TD 1
Intégration, topologie, espaces L^p

1 Bases d'intégration (**)

Exercice 1. Convergence monotone pour des ensembles mesurables

Soit $(X, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré.

1. Soit $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E$ une suite croissante d'ensembles mesurables. Montrer que

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$$

Exprimer $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ *comme une union dénombrable de* $E_n \setminus \cup_{k=1}^{n-1} E_k$.

2. Soit $E \supset E_1 \supset E_2 \ldots$ une suite décroissante d'ensembles mesurables. Si au moins un des ensemble E_n est de mesure finie, montrer que

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

3. Donner un contre-exemple à l'hypothèse *au moins un des ensemble E_n est de mesure finie.*

Exercice 2. Lemme de Fatou

Soit $(X, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré et soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurable à valeurs positives. On définit, pour $x \in X$,

$$f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\inf_{p\geq n} f_p(x) \right) \in \bar{\mathbb{R}}_+$$

Montrer que f est une fonction mesurable à valeurs positives qui vérifie

$$\int f d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu$$

Exercice 3. Inégalité de Markov

Soit $(X, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to [0, +\infty]$ une fonction $\mathcal{E}$-mesurable. Montrer que pour tout $0 < a < \infty$:

$$\mu\left(\{x \in X : \ f(x) \geq a\}\right) \leq \frac{1}{a} \int_X f(x) d\mu(x).$$

Exercice 4. La mesurabilité passe à la limite

Soit $(X, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesurable et soit (Y, d) un espace métrique. Soit $f_n : X \to Y$ une suite de fonctions $\mathcal{E} - \mathcal{B}(Y)$ mesurables qui convergent ponctuellement vers $f : X \to Y$. Montrer que f est une fonction mesurable.

Exercice 5. Soit $(X, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré.

1. Soit $f : X \to [0, \infty]$ une fonction mesurable et $E \in \mathcal{E}$ tel que $\int_E f d\mu = 0$. Montrer que $f = 0$ μ p.p. sur E.
2. Supposons $f \in L^1(\mu)$ et $\int_E f d\mu = 0$ pour tout $E \in \mathcal{E}$. Montrer que $f = 0$ μ p.p. sur X.
3. Supposons $f \in L^1(\mu)$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ et

$$\left| \int_X f d\mu \right| = \int_X |f| d\mu.$$

Montrer qu'il existe une constante $\alpha \in \mathcal{U}$ tel que $\alpha f = |f|$ μ p.p. sur X.

Exercice 6. Lignes de niveau

Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$, un espace mesuré. On suppose que μ est sigma-finie. Soit $f : E \to \mathbb{R}^+$, une fonction $\mathcal{E}$-mesurable. On note ℓ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^+$. On rappelle que $\{f > a\}$ désigne l'ensemble $\{x \in E : f(x) > a\}$

1. Montrer que l'application $a \in \mathbb{R}^+ \to \mu\big(\{f > a\}\big) \in [0, \infty]$ est bien définie et borélienne.
2. En utilisant le théorème de Fubini, montrer que

$$\int_E f \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^+} \mu\big(\{f > a\}\big) \, d\ell(a) \, .$$

3. Plus généralement, soit un réel $p \geq 1$. Montrer que

$$\int_E f^p \, d\mu = p \int_{\mathbb{R}^+} a^{p-1} \mu\big(\{f > a\}\big) \, d\ell(a)$$

Exercice 7. Montrer que le graphe d'une fonction borélienne de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ est de mesure nulle.

2 Inégalités

Exercice 8. Inégalité d'Hölder $(**)$

Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré et $f, g : X \to \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables. Soit $p, q \in [1, +\infty]$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer que si $f \in L^p(\mu)$ et $g \in L^q(\mu)$ alors fg est intégrable, avec

$$\left| \int fg \, d\mu \right| \leq \|f\|_{L^p(\mu)} \|g\|_{L^q(\mu)}$$

et décrire les cas d'égalité.

Exercice 9. Inégalité de Jensen

Soit μ une mesure positive sur une $\mathcal{E}-$algèbre $\mathcal{S}$ de Ω telle que $\mu(\Omega) = 1$. Soit $f \in L^1(\mu)$ à valeurs réelles telle que $a < f(x) < b$ pour tout $x \in \Omega$ et soit ϕ une fonction convexe sur $]a, b[$. Alors on a l'inégalité

$$\phi\left(\int_\Omega f d\mu\right) \leq \int_\Omega (\phi \circ f) d\mu.$$

3 Topologie et boréliens

Exercice 10. Sous-ensemble $E \subset [0, 1]$ qui n'est pas Lebesgue mesurable

On considère le groupe $\mathbb{R}$ de réels par rapport à l'addition et $\mathbb{Q}$ le sous-groupe de rationnels. On considère les classes du quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Ces classes forment une partition de $\mathbb{R}$, appelé partition de Vitali. Par l'axiome du choix il existe un ensemble $E \subset [0, 1]$ qui intersectent chaque classe exactement en un point. On démontre que E n'est pas mesurable.

Exercice 11.($*$) Donner, pour tout $\epsilon > 0$, un exemple d'un ensemble ouvert, dense dans $\mathbb{R}$, et de mesure de Lebesgue inférieure à ϵ.

Exercice 12. Construisez un ensemble borelien $E \subset \mathbb{R}$ tel que

$$0 < m(E \cap I) < m(I)$$

pour tout intervalle non-vide I. Est-il possible d'avoir $m(E) < \infty$?

