quad \widetilde{\mathbf{1}}_{]-\alpha, \alpha[}(e^{it}) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1 - \cos(t - \alpha)}{1 - \cos(t + \alpha)}.$$

On va maintenant estimer la mesure de l'ensemble $\{t; \left| \widetilde{\mathbf{1}}_{]-\alpha, \alpha[}(e^{it}) \right| > \lambda\}$. Comme $1 = \mathbf{1}_{[-\pi, -\alpha] \cup [\alpha, \pi]} + \mathbf{1}_{]-\alpha, \alpha[}$ on a $\widetilde{\mathbf{1}}_{]-\alpha, \alpha[}(e^{it}) = -\widetilde{\mathbf{1}}_{[-\pi, -\alpha] \cup [\alpha, \pi]}(e^{it})$. Or $|\pi, -\alpha] \cup [\alpha, \pi| = 2(\pi - \alpha)$. Donc, par le théorème 5.29

$$\left| \{t; \left| \widetilde{\mathbf{1}}_{]_{\alpha-\pi, \pi-\alpha}[}(e^{it}) \right| > \lambda\} \right| = \left| \{t; \left| \widetilde{\mathbf{1}}_{]-\alpha, \alpha[}(e^{it}) \right| > \lambda\} \right|$$

On peut donc supposer que $\alpha \in]0, \pi/2[$.

D'autre part, comme $\widetilde{\mathbf{1}}_{]-\alpha, \alpha[}(e^{it})$ est impaire, il suffit d'estimer $\{t; \widetilde{\mathbf{1}}_{]-\alpha, \alpha[}(e^{it}) > \lambda\}$. Pour cela, on développe $\cos(t - \alpha) = \cos(2\alpha) \cos(t + \alpha) + \sin(t + \alpha) \sin(2\alpha)$ et comme $\sin 2\alpha > 0$, on calcule

$$\begin{aligned} \left\{ t; \widetilde{\mathbf{1}}_{]-\alpha, \alpha[}(e^{it}) > \lambda \right\} &= \left\{ t; \frac{1 - \cos(t - \alpha)}{1 - \cos(t + \alpha)} > e^{2\pi\lambda} \right\} \\ &\subset \left\{ t; \frac{\cos 2\alpha(1 - \cos(t + \alpha)) + 1 - \cos 2\alpha + \sqrt{1 - \cos^2(t + \alpha)} \sin 2\alpha}{1 - \cos(t + \alpha)} > e^{2\pi\lambda} \right\} \\ &\subset \left\{ t; \frac{2 \sin \alpha}{\sqrt{1 - \cos(t + \alpha)}} \left(\sqrt{2} \cos \alpha + \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \cos(t + \alpha)}} \right) > e^{2\pi\lambda} - \cos 2\alpha \right\} \\ &\subset \left\{ t; \left(\frac{\cos \alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \cos(t + \alpha)}} \right)^2 > \frac{1}{2} (e^{2\pi\lambda} + \sin^2 \alpha) \right\}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \left\{ t; \widetilde{\mathbf{1}}_{]-\alpha, \alpha[}(e^{it}) > \lambda \right\} &\subset \left\{ t; \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \cos(t + \alpha)}} > \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{e^{2\pi\lambda} + \sin^2 \alpha} - \cos \alpha \right) \geq \sqrt{2} \operatorname{sh}(\pi\lambda) \right\} \\ &\subset \left\{ t; |t + \alpha| < \arccos \left(1 - \frac{\sin^2 \alpha}{2 \operatorname{sh}^2 \pi\lambda} \right) \right\} \\ &\subset \left\{ t; |t + \alpha| < \sqrt{2} \frac{\sin \alpha}{\operatorname{sh} \pi\lambda} \right\}. \end{aligned}$$

On vient donc de démontrer le

Corollaire 5.30. Soit $E \subset \mathbb{T}$ de mesure 2α . Pour $\lambda > 0$, on a $\left| \{t; \left| \widetilde{\mathbf{1}}_E(e^{it}) \right| > \lambda\} \right| < 4\sqrt{2} \frac{|\sin \alpha|}{\operatorname{sh} \pi\lambda}$.

Revenons à $L^1(\mathbb{T})$. On définit $\log^+ x = \max(\log x, 0)$ si $x > 0$ et 0 sinon.

Théorème 5.31. Si f mesurable telle que $f \log^+ |f| \in L^1(\mathbb{T})$ alors $\tilde{f} \in L^1(\mathbb{T})$.

