TD 2
Un peu de topologie générale

Exercice 1. ($**$) Soit U et V deux ouverts d'un espace topologique tels que $U \cap V = \emptyset$. Montrer que $\overline{U} \cap V = U \cap \overline{V} = \emptyset$.

Exercice 2.($**$) Montrer qu'une somme de fonctions semi-continues inférieurement (resp. supérieurement) est semi-continue inférieurement (resp. supérieurement).

Exercice 3.($**$) Montrer que, dans un espace de Hausdorff, l'adhérence du sous-ensemble d'un compact est compacte.
Montrer que, dans un espace de Hausdorff, un ensemble est relativement compact (i.e. contenu dans un compact) si et seulement si son adhérence est compacte.

Exercice 4.($**$) Soit X un espace de Hausdorff et $f : X \to \mathbb{C}$. Montrer que $f \in \mathcal{C}_c(X)$ si et seulement si f est continue sur X et qu'il existe un compact $K \subset X$ tel que f est identiquement nulle en dehors de K.

Exercice 5.($**$) Soit (X, d) est un espace métrique. Pour $A \subset X$ non vide on définit $d(\cdot, A) : X \to \mathbb{R}^+$ par

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) \ ; \ a \in A\}, \qquad \forall x \in X.$$

1. Montrer que la fonction $d(\cdot, A)$ est toujours continue.
2. Montrer que, pour $\delta > 0$, l'ensemble $\{d(\cdot, A) \leq \delta\} = \{x \in X \ ; \ d(x, A) \leq \delta\}$ est un fermé de X contenant A.
3. Montrer que $\{d(\cdot, A) = 0\} = \overline{A}$.
4. Soit K un compact et V un ouvert tels que $K \subset V$. Montrer que pour δ suffisamment petit on a
$$\{d(\cdot, K) \leq \delta\} \subset V.$$

Exercice 6.($**$) **(Lemme d'Urysohn dans le cas d'un espace métrique localement compact)** Soit K un compact et V un ouvert tels que $K \subset V$. Construire explicitement une fonction $f \in \mathcal{C}_c(X)$ telle que $K \prec f \prec V$.

Exercice 7.($**$) **(Exemples d'espace topologiques K-réguliers)** On dira qu'un espace topologique séparé X est *K-régulier* s'il est localement compact et si tout ouvert de X est σ-compact. Montre que :

1. Les espaces métriques compacts sont K-réguliers ;
2. Les espaces vectoriels normés de dimension finie (muni de la topologie de la norme) sont K-réguliers.

3. Montrer qu'un ouvert d'un espace K topologique régulier, muni de sa topologie trace, est encore K-régulier.

Exercice 8.($**$) **(Intervalles dyadiques de** $[0,1[$) On introduit un ensemble $\mathcal{D}$ d'intervalles de $[0,1[$ comme suit :

$$\mathcal{D} := \bigcup_{n\geq 0} \mathcal{D}_n$$

où $\mathcal{D}_n$ est (la partition) constitué des intervalles de longueur 2^{-n},

$$\mathcal{D}_n := \Big\{ \big[k2^{-n}\,,\,(k+1)2^{-n}\big[\ ;\ k = 0,1,\ldots,2^n-1 \Big\}.$$

Les éléments de $\mathcal{D}$ sont appelés les intervalles dyadiques de $[0,1[$, ceux appertenant à $\mathcal{D}_n$ étant ceux de taille 2^{-n}.

1. Soit $n \geq 1$. Montrer que tout élément de $\mathcal{D}_n$ est inclus dans un élément de $\mathcal{D}_{n-1}$ et que tout élément de $\mathcal{D}_n$ contient exactement deux éléments de $\mathcal{D}_{n+1}$.
2. Montrer que pour tout $I, J \in \mathcal{D}$ on a
$$I \cap J = \emptyset \quad \text{ou} \quad \Big(I \subset J \ \text{ ou } \ J \subset I \Big).$$
3. Montrer que toute réunion (dénombrable) d'intervalles dyadiques peut s'écrire comme réunion d'intervalles dyadiques 2 à 2 disjoints.
4. Montrer que pour $x \in [0,1[$, il existe une suite décroissante $(J_k)_k$ d'intervalles dyadiques tel que $\{x\} = \bigcap_k J_k$.