TD 3

Compléments sur les mesures, mesures de Borel positives, régularité

Exercice 1. (**) **(Tribu complétée et extension extérieure)**
Commençons par deux définitions.

— Un espace mesuré $(E, \mathcal{E}, \nu)$ est dit *complet* si toute partie N de E qui est *négligeable*, ce qui veut dire qu'il existe $A \in \mathcal{E}$ avec $N \subset A$ et $\nu(A) = 0$, est nécessairement mesurable (dit d'une autre manière, tout sous-ensemble d'un ensemble mesurable de mesure nulle est lui-même mesurable).

— On dit que l'espace mesuré $(E, \mathcal{E}', \nu')$ est une extension de l'espace mesuré $(E, \mathcal{E}, \nu)$ si $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}'$ et $\nu'_{|\mathcal{E}} = \nu$.

Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré. On note Σ l'ensemble des parties de X incluses dans un ensemble mesurable de mesure nulle (c'est-à-dire l'ensemble des parties négligeables) et on considère la tribu engendrée suivante :

$$\mathcal{E}' = \sigma\big(\mathcal{E} \cup \Sigma\big).$$

1. Montrer que
$$\mathcal{E}' = \{A \cup N \ ; \ A \in \mathcal{E}, \ N \in \Sigma\}$$
et qu'on peut aussi supposer, dans cette description, que $A \cap N = \emptyset$ et même que $N \subset B$ avec $B \in \mathcal{E}$ de mesure nulle et tel que $A \cap B = 0$.

On définit $\mu' : \mathcal{E}' \to [0, +\infty]$ par

$$\mu'(A) = \inf\{\mu(B) \ ; \ A \subset B \text{ et } B \in \mathcal{E}\}.$$

2. (a) Montrer que μ' est monotone et que $\mu' = \mu$ sur $\mathcal{E}$.
   (b) Montrer que si $C = A \cup N$ avec $A \in \mathcal{E}$, $N \in \Sigma$, alors $\mu'(C) = \mu(A)$.
   (c) Montrer que μ' est une mesure sur la tribu $\mathcal{E}'$.
   (d) Montrer que pour tout $E \in \mathcal{E}'$ on a
   $$\mu'(E) = 0 \Longleftrightarrow E \in \Sigma,$$
   et en déduire que les ensembles μ'-négligeables sont exactement les ensembles μ-négligeables (i.e. Σ).
   (e) En déduire que $(E, \mathcal{E}', \mu')$ est une extension de $(E, \mathcal{E}, \mu)$ qui est complète.
3. Soit X un espace topologique et μ une mesure borélienne régulière. Montrer que la mesure μ' est encore régulière sur $\mathcal{E}'$ (c'est-à-dire qu'on a la régularité intérieure et extérieure pour tous les éléments de $\mathcal{E}'$).

Exercice 2.(∗∗) Soient X un espace de Hausdorff localement compact et μ une mesure borélienne finie sur les compact et régulière. On considère l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}_c(X), \|\cdot\|_\infty) \subset L^\infty(\mu)$. Montrer que la forme linéaire Λ_μ, donnée par $\Lambda_\mu(f) = \int f\, d\mu$, est continue sur $(\mathcal{C}_c(X), \|\cdot\|_\infty)$ si et seulement si μ est finie.

Exercice 3.(∗) Soit $E \subset \mathbb{R}$ un ensemble de mesure de Lebesgue finie.

1. Montrer que la fonction
$$x \mapsto \lambda(E \cap (E + x))$$
est continue en zéro.
2. On suppose que $\lambda(E) > 0$. Montrer que
$$E - E = \{x - y : \quad x, y \in E\}$$
contient un voisinage de zéro.

Exercice 4. Soit $d : \mathbb{R}^2 \times R^2 \to \mathbb{R}_+$ définie par
$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{cases} |y_1 - y_2| & x_1 = x_2 \\ 1 + |y_1 - y_2| & x_1 \neq x_2 \end{cases}$$

1. Montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}^2$. Décrire les boules définies par d, en fonction de $r < 1$, $r = 1$ et $r > 1$.
2. Montrer qu'un compact K de $\mathbb{R}^2$ pour cette distance est inclus dans une union finie de type $\cup_j \{x_j\} \times [a_j, b_j]$.
3. Pour $f \in C_c(\mathbb{R}^2)$ soit $x_1, \ldots, x_n$ les valeurs de x pour lesquels $f(x, y) \neq 0$ pour au moins un y. Justifier qu'il y en a un nombre fini. On définit
$$\Lambda f = \sum_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_j, y) dy.$$
Soit μ la mesure associée à Λ par le théorème de répresentation de Riesz.
4. Montrer que $\mu(\{x_0\} \times [a, b]) = b - a$.
5. Montrer que $\mu(\mathbb{R} \times \{0\}) = \infty$ et $\mu(K) = 0$ pour tout K compact inclus dans $\mathbb{R} \times \{0\}$.

