TD 1
Intégration, topologie, espaces L^p

1 Bases d'intégration (∗∗)

Exercice 1. Convergence monotone pour des ensembles mesurables

Soit $(X, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré.

1. Soit $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E$ une suite croissante d'ensembles mesurables. Montrer que
$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$$
Exprimer $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ *comme une union dénombrable de* $E_n \setminus \cup_{k=1}^{n-1} E_k$.
2. Soit $E \supset E_1 \supset E_2 \ldots$ une suite décroissante d'ensembles mesurables. Si au moins un des ensemble E_n est de mesure finie, montrer que
$$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$
3. Donner un contre-exemple à l'hypothèse *au moins un des ensemble* E_n *est de mesure finie.*

Solution de l'exercice 1.

1. On note $\tilde{E}_1 = E_1$ et $\tilde{E}_n = E_n \setminus \cup_{k=1}^{n-1} E_k$ pour $n \geq 2$.
Puisque $E_n = \cup_{k=1}^{n} \tilde{E}_k$ et que les $\tilde{E}_k$ sont deux à deux disjoints, il vient par σ-additivité
$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \mu(\cup_{n=1}^{\infty} \tilde{E}_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\tilde{E}_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \mu(\tilde{E}_n) = \lim_{N\to\infty} \mu(E_N).$$
2. Supposons que $\mu(E_{n_0}) < +\infty$ pour un certain n_0.
Alors quitte à poser $\tilde{E}_n = E_{n+n_0}$, on peut supposer que $\mu(E_1) < \infty$. On se ramène à la question précédente en posant $F_n = E_1 \setminus E_n$: la suite $(F_n)_n$ est alors croissante et d'après la question précédente, il vient que
$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} F_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_n)$$

En utilisant les lois de composition sur les mesures d'ensemble, on a

$$\begin{aligned}
\mu(\cap_{n=1}^{\infty} E_n) &= \mu(E_1 \backslash \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) \\
&= \mu(E_1) - \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) \\
&= \mu(E_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(F_n) \\
&= \mu(E_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(E_1) - \mu(E_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)
\end{aligned}$$

3. L'hypothèse au moins un E_n de mesure fini est essentielle : soit $E_n = [n, \infty[$. Alors la suite E_n est décroissante, $\mu(E_n) = \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\cap_{n\in\mathbb{N}} E_n = \emptyset$ donc $\mu(\cap_{n\in\mathbb{N}} E_n)$. Donc dans ce cas $\mu(\cap_{n=1}^{\infty} E_n) \neq \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$.

Exercice 2. Lemme de Fatou

Soit $(X, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré et soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurable à valeurs positives. On définit, pour $x \in X$,

$$f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\inf_{p\geq n} f_p(x) \right) \in \bar{\mathbb{R}}_+$$

Montrer que f est une fonction mesurable à valeurs positives qui vérifie

$$\int f d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu$$

Solution de l'exercice 2.

Comme $(f_n)_n$ est une suite de fonctions positives $g_n(x) = \inf_{p\geq n} f_p(x)$ est bien définie pour tout $x \in X$ et tout $n \in \mathbb{N}$.

C'est une suite de fonctions mesurables, en effet pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $a \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\begin{aligned}
g_n^{-1}(]-\infty, a]) &= \{x \in X \mid \exists p \geq n,\ f_p(x) \leq a\} \\
&= \cup_{p\geq n} \{x \in X \mid f_p(x) \leq a\} \\
&= \cup_{p\geq n} f_p^{-1}(]-\infty, a])
\end{aligned}$$

Comme l'ensemble des demi-droites $(]-\infty, a])_{a\in\mathbb{R}}$ engendre la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, nous avons bien montré que g_n est mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(g_n) est aussi croissante, en effet pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$, nous avons

$$\inf_{p\geq n} f_p(x) \leq \inf_{p\geq n+1} f_p(x)$$

Ainsi $f(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$ existe bien pour tout $x \in X$. De plus nous pouvons écrire que $f(x) = \sup_n g_n(x)$ et en déduire que f est mesurable par une démonstration semblable à la précédente.

Le théorème de convergence monotone assure que $\int_X g_n d\mu \to \int_X f d\mu$ et puisque la suite $(\int_X g_n d\mu)_n$ est croissante, nous avons aussi :

$$\lim_n \int_X g_n d\mu = \int_X \lim_n g_n d\mu$$

Fixons un $n \in \mathbb{N}$ alors pour tout $p \geq n$ et tout $x \in X$

$$g_n(x) \leq f_p(x)$$

En intégrant cette inégalité, nous obtenons pour $p \geq n$

$$\int_X g_n d\mu \leq \int_X f_p d\mu$$

Et en passant à l'infimum sur p, il vient

$$\int_X g_n d\mu \leq \inf_{p \geq n} \int_X f_p d\mu$$

Le membre de droite forme une suite indexée par n qui est croissante et positive, donc convergente. En passant à la limite dans l'inégalité précédente et en utilisant l'égalité plus haut démontrée il vient le résultat.