Exercice 13. Ensemble de Cantor ($**$)

Soit $I_0 = [0, 1]$. Soit $I_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ obtenu de I_0 en enlevant un intervalle de longueur $\frac{1}{3}$ au milieu. Soit $I_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$ obtenu de I_1 en enlevant un intervalle correspondant au tiers de chaque intervalle de I_1. Formellement on a

$$I_n = \cup_{a_1,\ldots,a_n \in \{0,2\}} \left[\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{3^i}, \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{3^i} + \frac{1}{3^n}\right].$$

On note $C = \cap_{n=1}^\infty I_n$. C'est l'ensemble de Cantor. Montrer que c'est un ensemble compact, non-dénombrable et de mesure de Lebesgue zero.

Exercice 14.($**$) Soit $f \in L^1(\mu)$ et soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout ensemble E mesurable, de mesure plus petite que δ, $\mu(E) < \delta$, on a $\int_E |f| d\mu < \epsilon$.

Exercice 15.($**$) Soit $f \in L^p$ pour un p tel que $0 < p < \infty$. Montrer que $\{x \ : \ f(x) \neq 0\}$ est σ-fini.

Exercice 16.($*$)

1. Montrer que $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathscr{P}(\mathbb{N}) = \mathscr{P}(\mathbb{N}^2)$.

2. Soit μ la mesure de comptage de $\mathbb{N}$. Montrer que $\mu \otimes \mu$ est la mesure de comptage de $\mathbb{N}^2$.

Exercice 17.($*$) Existe-t-il une σ-algèbre infinie qui contient seulement un nombre dénombrable de termes ?

4 Suites de fonctions et espaces L^p

Exercice 18. Construisez une suite de fonctions continues sur $[0,1]$ t.q. $0 \leq f_n \leq 1$ et

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 0,$$

mais telle que les suites $(f_n(x))_n$ ne convergent pour aucun $x \in [0,1]$.

Exercice 19. Théorème d'Egorov ($*$)

Soit $f_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions mesurables qui converge ponctuellement presque partout vers une autre fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$. Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe un ensemble mesurable A, de mesure plus petite que ϵ, tel que f_n converge uniformément en dehors de A sur tout compact.

Exercice 20. Réciproque partielle de la convergence dominée

Soient $(X, \mathcal{M}, m)$ un espace mesuré, $1 \leq p < \infty$, $(f_n)_n \subset L^p$ et $f \in L^p$. On suppose que $f_n \to f$ in L^p quand $n \to \infty$. Alors il existe une sous-suite $(f_{n_k})_k$ telle que :

— $f_{n_k} \to f$ p.p. quand $k \to \infty$.

— il existe $F \in L^p$ telle que $|f_{n_k}| \leq F$ p.p. pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 21. Soit $(X, \mathcal{M}, m)$ un espace mesuré, soit $1 \leq p \leq \infty$ et soit q son conjugué : $q = \frac{p}{p-1}$ si $1 < p < \infty$, $q = \infty$ si $p = 1$ et $q = 1$ si $p = \infty$. On considère deux suites de fonctions $(f_n)_n \subset L^p$ telle que $f_n \to f$ in L^p et $(g_n)_n \subset L^q$ telle que $g_n \to g \in L^q$. Montrer que

$$\int f_n g_n dm \to \int f g dm.$$

Exercice 22. Soit $(X, \mathcal{M}, m)$ un espace mesuré. On considère deux suites de fonctions $(f_n)_n \subset L^1$ telle que $f_n \to f$ in L^1 et $(g_n)_n \subset L^\infty$ telle que $g_n \to g$ p.p. Montrer par un contre-exemple qu'on n'a pas toujours $\int f_n g_n dm \to \int f g dm$. Trouver une condition qui garantit la convergence.

Exercice 23.($*$) Soit $(f_n)_n \subset L^p$ et $f \in L^p$ pour un $p \in [1, \infty[$. On suppose que $f_n \to f$ p.p. et que $||f_n||_p \to ||f||_p$, quand $n \to \infty$.

1. Supposons $p = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $g_n = |f_n| + |f| - |f_n - f|$. En utilisant le lemme de Fatou, montrer que $f_n \to f$ in L^1.
2. On suppose maintenant $p \in]1, \infty[$. En utilisant le lemme de Fatou pour une suite convenable, montrer que $f_n \to f$ in L^p.

Exercice24.$(*)$ On note $L^1 = L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $B_n = \cup_{i=0}^{n-1} \left] \frac{i}{n}, \frac{i}{n} + \frac{1}{n^3} \right[$. On définit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f_n = n^2 1_{B_n}$.

1. Montrer que $f_n \in L^1$ et $||f_n||_1 = 1$.
2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soit $C_p = \cup_{k=p}^{\infty} B_k$. Montrer que, pour $x \in \complement C_p$, $f_n(x) \to 0$.
3. Montrer que $f_n(x) \to 0$ p.p.
4. Soit $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que

$$\int f_n \varphi d\lambda - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \varphi\left(\frac{i}{n}\right) \to 0, \text{ quand } n \to \infty.$$

   En déduire que $\int f_n \varphi d\lambda \to \int_0^1 \varphi(x) dx$.
5. Commenter par rapport au théorème de convergence dominée et au lemme de Fatou.