Exercice 5. Soit $A \subset \mathbb{R}$ tel que tout sous-ensemble de A est Lebesgue mesurable. Montrer que $\lambda(A) = 0$.
Indication : On considère, pour $t \in \mathbb{Q}$, $A_t = A \cap (E + t)$, où E est l'ensemble construit à l'éxercice précedent. On considère K compact, $K \subset A_t$ et $H = \cup_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} K + r$. Montrer que $\lambda(H) < \infty$ et donc $\lambda(K) = 0$.

Exercice 6.(∗∗) Montrer que la mesure de Lebesgue d'un ensemble dénombrable est zero. En déduire que $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$.

Exercice 7.(∗) Soit K et L deux compacts de $\mathbb{R}^n$. Montrer que la somme $K + L = \{x \in \mathbb{R}^n\ \exists (a, b) \in K \times L,\ x = a + b\}$ est aussi compact.

Exercice 8. $(*)$ **(Inégalité de Brunn-Minkowski sur $\mathbb{R}$)** Pour $A, B \subset \mathbb{R}$ on note $A + B = \{a + b\,;\ a \in A,\, b \in B\}$. On notera $|\cdot|$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Le but de cet exercice est de montrer que si A et B sont deux boréliens non-vides de $\mathbb{R}$, alors

$$|A + B| \geq |A| + |B|.$$

On supposera dans la suite que $A + B$ est borélien (en fait ce n'est pas nécessaire, car on peut toujours garantir que $A + B$ est Lebesgue-mesurable).

1. Montrer l'inégalité lorsque A et B sont compacts (on montrera qu'on peut se ramener au cas où $\max A = \min B = \{0\}$.).
2. Conclure

Exercice 9. $(**)$ **(Convolution sur $\mathbb{R}^d$)** On travaille sur $\mathbb{R}^d$ muni de la mesure de Lebesgue que l'on notera λ ou dx.

— Si f et g sont deux fonctions boréliennes positives sur $\mathbb{R}^d$, on définit pour $x \in \mathbb{R}^d$ fixé

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x - y)\, dy.$$

La fonction positive $f * g$ ainsi définie s'appelle la convolée de f et g.

— Deux fonctions boréliennes f et g sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs réelles ou complexes sont dites *convolables* si pour presque-tout $x \in \mathbb{R}^d$, la fonction $y \to f(y)g(x - y)$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^d)$, c'est-à-dire $|f| * |g|(x) < +\infty$ pour presque tout x. Dans ce cas, on pose pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x - y)\, dy$$

et la fonction $f * g$ définie presque partout s'appelle la convolée de f et g.

1. Montrer que dans les deux cas ci-dessous (fonctions positives ou convolables), la fonction convolée est borélienne.
2. Montrer que f et g sont convolables si et seulement si $|f|$ et $|g|$ le sont, et qu'alors $|f * g| \leq |f| * |g|$ presque partout.
3. Montrer que si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors f et $1_{\mathbb{R}^d}$ sont convolables, et $f * 1_{\mathbb{R}^d}$ est constante et vaut $f * 1_{\mathbb{R}^d}(x) = \int f\, d\lambda, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.
4. Si f est localement intégrable (autrement dit $\int_B |f|\, d\lambda < \infty$ sur toute boule $B \subset \mathbb{R}^d$) et g est essentiellement bornée et à support compact, alors f et g sont convolables (et $f * g$ est même défini partout).
5. Montrer que si f et g sont continues à support compact, alors f et g sont convolables, et que $f * g$ est continue à support compact inclus dans la somme des supports de f et g.
6. Montrer que si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ alors f et g sont convolables, et que la convolée est définie partout et bornée.
7. Montrer que si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, alors $f * g$ est continue (bornée). Illustration : calculer $1_{[0,1]} * 1_{[0,1]}$.

8. Soient $p, q \in [1, +\infty]$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1 + \dfrac{1}{r}$. Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$. On souhaite établir que f et g sont convolables, que $f * g \in L^r(\mathbb{R}^d)$, et que

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Cette inégalité s'appelle *l'inégalité d'Young.*

— Montrer qu'il suffit de considérer des fonctions f et g positives.
Dans la suite, on supposera que f et g sont positives.