Remarque : En utilisant cette démonstration, on peut montrer que la mesurabilité passe à la limite ponctuelle dans la cas d'une suite de fonction à valeur dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Inégalité de Markov

Soit $(X, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to [0, +\infty]$ une fonction $\mathcal{E}$-mesurable. Montrer que pour tout $0 < a < \infty$:

$$\mu\left(\{x \in X : \ f(x) \geq a\}\right) \leq \frac{1}{a} \int_X f(x) d\mu(x).$$

Solution de l'exercice 3. Comme f est à valeurs positives, nous avons

$$\begin{aligned}\int_X f d\mu &\geq \int_{\{x \in X : \, f(x) \geq a\}} f d\mu \\ &\geq \int_{\{x \in X : \, f(x) \geq a\}} a d\mu \\ &\geq a\mu\{x \in X : \ f(x) \geq a\}\end{aligned}$$

Pour la deuxième identité on commence par considèrer f une fonction simple $f = \sum_{j=1}^{n} a_j 1_{E_j}$ pour $0 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \infty$ et E_j ensembles mesurables disjoints. Alors $\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = \sum_{j=1}^{n} a_j \lambda(E_j)$. D'autre part

$$\int_0^\infty \lambda\left(\{x \in \mathbb{R}^d : \ f(x) > y\}\right) dy = \int_0^{a_1} \lambda(\cup_{j=1}^n E_j) dy + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \lambda(\cup_{j=k+1}^n E_j) dy + \int_{a_n}^\infty \lambda(\emptyset) dy.$$

Donc $\int_0^\infty \lambda\left(\{x \in \mathbb{R}^d : \ f(x) > y\}\right) dy = a_1(\sum_{j=1}^{n} \lambda(E_j)) + \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)(\sum_{j=k+1}^{n} \lambda(E_j))$. On regroupe les termes et on obtient

$$\int_0^\infty \lambda\left(\{x \in \mathbb{R}^d : \ f(x) > y\}\right) dy = \lambda(E_1)a_1 + \lambda(E_2)(a_2 - a_1 + a_1) + \dots.$$

Il résulte que $\int_0^\infty \lambda\left(\{x \in \mathbb{R}^d : \ f(x) > y\}\right) dy = \sum_{j=1}^{n} a_j \lambda(E_j) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx$. Afin d'obtenir le résultat pour f mésurable à valeurs positives, on l'aproche par deux suites de fonctions simples, φ_n et ψ_n, telles que $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ et $\lim_n \int \varphi_n dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = \lim_n \int \psi_n dx$. On utilise

$$\{x \in \mathbb{R}^d : \ \varphi_n(x) \geq y\} \leq \{x \in \mathbb{R}^d : \ f(x) \geq y\} \leq \{x \in \mathbb{R}^d : \ \psi_n(x) \geq y\}$$

pour obtenir

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_n(x)dx \leq \int_0^\infty \lambda\left(\{x \in \mathbb{R}^d : \ f(x) > y\}\right) dy \leq \int_{\mathbb{R}^d} \psi_n(x)dx.$$

Comme $\lim_n \int \varphi_n dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = \lim_n \int \psi_n dx$, on obtient la conclusion par double encadrement.

Pour la troisième identité on applique la déuxième à f^p :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f^p(x)dx = \int_0^\infty \lambda\left(\{x \in \mathbb{R}^d : \ f^p(x) > y\}\right) dy$$

et nous faisons un changement de variable $z = y^p$, $dz = py^{p-1}dy$ et la remarque

$$\{x \in \mathbb{R}^d : \ f^p(x) > z^p\} = \{x \in \mathbb{R}^d : \ f(x) > z\}.$$

Exercice 4. La mesurabilité passe à la limite

Soit $(X, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesurable et soit (Y, d) un espace métrique. Soit $f_n : X \to Y$ une suite de fonctions $\mathcal{E} - \mathcal{B}(Y)$ mesurables qui convergent ponctuellement vers $f : X \to Y$. Montrer que f est une fonction mesurable.

Solution de l'exercice 4. Soit U un ouvert de Y. On définit

$$U_k = \left\{x \in U \ : \ d(x, Y \backslash U) > \frac{1}{k}\right\}.$$

Comme U est ouvert, on a U_k ouvert (à montrer) et $U = \cup_{k \in \mathbb{N}^*} U_k$. Pour $x \in X$ on a $f(x) \in U \implies \exists k \in \mathbb{N}^*$ t.q. $\lim_n f_n(x) \in U_k$. Ceci implique $\exists k \in \mathbb{N}^*$ et $\exists N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geq N$, $f_n(x) \in U_k$. Donc

$$f^{-1}(U) = \cup_{k \in \mathbb{N}^*} \cup_{N \in \mathbb{N}} \cap_{n \geq N} f_n^{-1}(U_k),$$

donc $f^{-1}(U)$ est mesurable car union et intersection dénombrable d'ensembles mesurables.

Exercice 5. Soit $(X, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré.

1. Soit $f : X \to [0, \infty]$ une fonction mesurable et $E \in \mathcal{E}$ tel que $\int_E f d\mu = 0$. Montrer que $f = 0$ μ p.p. sur E.
2. Supposons $f \in L^1(\mu)$ et $\int_E f d\mu = 0$ pour tout $E \in \mathcal{E}$. Montrer que $f = 0$ μ p.p. sur X.
3. Supposons $f \in L^1(\mu)$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ et

$$\left| \int_X f d\mu \right| = \int_X |f| d\mu.$$

Montrer qu'il existe une constante $\alpha \in \mathcal{U}$ tel que $\alpha f = |f|$ μ p.p. sur X.

Solution de l'exercice 5.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $A_n = \{x \in E \ : \ f(x) \geq \frac{1}{n}\}$. On a $A_n = E \cap f^{-1}([\frac{1}{n}, +\infty])$ mesurable et $\int_{A_n} f(x) d\mu = 0 \geq \frac{1}{n}\mu(A_n) \geq 0$. Donc $\mu(A_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Si on note $A = \{x \in E \ : \ f(x) > 0\}$, on a $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$ et donc $0 \leq \mu(A) \leq \sum_n \mu(A_n) = 0$ ce qui implique $\mu(A) = 0$. Comme f est à valeurs positives, on en déduit $f = 0$ μ p.p.
2. On note $A_+ = \{x \ : \ f(x) > 0\}$ et $A_- = \{x \ : \ f(x) < 0\}$. En utilisant la question précédente on obtient $f_+ = f 1_{A_+} = 0$ μ p.p. et $-f_- = f 1_{A_-} = 0$ μ p.p. Ceci implique $f = f_+ - f_- = 0$ μ p.p.
3. On écrit $f = f_+ - f_-$. Alors $\int_X f d\mu = \int_X f_+ d\mu - \int_X f d\mu$ car $f \in L^1(\mu)$ implique $\int_X f_+ d\mu < \infty$ et $\int_X f_- d\mu < \infty$. On a

$$\left| \int_X f d\mu \right| = \int_X f_+ d\mu - \int_X f d\mu \text{ si } \int_X f_+ d\mu \geq \int_X f d\mu$$

