TD 2
Un peu de topologie générale

Exercice 1. (**) Soit U et V deux ouverts d'un espace topologique tels que $U \cap V = \emptyset$. Montrer que $\overline{U} \cap V = U \cap \overline{V} = \emptyset$.

Solution de l'exercice 1. On a $U \subset V^c$ et V^c qui est un fermé et donc contient aussi l'adhérence de U. Notez qu'en général $\overline{U} \cap \overline{V} \neq \emptyset$, comme le montre l'exemple $U =]0,1[$ et $V =]1,2[$ sur $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle.

Exercice 2.(**) Montrer qu'une somme de fonctions semi-continues inférieurement (resp. supérieurement) est semi-continue inférieurement (resp. supérieurement).

Solution de l'exercice 2. On utiliser simplement des propriétés des réels pour établir que, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé,

$$\{f + g > \alpha\} = \bigcup_{s \in \mathbb{R}} \Big(\{f > s\} \cap \{g > \alpha - s\} \Big)$$

et

$$\{f + g < \alpha\} = \bigcup_{s \in \mathbb{R}} \Big(\{f < s\} \cap \{g < \alpha - s\} \Big).$$

Exercice 3.(**) Montrer que, dans un espace de Hausdorff, l'adhérence du sous-ensemble d'un compact est compacte.
Montrer que, dans un espace de Hausdorff, un ensemble est relativement compact (i.e. contenu dans un compact) si et seulement si son adhérence est compacte.

Solution de l'exercice 3.

Soient X un espace de Hausdorff et $A \subset K$ avec K un compact de X.

Alors, $\overline{A} \subset K$ car K est un fermé, puisque X est un espace de Hausdorff, et qu'il contient A.

Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement de $\overline{A}$, *i.e.* une famille d'ouverts telle que

$$\overline{A} \subset \cup_i U_i$$

Alors $(U_i)_{i \in I} \cup \{\overline{A}^c\}$ est un recouvrement d'ouverts de K, dont on peut extraire un sous-recouvrement $\{U_{i_k}\}_{k=1\ldots n}$ par compacité. d'où que $K \subset \cup_k U_{i_k} \cup \overline{A}^c$ et en intersectant avec $\overline{A}^c$ nous avons bien que :

$$\overline{A} \subset \cup_k U_{i_k}$$

Soit $A \subset X$ un ensemble d'un espace de Hausdorff X.

Alors si A est relativement compact, il existe une partie K compact tel $A \subset K$. Par la question précédente $\overline{A}$ est compacte.

Réciproquement, si $\overline{A}$ est compact, alors par définition de l'adhérence $A \subset \overline{A}$, d'où que A est relativement compact.

Exercice 4.$(**)$ Soit X un espace de Hausdorff et $f : X \to \mathbb{C}$. Montrer que $f \in \mathcal{C}_c(X)$ si et seulement si f est continue sur X et qu'il existe un compact $K \subset X$ tel que f est identiquement nulle en dehors de K.

Solution de l'exercice 4.

Le sens direct est évident.

Réciproquement, si f est continue sur X et qu'il existe un compact $K \subset X$ tel que f est nulle en dehors de K alors le support de f est inclus dans K et d'apres l'exercice précédent le support de f est d'adhérence compact, mais comme le support d'une fonction est un fermé c'est ce support qui est compact.

Exercice 5.$(**)$ Soit (X, d) est un espace métrique. Pour $A \subset X$ non vide on définit $d(\cdot, A) : X \to \mathbb{R}^+$ par

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) \ ; \ a \in A\}, \qquad \forall x \in X.$$

1. Montrer que la fonction $d(\cdot, A)$ est toujours continue.
2. Montrer que, pour $\delta > 0$, l'ensemble $\{d(\cdot, A) \leq \delta\} = \{x \in X \ ; \ d(x, A) \leq \delta\}$ est un fermé de X contenant A.
3. Montrer que $\{d(\cdot, A) = 0\} = \overline{A}$.
4. Soit K un compact et V un ouvert tels que $K \subset V$. Montrer que pour δ suffisamment petit on a
$$\{d(\cdot, K) \leq \delta\} \subset V.$$

Solution de l'exercice 5. Par l'inégalité (anti-)triangulaire, on vérifie que $d(\cdot, A)$ est lipschitzienne donc continue. La continuité de la fonction nous dit que $\{d(\cdot, A) \leq \delta\}$ est un fermé, comme image réciproque d'un fermé. Pour la même raison, $\{d(\cdot, A) = 0\} \supset \overline{A}$. Réciproquement, si $d(x, A) = 0$ alors il existe une suite a_k de A telle que $d(x, a_k) \to 0$, ce qui veut dire que a_k tend vers x, et donc que $x \in \overline{A}$.