— Montrer qu'on peut supposer que $\int g^q = 1$. *On le supposera dans la suite.*

— Montrer que pour tout $s \in]0,1[$ et $x \in \mathbb{R}^d$ on a

$$f * g(x) \leq \|f^{1-s}\|_{q'} \left(\int f(x-t)^{sq} g(t)^q dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

puis que $\big(f * g(x)\big)^r \leq \|f^{(1-s)}\|_{q'}^r \displaystyle\int f(x-t)^{sr} g(t)^q \, dt.$

— En déduire que $\|f * g\|_r \leq \|f\|_{q'(1-s)}^{1-s} \|f\|\|_{sr}^s$ et conclure.

Exercice 10.$(*)$ Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^d$ à support compact. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$.

Exercice 11. $(**)$ **(Suites régularisantes, convolution et densité des fonctions régulières)**

On travaille encore avec la mesure de Lebesgue dur $\mathbb{R}^d$. Par fonction régulière on entend une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^d$. L'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est l'espace des fonctions qui sont régulières sur $\mathbb{R}^d$ et qui de plus sont à support compact.

On appelle *suite régularisante* (ou *approximation de l'identité*) une suite $(j_k)_{k \geq 1}$ de fonction définies sur $\mathbb{R}^d$ vérifiant les propriétés suivantes : pour tout $k \geq 1$

$$j_k \geq 0, , \qquad \int j_k = 1, \quad j_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d), \quad \text{et} \;\; \operatorname{supp}(j_k) \subset B(r_k),$$

avec

$$r_k \to 0 \quad \text{lorsque } k \to +\infty.$$

1. On suppose que l'on sait construire une fonction J positive, régulière à support compact avec $J > 0$ au voisinage de zéro (par exemple) de sorte que $\int J > 0$. On définit

$$j(x) = \frac{1}{\int J} J(x)$$

et pour tout $k \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}^d$ on pose

$$j_k(x) = k^d j(kx).$$

Montrer que (j_k) est une approximation de l'identité

2. Montrer que si $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, alors $f * g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, avec pour $(k_1, \ldots k_d) \in \mathbb{N}^d$, $N = k_1 + \ldots k_d$: $\dfrac{\partial^N}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_d^{k_d}}(f * g) = f * \dfrac{\partial^N}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_d^{k_d}} g.$

3. Montrer que si (j_k) est une suite régularisante et $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, alors

$$f * j_k \longrightarrow f$$

dans tout espace $L^p(\mathbb{R}^d)$, $p \in [1, +\infty]$.

4. Montrer que $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, pour $p \in [1, +\infty[$.

Commentaire : le même raisonnement fonctionne sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ et permet de montrer que l'espace des fonctions régulières sur R^d et à support compact inclus dans Ω est dense dans $L^p(\Omega)$.

Exercice 12. (Inégalité de Hardy) Soit $p \in]1, \infty[$. On note $L^p_+ := L^p(]0, \infty[, \mathcal{B}(]0, \infty[), \lambda)$ où λ est la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $]0, \infty[$. Soit $f \in L^p_+$. Pour $x \in]0, \infty[$ on pose $F(x) = \frac{1}{x} \int f 1_{]0,x[} d\lambda$. Le but de l'exercice est de montrer que $F \in L^p_+$ et

$$||F||_p \leq \frac{p}{p-1} ||f||_p. \tag{1}$$

1. On suppose, dans cette question, que $f \in \mathcal{C}_c(]0, \infty[)$.
   (a) Montrer que $F \in \mathcal{C}^1(]0, \infty[) \cap L^p_+$. Montrer que $xF'(x) = -F(x) + f(x)$ pour tout $x > 0$.
   (b) On suppose, seulement dans cette question, que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in]0, \infty[$. Montrer que $\int_0^\infty F^p(x)dx = \frac{p}{p-1} \int_0^\infty F^{p-1}(x) f(x) dx$. (On pourrait faire une IPP.) En déduire (1).
   (c) Montrer que $||F||_p \leq \frac{p}{p-1} ||f||_p$ sans supposer $f(x) \geq 0$.
2. On ne suppose plus que $f \in \mathcal{C}_c(]0, \infty[)$. En utilisant la densité de telles fonctions, montrer que $F \in \mathcal{C}(]0, \infty[) \cap L^p_+$ et l'inégalité (1).
3. Donner un exemple de $f \geq 0$ et $f \in L^1$ tel que $F \notin L^1$.