(ou $\left|\int_X f d\mu\right| = -\int_X f_+ d\mu + \int_X f d\mu$ si $\int_X f_+ d\mu < \int_X f d\mu$). D'autre part $\int_X |f| d\mu = \int_X f_+ d\mu + \int_X f_- d\mu$. L'identité $\left|\int_X f d\mu\right| = \int_X |f| d\mu$ implique dans le premier cas $\int_X f_- d\mu = 0$ donc d'après la question 1. $f_- = 0$ μ p.p. donc $f = f_+ = |f|$ μ p.p. On raisonne pareil dans le deuxième cas.

Exercice 6. Lignes de niveau

Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$, un espace mesuré. On suppose que μ est sigma-finie. Soit $f : E \to \mathbb{R}^+$, une fonction $\mathcal{E}$-mesurable. On note ℓ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^+$. On rappelle que $\{f > a\}$ désigne l'ensemble $\{x \in E : f(x) > a\}$

1. Montrer que l'application $a \in \mathbb{R}^+ \to \mu\big(\{f > a\}\big) \in [0, \infty]$ est bien définie et borélienne.
2. En utilisant le théorème de Fubini, montrer que

$$\int_E f \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^+} \mu\big(\{f > a\}\big) \, d\ell(a) \, .$$

3. Plus généralement, soit un réel $p \geq 1$. Montrer que

$$\int_E f^p \, d\mu = p \int_{\mathbb{R}^+} a^{p-1} \mu\big(\{f > a\}\big) \, d\ell(a)$$

Solution de l'exercice 6. On a $\{f > a\} = f^{-1}(]a, \infty]) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ donc $\mu(\{f > a\})$ est bien définie et $a \in \mathbb{R}^+ \longmapsto \mu\big(\{f > a\}\big) \in [0, \infty]$ est décroissante donc mesurable.

Comme on peut écrire pour $c \geq 0$ que $c = \int_{\mathbb{R}^+} 1_{[0,c[}\, d\ell(a)$ on a, pour tout $x \in E$,

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^+} 1_{[0,f(x)[}\, d\ell(a).$$

Par ailleurs, la fonction $(x, a) \to 1_{[0,f(x)[}(a) = 1_{f(x)>a}$ (au sens des fonctions booléennes) est une fonction positive ($\mathcal{E} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$ mesurable sur l'espace produit. Le théorème de Fubini positif permet alors de conclure.

Pour la dernière question, on fait de même en remarquant que $f(x)^p = p \int_{\mathbb{R}^+} 1_{[0,f(x)]}(a) a^{p-1}\, d\ell(a)$.

Remarque : On aurait pu faire intervenir plus explicitement, sur l'espace produit $(E \times \mathbb{R}^+, \mathcal{E} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^+), \mu \otimes \ell)$ l'ensemble

$$A = \{(x, a) \in E \times \mathbb{R}^+ : a < f(x)\} \subset E \times \mathbb{R}^+$$

Alors A est un ensemble mesurable par rapport à la tribu produit, et on a

$$\mu \otimes \ell(A) = \int_E \ell(A^1_x)\, \mu(dx) = \int_E f\, d\mu = \int_{[0,\infty[} \mu(A^2_a)\, d\ell(a) = \int_{\mathbb{R}^+} \mu(\{f > a\})\, d\ell(a).$$

Cela montre que l'intégrale est "l'aire sous la courbe".

Exercice 7. Montrer que le graphe d'une fonction borélienne de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ est de mesure nulle.

Solution de l'exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne. L'application $(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})) \to (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)), (x, t) \to x$ est mesurable (puisque continue) et l'application f est $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-mesurable, donc par composition $(x, t) \mapsto f(x)$ est $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$-mesurable. Par ailleurs, l'application $(x, t) \to t$ est continue donc $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$-mesurable. Par conséquent $G = \{(x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : f(x) = t\}$ est un ensemble $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$-mesurable, autrement dit la fonction $(x, t) \mapsto 1_{\{f(x)=t\}}$ est borélienne positive sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$. Donc par le théorème de Fubini

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}} 1_{\{t=f(x)\}} d\ell_d(x)\, d\ell_1(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}} 1_{\{t=f(x)\}} d\ell_1(t) \right) d\ell_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} 0\, d\ell_d(x) = 0.$$

2 Inégalités

Exercice 8. Inégalité d'Hölder $(**)$

Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré et $f, g : X \to \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables. Soit $p, q \in [1, +\infty]$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer que si $f \in L^p(\mu)$ et $g \in L^q(\mu)$ alors fg est intégrable, avec

$$\Big| \int fg\, d\mu \Big| \leq \|f\|_{L^p(\mu)} \|g\|_{L^q(\mu)}$$

et décrire les cas d'égalité.

Solution de l'exercice 8. On traite d'abord le cas où $\{p, q\} \neq \{1, +\infty\}$. L'inégalité de Hölder donne indique que

$$\int |f|\,|g|\,d\mu \leq \Big(\int |f|^p\,d\mu\Big)^{1/p}\Big(\int |g|^q\,d\mu\Big)^{1/q}$$

et donc que fg est intégrable. Si maintenant on précède cette inégalité avec l'inégalité triangulaire, on obtient le résultat. Supposons qu'il y ait égalité, ce qui suppose donc qu'il y a égalité dans les deux inégalités que l'on a enchainé : $A \leq B \leq C$ et $A = C$ entraine $A = B = C$. Si f (ou g) est identiquement nulle, μ-pp, alors il y a égalité pour tout g (ou f). Si $\int |f|\,d\mu$, $\int |g|\,d\mu > 0$, par les cas d'égalité dans l'inégalité de Hölder, il faut que $|f|^p = \lambda |g|^q$ presque partout. Il faut aussi qu'il y ait égalité dans l'inégalité triangulaire, et donc que fg soit de signe constant, c'est à dire f et g de même signe.

