TD 3

Compléments sur les mesures, mesures de Borel positives, régularité

Exercice 1. (∗∗) **(Tribu complétée et extension extérieure)**
Commençons par deux définitions.

— Un espace mesuré $(E, \mathcal{E}, \nu)$ est dit *complet* si toute partie N de E qui est *négligeable*, ce qui veut dire qu'il existe $A \in \mathcal{E}$ avec $N \subset A$ et $\nu(A) = 0$, est nécessairement mesurable (dit d'une autre manière, tout sous-ensemble d'un ensemble mesurable de mesure nulle est lui-même mesurable).

— On dit que l'espace mesuré $(E, \mathcal{E}', \nu')$ est une extension de l'espace mesuré $(E, \mathcal{E}, \nu)$ si $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}'$ et $\nu'_{|\mathcal{E}} = \nu$.

Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré. On note Σ l'ensemble des parties de X incluses dans un ensemble mesurable de mesure nulle (c'est-à-dire l'ensemble des parties négligeables) et on considère la tribu engendrée suivante :

$$\mathcal{E}' = \sigma\big(\mathcal{E} \cup \Sigma\big).$$

1. Montrer que
$$\mathcal{E}' = \{A \cup N \ ; \ A \in \mathcal{E}, \ N \in \Sigma\}$$
et qu'on peut aussi supposer, dans cette description, que $A \cap N = \emptyset$ et même que $N \subset B$ avec $B \in \mathcal{E}$ de mesure nulle et tel que $A \cap B = 0$.

On définit $\mu' : \mathcal{E}' \to [0, +\infty]$ par

$$\mu'(A) = \inf\{\mu(B) \ ; \ A \subset B \text{ et } B \in \mathcal{E}\}.$$

2. (a) Montrer que μ' est monotone et que $\mu' = \mu$ sur $\mathcal{E}$.
   (b) Montrer que si $C = A \cup N$ avec $A \in \mathcal{E}$, $N \in \Sigma$, alors $\mu'(C) = \mu(A)$.
   (c) Montrer que μ' est une mesure sur la tribu $\mathcal{E}'$.
   (d) Montrer que pour tout $E \in \mathcal{E}'$ on a
   $$\mu'(E) = 0 \Longleftrightarrow E \in \Sigma,$$
   et en déduire que les ensembles μ'-négligeables sont exactement les ensembles μ-négligeables (i.e. Σ).
   (e) En déduire que $(E, \mathcal{E}', \mu')$ est une extension de $(E, \mathcal{E}, \mu)$ qui est complète.
3. Soit X un espace topologique et μ une mesure borélienne régulière. Montrer que la mesure μ' est encore régulière sur $\mathcal{E}'$ (c'est-à-dire qu'on a la régularité intérieure et extérieure pour tous les éléments de $\mathcal{E}'$).

Solution de l'exercice 1.