Enfin, pour le dernier point, supposons par l'absurde qu'il existe une suite $\delta_k \to 0$ tel que $\{d(\cdot, K) \leq \delta_k\} \cap V^c \neq \emptyset$. Cela nous donne donc une suite $x_k \in V^c$ et une suite $c_k \in K$ avec $d(x_k, c_k) \leq \delta_k + \frac{1}{k}$ (en fait, comme l'infimum est atteint lorsque $A = K$ est compact, on aurait pu garantir $d(x_k, c_k) \leq \delta_k$). On extrait de c_k une sous-suite convergent vers un certain $c \in K$. Mais alors on aurait une sous-suite de x_k qui convergerait aussi vers c. Mais comme V^c est fermé, on en tirerait que $c \in V^c$, ce qui contredirait $K \subset V$.

Autre solution : Comme l'espace est métrique sa topologie est engendrée par les boules ouvertes, et même, par les boules fermées, en particulier notons pour tout $x \in V$, B_x une boule fermée centré en x et de rayon δ_x telle que :

$$B_x \subset V$$

Alors, en particulier, puisque $K \subset V$, $\{B_x\}_{x \in K}$ est un recouvrement de K dont on extrait par compacité un sous-recouvrement fini B_{x_i} avec $i \in \{1, ..., n\}$. Posons $\delta = \sup_{1 \leq i \leq n} \delta_{x_i}$, l'ensemble $\{d(\cdot, K) \leq \delta\}$ convient.

Exercice 6.($**$) **(Lemme d'Urysohn dans le cas d'un espace métrique localement compact)** Soit K un compact et V un ouvert tels que $K \subset V$. Construire explicitement une fonction $f \in \mathcal{C}_c(X)$ telle que $K \prec f \prec V$.

Solution de l'exercice 6. Comme X est localement compact, on commence par remplacer V par un ouvert relativement compact : il existe V_0 ouvert relativement compact tel que

$$K \subset V \subset V_0 \subset V.$$

Maintenant, il suffit de construire une fonction continue f qui vérifie $1_K \leq f \leq 1_{V_0}$ (on aura alors que le support de f est inclus dans $\overline{V}_0$, donc qu'il est compact et inclus dans V). On montre, en utilisant l'exercice précédent, que s'il on fixe un k suffisamment grand, la fonction

$$f_k(x) = \Big(1 - k\, d(x, K)\Big)_+$$

fait l'affaire.

Autre solution : D'après l'exercice précédent, on peut trouver $\delta > 0$ tel que :

$$\{d(\cdot, K) \leq \delta\} \subset V$$

Posons $U = \{d(\cdot, K) \leq \delta\}^c$, alors $x \mapsto \dfrac{d(x, U^c)}{d(x, U^c) + d(x, K)}$ convient.

Exercice 7.($**$) **(Exemples d'espace topologiques K-réguliers)** On dira qu'un espace topologique séparé X est *K-régulier* s'il est localement compact et si tout ouvert de X est σ-compact. Montre que :

1. Les espaces métriques compacts sont K-réguliers ;
2. Les espaces vectoriels normés de dimension finie (muni de la topologie de la norme) sont K-réguliers.
3. Montrer qu'un ouvert d'un espace K topologique régulier, muni de sa topologie trace, est encore K-régulier.

Solution de l'exercice 7. 1) Tout espace compact est localement compact. De plus, soit U un ouvert de X, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'ensemble $F_k = \{x \in U \mid d(x, U^c) \geq \frac{1}{k}\}$ est un fermé inclus dans un compact, c'est donc un compact. Par ailleurs, $\cup_k F_k = \{x \in U \mid d(x, U^c) > 0\}$ et $\{x \in U \mid d(x, U^c) > 0\} = (\overline{U^c})^c = (U^c)^c = U$, d'où que U est σ-compact.

2) Tout espace vectoriel normé et de dimension finie est isomorphe à $\mathbb{R}^n$ où n est la dimension de l'espace. On travaille donc sur $\mathbb{R}^n$, de plus si U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ alors pour tout $x \in \mathbb{Q}^n \cap U$ notons B_x la boule centrée en x et de rayon $d(x, \partial U)/2$. Ces boules sont compactes, car fermées et bornées dans un espace de dimensions finie.