Si $f \in L^1(\mu)$ et $g \in L^\infty(\mu)$. Comme $|g| \leq \|g\|_{L^\infty}$ presque partout, on a $|fg| \leq \|g\|_{L^\infty}|f|$ presque partout et donc $fg \in L^1(\mu)$. L'inégalité triangulaire permet encore de conclure : $|\int fg\,d\mu| \leq \int |fg|\,d\mu \leq \|g\|_{L^\infty}\int |f|\,d\mu$. Pour qu'il y a ait égalité, il faut donc encore qu'il y ait égalité à toutes les étapes et donc que fg soit de signe constant. Quite à changer f en $-f$ on peut supposer que $fg \geq 0$ presque partout. Si on écrit $f = \epsilon|f|$ pour ϵ une fonction valant 1 ou -1, alors

$$\int (\|g\|_{L^\infty} - \epsilon g)|f|\,d\mu = 0$$

et pour que l'intégrale de cette fonction presque partout positive soit nulle, il faut que la fonction soit nulle presque partout, donc que $g = \epsilon\|g\|_{L^\infty}$ presque partout sur l'ensemble $\{|f| > 0\}$.

Exercice 9. Inégalité de Jensen

Soit μ une mesure positive sur une $\mathcal{E}-$algèbre $\mathcal{S}$ de Ω telle que $\mu(\Omega) = 1$. Soit $f \in L^1(\mu)$ à valeurs réelles telle que $a < f(x) < b$ pour tout $x \in \Omega$ et soit ϕ une fonction convexe sur $]a, b[$. Alors on a l'inégalité

$$\phi\left(\int_\Omega f d\mu\right) \leq \int_\Omega (\phi \circ f) d\mu.$$

Solution de l'exercice 9. Comme φ est convexe, on a, pour $a < s < t < u < b$ l'inégalité

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s} \leq \frac{\varphi(u) - \varphi(t)}{u - t}.$$

Soit $t = \int_\Omega f d\mu$. Et soit $\beta = \sup\limits_{a<s<t} \frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s}$ le supremum du membre de gauche de l'inégalité précédente. Alors, si $a < s < t$, on a $\frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s} \leq \beta$ et donc $\varphi(s) \geq \varphi(t) + (s-t)\beta$. Si $t < u < b$, alors $\beta \leq \frac{\varphi(u)-\varphi(t)}{u-t}$ et on en déduit $\varphi(u) \geq \varphi(t) + (u - t)\beta$. On a donc pour tout $y \in]a, b[$,

$$\varphi(y) \geq \varphi(t) + (y - t)\beta.$$

On remplace y par $f(x)$ pour un $x \in \Omega$. Alors

$$\varphi(f(x)) \geq \varphi(t) + (f(x) - t)\beta.$$

On intègre sur Ω et on obtient, en utilisant $\mu(\Omega) = 1$ et $t = \int_\Omega f d\mu$,

$$\int_\Omega \varphi(f(x))d\mu(x) \geq \varphi(t) + \left(\int_\Omega f(x)d\mu(x) - t\right)\beta = \varphi\left(\int_\Omega f d\mu\right).$$

Exercice 10. Interpolation

1. Soit $f \in L^{p_0} \cap L^{p_1}$ pour un $0 < p_0 < p_1 \leq \infty$. Montrer que $f \in L^p$ pour tout $0 < p_0 \leq p \leq p_1$ et de plus
$$||f||_p \leq ||f||_{p_0}^{1-\theta}||f||_{p_1}^{\theta},$$
où $0 \leq \theta \leq 1$ tel que $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$.
2. Soit $f \in L^{p_0} \cap L^{\infty}$ pour un $0 < p_0 < \infty$. Par la question précédente, pour tout $0 < p_0 \leq p \leq \infty$, on a $f \in L^p$. Montrer que de plus
$$||f||_p \to_{p\to\infty} ||f||_\infty.$$
3. Montrer que, si $f \in L^p$ pour tout $p \geq p_0$, mais $f \notin L^\infty$, alors
$$||f||_p \to_{p\to\infty} \infty.$$

Solution de l'exercice 10.

1. Si $\theta = 0$ ou $\theta = 1$ il n'y a rien à démontrer. Pour $0 < \theta < 1$ on écrit $f = f^{1-\theta} f^\theta$ et on applique l'inégalité de Hölder pour $q = \frac{p_0}{1-\theta}$ et $r = \frac{p_1}{\theta}$. On a $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$ et
$$||f||_p \leq ||f^{1-\theta}||_q||f^\theta||_r.$$
On a $||f^{1-\theta}||_q = ||f||_{p_0}^{1-\theta}$ et $||f^\theta||_r = ||f||_{p_1}^\theta$ et la conclusion suit.
2. D'après la question précédente on a $||f||_p \leq ||f||_{p_0}^{\frac{p_0}{p}}||f||_\infty^{1-\frac{p_0}{p}}$. Donc
$$\limsup_{p\to\infty} ||f||_p \leq ||f||_\infty.$$
Comme $f \in L^\infty$ on a pour tout $\epsilon > 0$ la mesure de $A_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^d : |f(x)| > ||f||_\infty - \epsilon\}$ est strictement positive. Alors
$$||f||_p \geq (||f||_\infty - \epsilon)\lambda(A_\epsilon)^{\frac{1}{p}}$$
ce qui implique $\liminf_p ||f||_p \geq ||f||_\infty - \epsilon$. Et ceci pour tout $\epsilon > 0$. Donc $\liminf_p ||f||_p \geq ||f||_\infty$. On en déduit que la limite $\lim_p ||f||_p$ existe et $\lim_p ||f||_p = ||f||_\infty$.