1. Posons provisoirement $\mathcal{T} = \{A \cup N\ ;\ A \in \mathcal{E},\ N \in \Sigma\}$. On peut remarquer que $\mathcal{T}$ contient $\mathcal{E} \cup \Sigma$ (attention, ne pas confondre réunion de classes d'ensembles et réunion d'ensembles des classes...), mais cela ne nous aide pas beaucoup. Par contre, les élément de $\mathcal{T}$ étant par construction dans $\mathcal{E}'$, il suffit de montrer que $\mathcal{T}$ est une tribu. ON a bien $\emptyset \in \mathcal{T}$. Soit $C_n = A_n \cup N_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$ avec les notations évidentes. Alors on peut écrire
$$\bigcup_n C_n = \Big(\bigcup_n A_n\Big) \cup \Big(\bigcup_n N_n\Big)$$
et comme il est immédiat qu'une réunion dénombrable d'ensembles négligeables est encore négligeable (pourquoi ?), on en déduit que $\bigcup_n C_n \in \mathcal{T}$. Soit enfin $C \in \mathcal{T}$, que l'on écrit donc $C = A \cup N$; a-t-on $C^c := X \setminus C \in \mathcal{T}$? Soit $B \in \mathcal{E}$ de mesure nulle contenant N. On peut écrire
$$C^c = A^c \cap N^c = A^c \setminus N = (A^c \setminus B) \cup (B \setminus N);$$
Le premier ensemble est un borélien, et le deuxième est inclus dans B donc négligeable. Cela termine la démonstration du fait que $\mathcal{T}$ est une tribu, et donc que $\mathcal{T} = \mathcal{E}'$. Les réécritures qui s'en suivent sont immédiates.
2. La monotonie découle de la définition, et celle-ci entraine que $\mu'(E) = \mu(E)$ si $E \in \mathcal{E}$. Soit $C = A \cup N$ avec les notations de la question. D'un côté on a $\mu'(C) \geq \mu'(A) = \mu(A)$. D'autre part, si $B \in \mathcal{E}$ est un ensemble de μ-mesure nulle contenant N, on a alors
$$\mu'(C) \leq \mu'(A \cup B) = \mu(A \cup B) = \mu(A).$$
Cela montre donc que $\mu'(C) = \mu(A)$. Enfin, montrons que μ' est une mesure sur $\mathcal{E}'$. Tout d'abord, $\mu'(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$. Soit ensuite C_n une suite de parties appartenant à $\mathcal{E}'$ et 2 à 2 disjointes ; écrivons pour tout n, $C_n = A_n \cup N_n$ avec $A_n \in \mathcal{E}$ et N_n négligeable. Comme $\cup_n N_n$ est encore négligeable, il découle de de qu'on vient de voir, et du fait que les A_n sont aussi 2 à 2 disjoints, que
$$\begin{aligned}\mu'\Big(\bigcup_n C_n\Big) = \mu'\Big(\Big(\bigcup_n A_n\Big) \cup \Big(\bigcup_n N_n\Big)\Big) &= \mu'\Big(\bigcup_n A_n\Big) \\ &= \mu\Big(\bigcup_n A_n\Big) = \sum_n \mu(A_n) = \sum_n \mu'(C_n).\end{aligned}$$
On a donc bien que μ' est une mesure sur $\mathcal{E}'$.
Soit $E \in \mathcal{E}'$. Alors si $E \in \Sigma$, on peut trouver un élément de $\mathcal{E}$ qui le contient et qui est de μ- mesure nulle. Il s'ensuit que $\mu'(E) = 0$. Réciproquement, si $\mu'(E) = 0$, alors en écrivant $E = A \cup N \subset A \cup B$ avec $A, B \in \mathcal{E}$ et $\mu(B) = 0$, on voit que vu que $\mu'(E) = \mu(A) = 0$ et donc $\mu(A \cup B) = 0$, ce qui implique que $E \subset \Sigma$ car $E \subset A \cup B$. Par construction un ensemble μ-négligeable est μ'-négligeable. Réciproquement, soit $C \in \mathcal{E}'$ avec $\mu'(C) = 0$ et $R \subset X$ une partie quelconque telle que $R \subset C$. A-t-on $R \in \Sigma$? Oui, car $\mu'(C) = 0$ entraine que $C \in \Sigma$, et tout sous-ensemble de C est donc encore dans Σ par monotonie de μ'.
Il découle de ce qu'on a vu que $(E, \mathcal{E}', \nu')$ est une extension de $(E, \mathcal{E}, \nu)$. Par ailleurs, R est μ'-négligeable, elle est dans Σ et donc dans $\mathcal{E}'$, ce qui montre le caractère complet.

3. Soit $C \in \mathcal{E}'$. D'après ce qu'on a vu (en écrivant $C = A \cap N \subset A \cup B =: D$...), on a donc l'existence de $A, D \subset \mathcal{E}$ avec

$$A \subset C \subset D$$

et $\mu(D \setminus A) = 0$, et donc $\mu'(C) = \mu(A) = \mu(B)$. La régularité extérieure pour D et intérieure pour A donne donc les régularités voulues pour C.

Exercice 2.(∗∗) Soient X un espace de Hausdorff localement compact et μ une mesure borélienne finie sur les compact et régulière. On considère l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}_c(X), \|\cdot\|_\infty) \subset L^\infty(\mu)$. Montrer que la forme linéaire Λ_μ, donnée par $\Lambda_\mu(f) = \int f \, d\mu$, est continue sur $(\mathcal{C}_c(X), \|\cdot\|_\infty)$ si et seulement si μ est finie.

Solution de l'exercice 2. On rappelle d'abord que Λ_μ est bien définie et linéaire, car $\mathcal{C}_c(X) \subset L^1(\mu)$. Par ailleurs on a, pour toute fonction f continue sur X et à support compact,

$$|\Lambda_\mu(f)| \leq \mu(\mathrm{supp(f)}) \, \|f\|_\infty.$$

On voit que si μ est finie, i.e. $\mu(X) \neq +\infty$, alors il existe $C > 0$ (par exemple $C = \mu(X)$) tel que $\forall f \in \mathcal{C}_c(X)$, $|\Lambda_\mu(f)| \leq C \, \|f\|_\infty$.