D'abord, $B_x \subset U$ pour tout $x \in U$. En effet, par l'absurde, si on a $y \in B_x \cap U^c$, alors $x + t(y - x) \in \partial U$ où $t = \inf\{s \mid x + s(y - x) \notin U\}$. Alors $t > 0$ et $t \leq 1$. En posant $z = x + t(y - x)$ nous avons $d(z, x) \leq d(x, \partial U)/2$ et $z \in \partial U$, d'où la contradiction.

On déduit ensuite que

$$\cup_{x \in \mathbb{Q}^n \cap U} B_x = U$$

L'inclusion directe est évidente, et pour le sens réciproque si $x \in U$, alors on dispose, par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ d'un $y \in \mathbb{Q}^n \cap U$ tel que $||y - x|| \leq d(x, \partial U)/3$. Alors B_y contient x, en effet par inégalité triangulaire

$$||x - y|| \leq d(y, \partial U)/3 + ||x - y||/3$$

et ensuite $||x - y|| \leq d(y, \partial U)/2$ et $x \in B_y$.

3) Soit U un ouvert d'un espace topologique K-régulier $(X, \mathcal{T})$, muni de la topologie trace $\mathcal{T}_U$. Rappelons que comme est U est ouvert, on a $\mathcal{T}_U = \{O \text{ ouvert de } X,\ O \subset U\}$. La compacité étant une notion intrinsèque, on voit que pour $K \subset U$, K compact dans $(U, \mathcal{T}_U)$ si et seulement si K compact dans $(X, \mathcal{T})$. Remarquons d'abord que U est localement compact. Si $V \in \mathcal{T}_u$ est un voisinage de $x \in U$, c'est aussi un voisinage ouvert de x dans X, donc il contient un compact de X, qui est donc inclus dans $V \subset U$, et donc c'est aussi un compact de U. De même, si V est un de U, c'est un ouvert de X et donc il s'écrit comme réunion dénombrable de compacts de X, qui sont aussi des compacts de U.

Variantes :

1) Un espace métrique compact (X, d) est localement compact et σ-compact. Soit U un ouvert (non-vide) de X. Alors, pour tout $k \geq 1$, l'ensemble

$$F_k = \{d(\cdot, U^c) \geq \frac{1}{k}\} = \{d(\cdot, U^c) < \frac{1}{k}\}^c$$

est un fermé, donc un compact, inclus dans U, et $\cap F_k = \{d(\cdot, U^c) = 0\}^c = (U^c)^c$ car U^c est fermé.

2) Prenons d'autre part $X = \mathbb{R}^d$ muni de la topologie de la norme, pour un certain $n \geq 1$. C'est un espace localement compact. De plus tout ouvert peut s'écrire comme réunion dénombrable de boules ouvertes $\{d(\cdot, x_0) < r\}$. Or ces dernières peuvent s'écrire à leur tour comme réunion dénombrable de compacts puisque, en prenant $r_n \to r$ en croissant strictement,

$$\{d(\cdot, x_0) < r\} = \bigcup_n \{d(\cdot, x_0) \leq r_n\}.$$

Exercice 8.(∗∗) **(Intervalles dyadiques de** $[0, 1[$**)** On introduit un ensemble $\mathcal{D}$ d'intervalles de $[0, 1[$ comme suit :

$$\mathcal{D} := \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{D}_n$$

où $\mathcal{D}_n$ est (la partition) constitué des intervalles de longueur 2^{-n},

$$\mathcal{D}_n := \Big\{ \big[k2^{-n}\,,\,(k+1)2^{-n}\big[\ ;\ k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1 \Big\}.$$

Les éléments de $\mathcal{D}$ sont appelés les intervalles dyadiques de $[0, 1[$, ceux appertenant à $\mathcal{D}_n$ étant ceux de taille 2^{-n}.

1. Soit $n \geq 1$. Montrer que tout élément de $\mathcal{D}_n$ est inclus dans un élément de $\mathcal{D}_{n-1}$ et que tout élément de $\mathcal{D}_n$ contient exactement deux éléments de $\mathcal{D}_{n+1}$.
2. Montrer que pour tout $I, J \in \mathcal{D}$ on a

$$I \cap J = \emptyset \quad \text{ou} \quad \Big(I \subset J \ \text{ ou } \ J \subset I \Big).$$

3. Montrer que toute réunion (dénombrable) d'intervalles dyadiques peut s'écrire comme réunion d'intervalles dyadiques 2 à 2 disjoints.
4. Montrer que pour $x \in [0,1[$, il existe une suite décroissante $(J_k)_k$ d'intervalles dyadiques tel que $\{x\} = \bigcap_k J_k$.