3 Topologie et boréliens

Exercice 11. Sous-ensemble $E \subset [0,1]$ qui n'est pas Lebesgue mesurable
On considère le groupe $\mathbb{R}$ de réels par rapport à l'addition et $\mathbb{Q}$ le sous-groupe de rationnels. On considère les classes du quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Ces classes forment une partition de $\mathbb{R}$, appelé partition de Vitali. Par l'axiome du choix il existe un ensemble $E \subset [0,1]$ qui intersectent chaque classe exactement en un point. On démontre que E n'est pas mesurable.

Solution de l'exercice 11. On suppose que E est mesurable. Alors il y a deux possibilités : soit $\lambda(E) = 0$ soit $\lambda(E) > 0$. On remarque d'abord que si $r, q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ et $r \neq q$ alors $r + E \cap q + E = \emptyset$. En effet, si $x \in r + E \cap q + E$ alors ils existent $y_1, y_2 \in E$ tels que $x = r + y_1 = q + y_2$ donc y_1 et y_2 appartient à la même classe d'équivalence. Or, par construction, E ne contient qu'en seul élément d'une classe d'équivalence. Donc $r + E \cap q + E = \emptyset$. On a l'inclusion

$$[0,1] \subset \cup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} q + E \subset [-1, 2].$$

On obtient une contradiction dans les deux cas : $\lambda(E) = 0$ ou $\lambda(E) > 0$. Donc E n'est pas mesurable.

Exercice 12.(*) Donner, pour tout $\epsilon > 0$, un exemple d'un ensemble ouvert, dense dans $\mathbb{R}$, et de mesure de Lebesgue inférieure à ϵ.

Solution de l'exercice 12. L'ensemble construit à l'exercice précédent convient : On dénote $\mathbb{Q} = \{q_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ et $\mathbb{Q} \subset \cup_{n \in \mathbb{N}}]q_n - \frac{\epsilon}{2^{n+2}}, q_n + \frac{\epsilon}{2^{n+2}}[$. C'est un ensemble ouvert, dense (car il contient $\mathbb{Q}$) et de mesure au moins $\frac{\epsilon}{2}$ et au plus ϵ.

Exercice 13. Construisez un ensemble borelien $E \subset \mathbb{R}$ tel que

$$0 < m(E \cap I) < m(I)$$

pour tout intervalle non-vide I. Est-il possible d'avoir $m(E) < \infty$?

Solution de l'exercice 13. De l'inégalité de droite on en déduit que E ne contient aucun intervalle, de celle de gauche qu'elle est dense dans $\mathbb{R}$ et d'intérieur vide. On construit K un ensemble de Cantor de mesure positive (comme à l'exo 7 de TD1, sauf que à chaque étape on enlève des ensembles de plus en plus petites : voir par exemple la page wikipedia de l'ensemble de Smith-Volterra-Cantor `https://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Smith-Volterra-Cantor`). Ensuite on note $\mathbb{Q} = \{q_n, n \in \mathbb{N}\}$ et on définit $E = \cup_{n \in \mathbb{N}} q_n + 2^{-n} K$. L'ensemble E est borelien. L'inégalité de gauche est facile à montrer. Celle de droite ?!

Exercice 14. Ensemble de Cantor (**)
Soit $I_0 = [0,1]$. Soit $I_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ obtenu de I_0 en enlevant un intervalle de longueur $\frac{1}{3}$ au milieu. Soit $I_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$ obtenu de I_1 en enlevant un intervalle correspondant au tiers de chaque intervalle de I_1. Formellement on a

$$I_n = \cup_{a_1, \ldots, a_n \in \{0,2\}} \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{3^i}, \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{3^i} + \frac{1}{3^n} \right].$$

On note $C = \cap_{n=1}^{\infty} I_n$. C'est l'ensemble de Cantor. Montrer que c'est un ensemble compact, non-dénombrable et de mesure de Lebesgue zero.

Solution de l'exercice 14. Chaque ensemble I_n est compact (fermé et borné de $\mathbb{R}$) donc leur intersection est un compact. On a $\lambda(I_n) = \frac{2^n}{3^n}$ et $\lambda(C) \leq \lambda(I_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc $\lambda(C) = 0$. Pour montrer que C est non-dénombrable il suffit de mettre en bijection C et $[0,1]$ à travers l'écriture en base 3 de $x \in C$. En effet $x \in C$ ssi en base 3 il s'écrit seulement avec les chiffres 0 ou 2 :

$$C = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j},\ a_j \in \{0,2\} \right\}.$$

Et $[0,1] = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{2^j},\ a_j \in \{0,1\} \right\}$.

Exercice 15.$(**)$ Soit $f \in L^1(\mu)$ et soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout ensemble E mesurable, de mesure plus petite que δ, $\mu(E) < \delta$, on a $\int_E |f| d\mu < \epsilon$.

Solution de l'exercice 15. Par densité des fonctions simples dans $L^1(\mu)$, il existe g fonction simple telle que $\int_X |f-g| d\mu < \frac{\epsilon}{2}$. Soit $M = \max\{|g(x)|, x \in X\}$. Le max existe car g prend un nombre fini de valeurs. On prend $\delta = \frac{\epsilon}{2M+1}$ et on obtient que pour tout $E \subset X$ mesurable tel que $\mu(E) < \delta$,

$$\int_E |f| d\mu \leq \int_X |f-g| d\mu + \int_E |g| d\mu < \frac{\epsilon}{2} + M \frac{\epsilon}{2M+1} < \epsilon.$$

Exercice 16.$(**)$ Soit $f \in L^p$ pour un p tel que $0 < p < \infty$. Montrer que $\{x \ :\ f(x) \neq 0\}$ est σ-fini.