Réciproquement, supposons qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall f \in \mathcal{C}_c(X)$, $|\Lambda_\mu(f)| \leq C \, \|f\|_\infty$. On veut montrer que $\mu(E) \leq C$ pour tout borélien E. On peut procéder de plusieurs manière. On peut utiliser la densité dans L^1 des fonctions continues à support compact pour approcher 1_E (lorsque E est de mesure finie). On peut aussi revenir à un argument de base comme suit. Soit K un compact de X. Par le lemme d'Urysohn, il existe $f \in \mathcal{C}_c(X)$ tel que $K \prec f$. Alors, comme $1_K \leq f \leq 1$, on a

$$\mu(K) = \int 1_K \, d\mu \leq \int f \, d\mu \leq C.$$

Ainsi, la mesure de tout compact est majorée par C. Pour conclure, on utilise la régularité intérieure.

Exercice 3.(∗) Soit $E \subset \mathbb{R}$ un ensemble de mesure de Lebesgue finie.

1. Montrer que la fonction
$$x \mapsto \lambda(E \cap (E + x))$$
est continue en zéro.
2. On suppose que $\lambda(E) > 0$. Montrer que
$$E - E = \{x - y : \quad x, y \in E\}$$
contient un voisinage de zéro.

Solution de l'exercice 3.

1. La mesure de Lebesgue étant régulière, il existe $U \subset \mathbb{R}$ ouvert, $E \subset U$, tel que $\lambda(U \backslash E) < \epsilon$. On note $A = E \backslash (E + x)$. On a l'inégalité :
$$\lambda(E) - \lambda(A) \leq \lambda(E \cap (E + x)) \leq \lambda(E).$$

Afin de montrer la continuité de $f(x) = \lambda(E \cap (E + x))$ en zero, comme $f(0) = \lambda(E)$, il suffit donc de montrer que, pour x petit, $\lambda(A)$ est petite. On note $B = A \backslash (U + x)$ et $C = A \cap (U + x)$. On a donc $A = B \cup C$. On a

$$C \subset (E \backslash (E + x)) \cap (U + x) \subset (U + x) \backslash (E + x) = (U \backslash E) + x.$$

Comme λ est invariante par translation, on a $\lambda(C) \leq \lambda(U \backslash E) < \epsilon$. Il reste à montrer que $\lambda(B)$ est petite quand x est petit. On a $B = (E \backslash (E + x)) \backslash (U + x) \subset U \backslash (U + x)$. Comme U est un ouvert de $\mathbb{R}$ il existe une suite dénombrable d'intervalles ouverts disjoints I_j telle que $U = \cup_j I_j$. Donc

$$B \subset \cup_j (I_j \backslash (U + x)) \subset \cup_j (I_j \backslash (I_j + x)).$$

Par conséquent

$$\lambda(B) \leq \sum_j \lambda(I_j \backslash (I_j + x)) \leq \sum_{j=1}^{N} \lambda(I_j \backslash (I_j + x)) + \sum_{j=N+1}^{\infty} \lambda(I_j).$$

Comme $\lambda(U) \leq \lambda(E) + \epsilon < \infty$ on a que la série $\sum_j \lambda(I_j)$ converge, donc il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{j=N+1}^{\infty} \lambda(I_j) < \epsilon$. En prenant $x = \frac{\epsilon}{N}$ on a $\lambda(I_j \backslash (I_j + x)) \leq x$ (ça se calcule exactement pour $I =]a, b[$) et on en déduit $\lambda(B) \leq 2\epsilon$.

2. On a $f(0) = \lambda(E) > 0$ donc par continuité il existe $a > 0$ tel que $f(x) > 0$ pour tout $x \in] - a, a[$. En particulier, ceci implique que $E \cap (E + x) \neq \emptyset$ pour tout $x \in] - a, a[$. Donc pour tout $x \in] - a, a[$ il existe $y, z \in E$ tel que $y = z + x$. Ceci implique $x = y - z \in E - E$. Donc $] - a, a[\subset E - E$.