Démonstration. On rappelle que $f \mapsto \tilde{f}$ est bornée de $L^2(\mathbb{T})$ dans lui-même et que sa norme est majorée par 1 (voir le corollaire 4.41. De (5.20) pour $p = 2$, on déduit

$$(5.32) \quad m_{|\tilde{f}|}(\lambda) \geq 2\pi(1 - \|f\|_2^2 \lambda^{-2}).$$

Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ telle que $f \log^+ |f| \in L^1(\mathbb{T})$. Pour montrer que $\tilde{f} \in L^1(\mathbb{T})$, par le lemme 5.22, il suffit de montrer de montrer que $\int_1^{+\infty} \lambda dm_{|\tilde{f}|}(\lambda) < +\infty$ soit encore que la fonction $R \mapsto \int_1^R \lambda dm_{|\tilde{f}|}(\lambda) < +\infty$ reste bornée quand $R \rightarrow +\infty$. En intégrant par parties comme dans la preuve du lemme 5.24, on obtient

$$\int_1^R \lambda dm_{|\tilde{f}|}(\lambda) = \left[-\lambda \int_\lambda^{+\infty} dm_{|\tilde{f}|}(\lambda) \right]_1^R + \int_1^R (2\pi - m_{|\tilde{f}|}(\lambda)) d\lambda \leq 2\pi + \int_1^R (2\pi - m_{|\tilde{f}|}(\lambda)) d\lambda$$

Il suffit donc de montrer que

$$(5.33) \quad \limsup_{R \rightarrow +\infty} \int_1^R (2\pi - m_{|\tilde{f}|}(\lambda)) d\lambda < +\infty.$$

Pour estimer $2\pi - m_{|\tilde{f}|}(\lambda)$, on décompose $f = g + h$ où $g = f \mathbf{1}_{|f| \leq \lambda}$. Par linéarité, on a $\tilde{f} = \tilde{g} + \tilde{h}$ ce qui implique

$$(5.34) \quad \{t; |\tilde{f}(t)| > \lambda\} \subset \{t; |\tilde{g}(t)| > \lambda/2\} \cup \{t; |\tilde{h}(t)| > \lambda/2\}.$$

Comme $g \in L^2(\mathbb{T})$, on a

$$(5.35) \quad |\{t; |\tilde{g}(t)| > \lambda/2\}| \leq 8\pi\lambda^{-2} \|g\|_2^2 = 8\pi\lambda^{-2} \int_0^\lambda x^2 dm_{|f|}(x).$$

D'autre part, (5.22) nous donne

$$|\{t; |\tilde{h}(t)| > \lambda/2\}| \leq 256\lambda^{-1} \|h\|_1 = 256\lambda \int_\lambda^{+\infty} x dm_{|f|}(x).$$

Or pour $x \leq \lambda > 1$, on a $\sqrt{\log x} \geq \sqrt{\log \lambda}$; donc

$$(5.36) \quad |\{t; |\tilde{h}(t)| > \lambda/2\}| \leq \frac{256}{\lambda\sqrt{\log \lambda}} \int_\lambda^{+\infty} x\sqrt{\log x} dm_{|f|}(x).$$

Par (5.34), (5.35) et (5.36), on a

$$2\pi - m_{|\tilde{f}|}(\lambda) \leq 8\pi\lambda^{-2} \int_0^\lambda x^2 dm_{|f|}(x) + \frac{256}{\lambda\sqrt{\log \lambda}} \int_\lambda^{+\infty} x\sqrt{\log x} dm_{|f|}(x).$$

Pour obtenir (5.33) et le théorème 5.31, il nous suffit donc de montrer que, quand $R \rightarrow +\infty$,

$$(5.37) \quad \int_1^{+\infty} \lambda^{-2} \left(\int_0^\lambda x^2 dm_{|f|}(x) \right) d\lambda + \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{\lambda\sqrt{\log \lambda}} \int_\lambda^{+\infty} x\sqrt{\log x} dm_{|f|}(x) \right) d\lambda < +\infty$$