Solution de l'exercice 16. Par l'inégalité de Markov on a

$$\mu\{x \ :\ |f(x)| > \frac{1}{n}\} \leq n^p \int_X |f(x)|^p d\mu(x) < \infty.$$

Par ailleurs $\{x \ :\ f(x) \neq 0\} = \cup_{n \in \mathbb{N}^*} \{x \ :\ |f(x)| > \frac{1}{n}\}$ et la conclusion suit.

Exercice 17.$(*)$

1. Montrer que $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathscr{P}(\mathbb{N}) = \mathscr{P}(\mathbb{N}^2)$.

2. Soit μ la mesure de comptage de $\mathbb{N}$. Montrer que $\mu \otimes \mu$ est la mesure de comptage de $\mathbb{N}^2$.

Solution de l'exercice 17.

1. Tout d'abord $\mathscr{P}(\mathbb{N}^2)$ est une tribu qui contient les $A \times B$ où $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ donc contient leur tribu engendrée $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathscr{P}(\mathbb{N})$. Inversement, comme $\mathbb{N}^2$ est dénombrable, toute partie de $\mathbb{N}^2$ est la réunion disjointe au plus dénombrable de singletons. Or tout singleton de $\mathbb{N}^2$ s'écrit $\{m\} \times \{n\}$ et appartient donc à la tribu $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathscr{P}(\mathbb{N})$, qui est stable par union dénombrable. On en déduit $\mathscr{P}(\mathbb{N}^2) \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathscr{P}(\mathbb{N})$.

2. De nouveau, comme toute partie de $\mathbb{N}^2$ est la réunion disjointe au plus dénombrable de singletons, par σ-additivité des mesures il suffit de vérifier que $\mu \otimes \mu$ coïncide sur les singletons avec la mesure de comptage. Or $\mu \otimes \mu(\{(m,n)\}) = \mu(\{m\})\,\mu(\{n\}) = 1 \times 1 = 1$, d'où le résultat.

Exercice 18.($*$) Existe-t-il une σ-algèbre infinie qui contient seulement un nombre dénombrable de termes ?

Solution de l'exercice 18. La réponse est non. Pour que la sigma-algèbre soit infinie il faut que l'espace soit infini. Pour se former une intuition, prenons l'exemple de $\mathbb{N}$ avec la σ algèbre formée par tous les sous-ensemble de $\mathbb{N}$: la σ algèbre est infinie et non-dénombrable. Passons maintenant à la preuve.

Soit X l'espace et $\mathcal{M}$ la σ algèbre qu'on suppose dénombrable. Pour tout $x \in X$ on note $A_x = \cap_{x \in A \subset \mathcal{M}} A$. On a A_x mésurable, car il y a un ensemble dénombrable dans $\mathcal{M}$. De plus, A_x est le plus petit ensemble mesurable qui contient x. Si $x \neq y$ on a deux possibilités : soit $A_x = A_y$ soit $A_x \cap A_y = \emptyset$. En effet, supposons que $A_x \cap A_y \neq \emptyset$ et que $A_x \backslash A_y \neq \emptyset$. (Le cas $A_y \backslash A_x \neq \emptyset$ est symétrique et on raisonne de la même façon.) Alors si $x \in A_x \cap A_y$ alors l'ensemble $A_x \cap A_y$ est strictement inclu dans A_x, est mesurable et contient x ce qui contredit la minimalité de A_x. Si $x \notin A_x \cap A_y$, alors $x \in A_x \backslash A_y$ qui est strictement contenu dans A_x, ce qui contredit la minimalité de A_x. Ceci implique bien que soit $A_x = A_y$ soit $A_x \cap A_y = \emptyset$.

Pour tout $A \in \mathcal{M}$, $A = \cup_{x \in A} A_x$. S'il y a seulement un nombre fini d'ensemble A_x alors $\mathcal{M}$ est fini, car on ne peut obtenir par réunion qu'un nombre fini d'ensemble à partir d'un nombre fini. S'il a y un nombre dénombrable d'ensembles A_x alors $\mathcal{M}$ est non-dénombrable (en effet on peut faire une bijection entre $\mathbb{N}$ et l'ensemble $\{A_x, x \in X\}$ qui donne une bijection entre les parts de $\mathbb{N}$ et $\mathcal{M}$.) Conclusion : il n'existe pas de σ-algèbre infinie qui contient seulement un nombre dénombrable de termes.

4 Suites de fonctions et espaces L^p

Exercice 19. Construisez une suite de fonctions continues sur $[0,1]$ t.q. $0 \leq f_n \leq 1$ et

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 0,$$

mais telle que les suites $(f_n(x))_n$ ne convergent pour aucun $x \in [0,1]$.

Solution de l'exercice 19. On construit d'abord une suite de fonctions simples qui vérifient les propriétés demandées. Soit $f_{k,N} = 1_{[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}]}$ pour $N \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq N-1$. On définit $g_n = f_{k,N}$ pour N tel que $\frac{(N-1)N}{2} \leq n < \frac{N(N+1)}{2}$ et $k = n - \frac{(N-1)N}{2}$. On a $\int g_n = \frac{1}{N}$ pour tout n tel que $\frac{(N-1)N}{2} \leq n < \frac{N(N+1)}{2}$. Donc $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x)dx = 0$. Par ailleurs on peut montrer que pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout $A > 0$ il existe de $n_1 > A$ et $n_1 > A$ tel que $g_{n_1}(x) = 0$ et $g_{n_2}(x) = 1$ donc $(g_n(x))_n$ ne converge pas. Pour de trouver une suite de fonctions continues avec les mêmes propriétés il suffit de modifier g_n sur un ensemble de mesure $\frac{1}{n^2}$ tel $f_n = 1$ sur le $supp(g_n)$, $0 \leq f_n \leq 1$ et f_n continue. Afin d'assurer la condition

$(f_n(x))_n$ ne converge pour aucun $x \in [0,1]$ on modifie le support de g_n en l'augmentant de deux cotés si $supp(g_n) \subset]0,1[$. Si $0 \in supp(g_n)$ alors on régularise g_n seulement à droite de son support et on la laisse inchangée en 0. Si $0 \in supp(g_n)$ alors on régularise g_n seulement à droite de son support et on la laisse inchangée en 0. C'est une fonction continue sur $[0,1]$. Pareil si $1 \in supp(g_n)$.