Exercice 4. Soit $d : \mathbb{R}^2 \times R^2 \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{cases} |y_1 - y_2| & x_1 = x_2 \\ 1 + |y_1 - y_2| & x_1 \neq x_2 \end{cases}$$

1. Montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}^2$. Décrire les boules définies par d, en fonction de $r < 1$, $r = 1$ et $r > 1$.
2. Montrer qu'un compact K de $\mathbb{R}^2$ pour cette distance est inclus dans une union finie de type $\cup_j \{x_j\} \times [a_j, b_j]$.
3. Pour $f \in C_c(\mathbb{R}^2)$ soit $x_1, \ldots, x_n$ les valeurs de x pour lesquels $f(x, y) \neq 0$ pour au moins un y. Justifier qu'il y en a un nombre fini. On définit

$$\Lambda f = \sum_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_j, y) dy.$$

Soit μ la mesure associée à Λ par le théorème de répresentation de Riesz.

4. Montrer que $\mu(\{x_0\} \times [a, b]) = b - a$.
5. Montrer que $\mu(\mathbb{R} \times \{0\}) = \infty$ et $\mu(K) = 0$ pour tout K compact inclus dans $\mathbb{R} \times \{0\}$.

Solution de l'exercice 4.

1. La fonction d est symétrique, positive. On a $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = 0$ ssi $(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$. Il reste à montrer l'inégalité triangulaire. Soit $P_1 = (x_1,y_1)$, $P_2 = (x_2,y_2)$, $P_3 = (x_3,y_3) \in \mathbb{R}^2$. Si $x_1 = x_2 = x_3$, l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue implique l'inégalité triangulaire pour d. Si $x_1 \neq x_2$ alors $x_1 \neq x_3$ (ou $x_2 \neq x_3$). Donc
$$d(P_1,P_2) = 1 + |y_1 - y_2| \leq 1 + |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2| \leq d(P_1,P_3) + d(P_3,P_2).$$
Si $r \leq 1$ alors $B((x_0,y_0),r) = \{x_0\}\times]y_0 - r, y_0 + r[$. Si $r > 1$ alors
$$B((x_0,y_0),r) = \{x_0\}\times]y_0 - r, y_0 + r[\cup \mathbb{R}\times]y_0 - r + 1, y_0 + r - 1[.$$
2. Un compact $K \subset \mathbb{R}^2$ est inclus dans un réunion finie de boules de rayon $\frac{1}{2}$. Or, on a vu au point précédent que les boules de rayon ≤ 1 sont des segments verticaux, d'où le résultat.
3. La fonction f étant à support compact, le résultat a été montré à la question précédente.
4. On a $\Lambda f = \int f d\mu$. On a $\mu(\{x_0\} \times [a,b]) = \int 1_{\{x_0\}\times[a,b]} d\mu$. On considère deux suites de fonctions continues à support compact qui approchent cette fonction indicatrice $f_n \leq 1_{\{x_0\}\times[a,b]} \leq g_n$ telle que $\lim_n \int f_n d\mu = \lim_n \int g_n d\mu = \int 1_{\{x_0\}\times[a,b]} d\mu$. On peut prendre les f_n et g_n tel que $supp(f_n), supp(g_n) \subset \{x_0\} \times \mathbb{R}$. On a donc
$$\int_{\mathbb{R}^2} f_n d\mu = \int_{\mathbb{R}} f_n(x_0,y) dy \leq \int 1_{\{x_0\}\times[a,b]} dy = b - a \leq \int_{\mathbb{R}} g_n(x_0,y) dy = \int_{\mathbb{R}^2} g_n d\mu$$
et la conclusion suit par passage à la limite et double encadrement.
5. Par la régularité extérieure de μ, qui est assuré par le théorème de représentation de Riesz, on a $\mu(\mathbb{R} \times \{0\}) = \inf\{\mu(V), V \subset \mathbb{R}^2 \text{ ouvert t.q. } \mathbb{R} \times \{0\} \subset V\}$. Soit V un tel ouvert. Il suffit de montrer que $\mu(V) = +\infty$. Comme V est ouvert, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x,0) \in V$ et il existe $0 < r_x < 1$ tel que $B((x,0),r_x) = \{x\}\times]-r_x, r_x[\subset V$. On note $A_n = \{x \in \mathbb{R} \text{ t.q. } r_x > \frac{1}{n}\}$. On a $\mathbb{R} = \cup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$ donc il existe au moins un n_0 tel que A_{n_0} contient une infinité de termes (sinon ça implique que $\mathbb{R}$ est dénombrable). Soit $B \subset A_{n_0}$ un ensemble infini et dénombrable. Alors
$$\mu(V) \geq \sum_{x\in B} \mu(\{x\}\times]r_x, r_x[) \geq \sum_{x\in B} \frac{2}{n_0} = \infty.$$
Par ailleurs, si $K \subset \mathbb{R} \times \{0\}$ est compact, alors d'après la question 2. on a K est une réunion fini de singletons $\{x_j\} \times \{0\}$. On a $\mu(\{x_j\} \times \{0\}) \leq \mu(\{x_j\} \times [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]) = \frac{2}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donc $\mu(\{x_j\} \times \{0\}) = 0$. Ceci montre que la mesure μ n'est pas intérieurement régulière.