On sait que la mesure $dm_{|f|}$ est positive, de masse totale 2π et, par notre hypothèse, que

$$(5.38) \quad \int_1^{+\infty} x \log x dm_{|f|}(x) < +\infty.$$

Pour démontrer (5.37), on applique le théorème de Fubini de la façon suivante. Le domaine d'intégration de la première intégrale est le trapèze $\{(x, \lambda); 1 \leq \lambda \leq +\infty, 0 \leq x \leq \lambda\}$; en intégrant d'abord en λ , on calcule

$$\int_1^{+\infty} \lambda^{-2} \left(\int_0^\lambda x^2 dm_{|f|}(x) \right) d\lambda = \int_0^1 x^2 dm_{|f|}(x) + \int_1^{+\infty} x^2 x^{-1} dm_{|f|}(x) = 2\pi + \int_1^{+\infty} x dm_{|f|}(x) < +\infty$$

Le domaine d'intégration de la seconde intégrale dans (5.37) est la bande $\{(x, \lambda); 1 \leq \lambda \leq +\infty, \lambda \leq x\}$; en intégrant d'abord en λ , on calcule

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{\lambda \sqrt{\log \lambda}} \int_\lambda^{+\infty} x \sqrt{\log x} dm_{|f|}(x) \right) d\lambda = 2 \int_1^{+\infty} x \log x dm_{|f|}(x) < +\infty.$$

Ceci achève la preuve du théorème 5.31. \square

On peut adapter cette analyse aux fonctions intégrables sur \mathbb{R} . On remplacera alors la fonction de répartition que nous avons définie par une autre de ces versions $|\{x \in \mathbb{R}; |f(x)| > \lambda\}|$; elle a l'avantage d'être finie pour tout $\lambda > 0$ pour une fonction f intégrable sur \mathbb{R} .

Il est utile de définir une discrétisation de la fonction de répartition.

Définition 5.32. Soit $(X, \mathcal{S}, \lambda)$ un espace mesuré. Pour f mesurable sur X et $n \in \mathbb{Z}$, on pose

$$m_n = m_n(f) = \lambda(\{x \in \mathbb{T}; 2^{n-1} < |f(x)| \leq 2^n\}).$$

Comme

$$(5.39) \quad \begin{aligned} \|f\|_{L^p}^p &\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{np} m_n(f) \leq 2^p \|f\|_{L^p}^p \\ \text{et, pour } t > 0, \quad \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ 2^n \geq t}} m_n(f) &\leq \lambda(\{x \in \mathbb{T}; t < |f(x)|\}) \leq \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ 2^n \geq t}} m_{n-1}(f) \end{aligned}$$

pour $1 \leq p < +\infty$, on a

1. f est de type L^p -faible si et seulement si la suite $(m_n(f) 2^{np})_{n \in \mathbb{Z}}$ est bornée.
2. $f \in L^p(\lambda)$ si et seulement si $\sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{np} m_n(f) < +\infty$.

En utilisant une technique similaire à celle employées dans la preuve du théorème 5.31, nous démontrons

Théorème 5.33 (Riesz). Pour $1 < p < +\infty$, l'application linéaire $f \mapsto \tilde{f}$ est continue sur $L^p(\mathbb{T})$.

La preuve du théorème 5.31 utilise une méthode d'interpolation. Par sa définition (voir la définition 4.6), l'application linéaire $f \mapsto \tilde{f}$ est continue sur $L^2(\mathbb{T})$ de norme 1. D'autre part, dans le théorème 5.25, on a obtenue que cette application envoie $L^1(\mathbb{T})$ dans L^1 -faible. Dans la preuve du théorème 5.31, on a utilisé ces deux informations pour obtenir une information sur le comportement de cette application linéaire sur l'espace $L \log^+ L(\mathbb{T}) = \{f \in L^1(\mathbb{T}); |f(\cdot)| \log^+ |f(\cdot)| \in L^1(\mathbb{T})\}$, un espace intermédiaire entre $L^2(\mathbb{T})$ et $L^1(\mathbb{T})$ i.e. $L^2(\mathbb{T}) \subset L \log^+ L(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$.

Preuve du théorème 5.33. Soit $1 < p < +\infty$. Comme dit, on sait que l'application $f \mapsto \tilde{f}$ est une application linéaire continue sur $L^2(\mathbb{T})$. D'autre part, si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, pour $f \in L^2(\mathbb{T}) \cap L^p(\mathbb{T})$ et $g \in L^2(\mathbb{T}) \cap L^q(\mathbb{T})$, on calcule

$$(5.40) \quad \langle \tilde{f}, g \rangle = \int_{\mathbb{T}} \tilde{f}(x) \overline{g(x)} dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} -i \operatorname{sgn}(n) f(\hat{n}) \overline{\hat{g}(n)} = - \int_{\mathbb{T}} f(x) \overline{\tilde{g}(x)} dx = -\langle f, \tilde{g} \rangle.$$