Exercice 20. Théorème d'Egorov $(*)$

Soit $f_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions mesurables qui converge ponctuellement presque partout vers une autre fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$. Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe un ensemble mesurable A, de mesure plus petite que ϵ, tel que f_n converge uniformément en dehors de A sur tout compact.

Solution de l'exercice 20. Soit $B \subset \mathbb{R}^d$ de mesure nulle, telle que $f_n(x) \to_{n\to\infty} f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d \backslash B$. On définit

$$E_{N,m} = \{x \in \mathbb{R}^d \backslash B \ : \ \text{il existe } n \in \mathbb{N}, n \geq N, |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{m}\}.$$

La convergence $f_n(x) \to_{n\to\infty} f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d \backslash B$ implique $\bigcap_{N=0}^{\infty} E_{N,m} = \emptyset$. Les ensembles $E_{N,m}$ sont Lebesgue mesurables et décroissantes en N. La question 2. de l'exercice précédente implique, pour tout $R > 0$,

$$\lim_{N\to\infty} \lambda(E_{N,m} \cap B(0,R)) = 0.$$

Donc pour tout $m \geq 1$, il existe N_m tel que pour tout $n \geq N_m$,

$$\lambda(E_{N,m} \cap B(0,m)) \leq \frac{\epsilon}{2^m}.$$

On note $A = \cup_{m=1}^{\infty} E_{N_m,m} \cap B(0,m)$. Alors U est Lebesgue mesurable et $\lambda(A) \leq \epsilon$. Par construction, pour tout $m \geq 1$ et pour tout $n \geq N_m$ on a, pour tout $x \in \mathbb{R}^d \backslash B$ et $|x| < m$:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{m}$$

c'est à dire la convergence uniforme sur toute compact, en dehors de l'ensemble $A \cup B$.

Exercice 21. Réciproque partielle de la convergence dominée

Soient $(X, \mathcal{M}, m)$ un espace mesuré, $1 \leq p < \infty$, $(f_n)_n \subset L^p$ et $f \in L^p$. On suppose que $f_n \to f$ in L^p quand $n \to \infty$. Alors il existe une sous-suite $(f_{n_k})_k$ telle que :

— $f_{n_k} \to f$ p.p. quand $k \to \infty$.

— il existe $F \in L^p$ telle que $|f_{n_k}| \leq F$ p.p. pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Solution de l'exercice 21. Comme dans la preuve du thm. de complétude de L^p on considère la sous-suite f_{n_k} telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$||f_{n_{k+1}} - f_{n_k}||_p \leq 2^{-k}.$$

On note $F(x)=\sum_{k=0}^{\infty}|f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)|+|f_{n_0}(x)|$. Par le théorème de convergence monotone on a que $F\in L^p$, $||F||_p\leq ||f_{n_0}||_p+\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}<\infty$. On a aussi, pour tout $N\in\mathbb{N}$,

$$|f_{n_N}(x)|\leq \sum_{k=0}^{N}|f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)|+|f_{n_0}(x)|\leq \sum_{k=0}^{\infty}|f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)|+|f_{n_0}(x)|=F(x).$$

La fonction F etant dans L^p, l'ensemble $\mathcal{N}=\{x\ :\ F(x)=\infty\}$ est de mesure nulle. Donc pour $x\notin\mathcal{N}$ on a que la serie $\sum_{k=0}^{\infty}|f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)|+|f_{n_0}(x)|$ est absoluement convergente, donc convergente (car $\mathbb{R}$ est complet) et $\sum_{k=0}^{\infty}f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)+f_{n_0}(x)=g(x)$. Il reste à montrer que $f=g$. On a $\sum_{k=0}^{N}f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)+f_{n_0}(x)=f_{n_N}$ et $f_n\to f$ in L^p donc $f_{n_N}\to f$ in L^p. Mais par le thm de convergence dominée $f_{n_N}\to g$ in L^p. Donc $f=g$ p.p.

Exercice 22. Soit $(X,\mathcal{M},m)$ un espace mesuré, soit $1\leq p\leq\infty$ et soit q son conjugué : $q=\frac{p}{p-1}$ si $1<p<\infty$, $q=\infty$ si $p=1$ et $q=1$ si $p=\infty$. On considère deux suites de fonctions $(f_n)_n\subset L^p$ telle que $f_n\to f$ in L^p et $(g_n)_n\subset L^q$ telle que $g_n\to g\in L^q$. Montrer que

$$\int f_ng_ndm\to\int fgdm.$$

Solution de l'exercice 22. Par l'inegalité de Hölder on a $f_ng_n\in L^1$ et $fg\in L^1$. De plus,

$$\left|\int f_ng_ndm-\int fgdm\right|\leq\int|f_n-f||g_n|dm+\int|f||g_n-g|dm. \tag{1}$$

Comme $g_n\to g$ in L^q, la suite $(||g_n||_q)_n$ est bornée, donc par l'inégalité de Hölder on obtient le résultat à partir de l'inégalité précédente.

Exercice 23. Soit $(X,\mathcal{M},m)$ un espace mesuré. On considère deux suites de fonctions $(f_n)_n\subset L^1$ telle que $f_n\to f$ in L^1 et $(g_n)_n\subset L^\infty$ telle que $g_n\to g$ p.p. Montrer par un contre-exemple qu'on n'a pas toujours $\int f_ng_ndm\to\int fgdm$. Trouver une condition qui garantit la convergence.

Solution de l'exercice 23. Les suites suivantes conviennent :

$$f_n=g_n=\sqrt{n}1_{]0,\frac{1}{n}[}.$$

En effet, on prend $f=g=0$, $||f_n||_1=\frac{1}{\sqrt{n}}$, $g_n\to 0$ p.p., mais $\int f_ng_n=1\not\to 0$. La condition : il existe $M>0$ tel que $||g_n||_\infty\leq M$ garantit la convergence. En effet, $||g_n||_\infty\leq M$ et $g_n\to g$ p.p. implique que $|g|\leq M$ p.p. et on utilise inégalité triangulaire (1) de l'exercice précédent.

Exercice 24.$(*)$ Soit $(f_n)_n\subset L^p$ et $f\in L^p$ pour un $p\in[1,\infty[$. On suppose que $f_n\to f$ p.p. et que $||f_n||_p\to||f||_p$, quand $n\to\infty$.

1. Supposons $p=1$. Pour $n\in\mathbb{N}$ on pose $g_n=|f_n|+|f|-|f_n-f|$. En utilisant le lemme de Fatou, montrer que $f_n\to f$ in L^1.
2. On suppose maintenant $p\in]1,\infty[$. En utilisant le lemme de Fatou pour une suite convenable, montrer que $f_n\to f$ in L^p.

Solution de l'exercice 24.

1. On a g_n positive, converge p.p. vers $2|f|$ donc par le lemme de Fatou :
$$\int \liminf g_n \leq \liminf \int g_n.$$
Ceci implique $\int 2|f| \leq \liminf \int |f_n| + \int |f| - \int |f_n - f| = 2\int |f| - \limsup |f_n - f|$. Comme $f \in L^1$ on a $\int |f| < \infty$ et on peut la soustraire dans l'inégalité précédente pour obtenir $\limsup |f_n - f| \leq 0$ ce qui implique $\limsup |f_n - f| = 0$ et donc $\lim |f_n - f| = 0$.
2. On considère $g_n = 2^{p-1}|f_n|^p + 2^{p-1}|f|^p - |f_n - f|^p$. On a g_n positive, $g_n \to 2^p|f|^p$ et en suivant la même démarche on aboutit à la conclusion $||f_n - f||_p \to 0$.

Exercice25.(*) On note $L^1 = L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $B_n = \cup_{i=0}^{n-1} \left]\frac{i}{n}, \frac{i}{n} + \frac{1}{n^3}\right[$. On définit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f_n = n^2 1_{B_n}$.

1. Montrer que $f_n \in L^1$ et $||f_n||_1 = 1$.
2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soit $C_p = \cup_{k=p}^{\infty} B_k$. Montrer que, pour $x \in \complement C_p$, $f_n(x) \to 0$.
3. Montrer que $f_n(x) \to 0$ p.p.
4. Soit $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que
$$\int f_n \varphi d\lambda - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \varphi\left(\frac{i}{n}\right) \to 0, \text{ quand } n \to \infty.$$
En déduire que $\int f_n \varphi d\lambda \to \int_0^1 \varphi(x)dx$.
5. Commenter par rapport au théorème de convergence dominée et au lemme de Fatou.

Solution de l'exercice 25.

1. La fonction f est à valeurs positives et un calcul direct montre que $\int f_n = 1$.
2. On a $\lambda(B_n) = \frac{1}{n^2}$ et $\lambda(C_p) \leq \sum_{k=p}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ qui est le reste d'une série convergente. Pour tout $x \in \complement C_p$ on a $f_n(x) = 0$ pour tout $n \geq p$ donc pour $x \in \complement C_p$, $f_n(x) \to 0$.
3. On note $C = \cap_p C_p$. Les ensemble C_p sont décroissantes par rapport à p et $\lambda(C_1) < \infty$. Donc $\lambda(C) = \lim \lambda(C_p) = 0$. Pour tout $x \in \complement C$ il existe p tel que $x \in \complement C_p$ donc $f_n(x) \to 0$. Ceci implique $f_n(x) \to 0$ p.p.
4. On a
$$\int f_n \varphi dx - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \varphi\left(\frac{i}{n}\right) = n^2 \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i}{n}+\frac{1}{n^3}} \left(\varphi(x) - \varphi\left(\frac{i}{n}\right)\right) dx.$$
La fonction φ étant continue, elle est uniformément continue sur $[0,1]$. Soit $\delta_n = \sup\{|\varphi(x) - \varphi(y)| \ : \ x, y \in [0,1], |x-y| \leq \frac{1}{n^3}\}$. On a donc $\delta_n \to_{n\to\infty} 0$. Par ailleurs, on majore le membre de droite dans l'identité précédente : $|\int f_n \varphi dx - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{i}{n}\right)| \leq n^2 n \frac{1}{n^3} \delta_n = \delta_n$. Ls convergence $\delta_n \to_{n\to\infty} 0$ implique donc $\int f_n \varphi d\lambda - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{i}{n}\right) \to 0$. Par ailleurs, φ étant continue, on a $\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{i}{n}\right) \to \int_0^1 \varphi(x)dx$.
5. Comme $f_n(x) \to 0$ p.p. on en déduit que $\int \lim f_n = 0 < \lim \int f_n = 1$ donc sans l'hypothèse de domination on ne peut pas espèrer d'obtenir la conclusion du théorème de convergence dominée. Par ailleurs la suite $(f_n)_n$ montre bien qu'on n'a pas toujours égalité dans le lemme de Fatou. La suite $(f_n)_n$ appartient à la sphère de rayon 1 de $L^1([0,1])$, mais il n'existe pas de sous-suite convergente dans L^1.