Supposons que l'on ait montré que $f \mapsto \tilde{f}$ est bornée par C sur $L^p(\mathbb{T})$ pour $1 < p \leq 2$, l'équation ci-dessus nous dit que \tilde{g} définit une forme linéaire continue sur $L^2(\mathbb{T}) \cap L^p(\mathbb{T})$ pour la norme L^p qui vérifie

$$|\langle f, \tilde{g} \rangle| \leq C \|g\|_{L^q} \|f\|_{L^p}$$

Cette forme se prolonge donc continûment à $L^p(\mathbb{T})$ (comme $L^2(\mathbb{T}) \cap L^p(\mathbb{T})$ contient les fonctions continues qui sont denses dans $L^p(\mathbb{T})$). Par le théorème 2.28, on obtient que, si $g \in L^q(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T})$ alors $\tilde{g} \in L^q(\mathbb{T})$ et que $\|\tilde{g}\|_{L^q} \leq C \|g\|_{L^q}$.

Il nous suffit donc de démontrer le théorème 5.33 pour $1 < p < 2$.

Remarque 5.34. L'égalité (5.40) montre que, sur $L^2(\mathbb{T})$, l'application linéaire $f \mapsto \tilde{f}$ est l'opposée de son adjoint; ceci reste vrai sur $L^p(\mathbb{T})$, l'adjoint agissant sur $L^q(\mathbb{T})$, le dual de $L^p(\mathbb{T})$.

On suppose donc que $1 < p < 2$. Par le premier encadrement dans (5.39), il nous suffit d'estimer les $(m_n(\tilde{f}))_{n \in \mathbb{Z}}$. Décomposons $f = f_n + g_n$ où $f_n := f \mathbf{1}_{\{|f(x)| > 2^n\}}$. Comme $1 < p < 2$, on sait que $f_n \in L^1(\mathbb{T})$ et $g_n \in L^2(\mathbb{T})$. Par (5.39), on a donc

$$(5.41) \quad \|f_n\|_{L^1} \leq \sum_{k \geq n+1} 2^k m_k(f) \quad \text{et} \quad \|g_n\|_{L^2} \leq \sum_{k \leq n} 2^{2n} m_k(f).$$

Par linéarité, $\tilde{f} = \tilde{f}_n + \tilde{g}_n$, Donc, par l'analogie de (5.34), on a

$$(5.42) \quad m_{n+1}(\tilde{f}) \leq |\{t; |\tilde{f}_n| \geq 2^{n-1}\}| + |\{t; |\tilde{g}_n| \geq 2^{n-1}\}|.$$

Ainsi, par (5.22), on a

$$|\{t; |\tilde{f}_n| > 2^{n-1}\}| \leq 2^{-n+9} \|f_n\|_{L^1} \leq 2^9 2^{-n} \sum_{k \geq n+1} 2^k m_k(f).$$

D'autre part, comme la conjugaison est de norme 1 sur $L^2(\mathbb{T})$, on a

$$|\{t; |\tilde{g}_n| > 2^{n-1}\}| \leq 2^{-2n+2} \|g_n\|_{L^2} \leq 4 2^{-2n} \sum_{k \leq n} 2^{2k} m_k(f).$$

Par (5.42) et (5.39), on en déduit

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}\|_{L^p}^p &\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{np} m_n(\tilde{f}) \leq 2^9 \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{np} \left(2^{-n} \sum_{k \geq n+1} 2^k m_k(f) + 2^{-2n} \sum_{k \leq n} 2^{2k} m_k(f) \right) \\ &\leq 2^9 \left(\sum_{\substack{(k,n) \in \mathbb{Z} \\ k \geq n}} 2^{(n-k)(p-1)} 2^{kp} m_k(f) + \sum_{\substack{(k,n) \in \mathbb{Z} \\ k \leq n}} 2^{(p-2)(n-k)} 2^{kp} m_k(f) \right) \\ &\leq 2^9 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{n \leq k} 2^{(n-k)(p-1)} + \sum_{n \geq k} 2^{(p-2)(n-k)} \right) 2^{kp} m_k(f) \\ &\leq 2^9 \left(\frac{1}{1-2^{1-p}} + \frac{1}{1-2^{p-2}} \right) \|f\|_{L^p}^p. \end{aligned}$$

Ceci achève la preuve du théorème 5.33. □