Exercice 5. Soit $A \subset \mathbb{R}$ tel que tout sous-ensemble de A est Lebesgue mesurable. Montrer que $\lambda(A) = 0$.
Indication : On considère, pour $t \in \mathbb{Q}$, $A_t = A \cap (E + t)$, où E est l'ensemble construit à l'éxercice précedent. On considère K compact, $K \subset A_t$ et $H = \cup_{r\in\mathbb{Q}\cap[0,1]} K + r$. Montrer que $\lambda(H) < \infty$ et donc $\lambda(K) = 0$.

Solution de l'exercice 5. On considère, pour $t \in \mathbb{Q}$, $A_t = A \cap (E+t)$, où E est l'ensemble construit à l'éxercice précedent. On a $A_t \subset A$ donc par hypothèse A_t est mesurable. On fixe $t \in \mathbb{Q}$. Soit K compact, $K \subset A_t$ et $H = \cup_{r \in \mathbb{Q}\cap[0,1]} K + r \subset$. On a H mesurable et $H \subset K + [0,1]$ donc H borné et par conséquence $\lambda(H) < \infty$. Par les propriétés de E, si $r, q \in \mathbb{Q}$ et $r \neq q$, alors $K + r \cap K + q = \emptyset$. Donc $\lambda(H) = \sum_{q \in \mathbb{Q}\cap[0,1]} \lambda(K+r) < \infty$ donc $\lambda(K) = 0$. Par la régularité intérieure de la mesure de Lebesgue on a $\lambda(A_t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{Q}$. De plus $A \subset \cup_{t\in\mathbb{Q}} A_t$, donc $\lambda(A) = 0$.

Exercice 6.($**$) Montrer que la mesure de Lebesgue d'un ensemble dénombrable est zero. En déduire que $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$.

Solution de l'exercice 6. Soit $\epsilon > 0$. On dénote $A = \{a_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ et on a $A \subset \cup_{n\in\mathbb{N}}]a_n - \frac{\epsilon}{2^{n+2}}, a_n + \frac{\epsilon}{2^{n+2}}[$. Par sous-additivité de la mesure de Lebesgue, $\lambda(A) \leq \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{n+1}} = \epsilon$ et ceci pour tout $\epsilon > 0$. Donc $\lambda(A) = 0$.

Exercice 7.($*$) Soit K et L deux compacts de $\mathbb{R}^n$. Montrer que la somme $K + L = \{x \in \mathbb{R}^n\ \exists (a,b) \in K \times L,\ x = a + b\}$ est aussi compact.

Solution de l'exercice 7. On voit que $K + L$ est borné, car si $K \in [-a,a]^n$ et $L \in [-b,b]^n$, alors $K + L \subset [-a-b, a+b]^n$. Soit x_n une suite de $K+L$ convergeant dans $\mathbb{R}^n$ vers un certain x. Par définition, il existe des suites $y_n \in K$ et $z_n \in L$ tel que $x_n = y_n + z_n$. On peut extraire des sous-suites convergente communes des suites (y_n) et $z_n)$, ce qui donnera une sous-suite convergente de x qui aura une limite dans $K + L$. Donc $x \in K + L$ et cet ensemble est donc fermé.

Exercice 8. ($*$) **(Inégalité de Brunn-Minkowski sur $\mathbb{R}$)** Pour $A, B \subset \mathbb{R}$ on note $A + B = \{a + b\,;\ a \in A,\ b \in B\}$. On notera $|\cdot|$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Le but de cet exercice est de montrer que si A et B sont deux boréliens non-vides de $\mathbb{R}$, alors

$$|A + B| \geq |A| + |B|.$$

On supposera dans la suite que $A + B$ est borélien (en fait ce n'est pas nécessaire, car on peut toujours garantir que $A + B$ est Lebesgue-mesurable).

1. Montrer l'inégalité lorsque A et B sont compacts (on montrera qu'on peut se ramener au cas où $\max A = \min B = \{0\}$.).
2. Conclure

Solution de l'exercice 8. a) On suppose donc que A et B sont deux compacts (non-vides). On remarque que si l'on translate A ou B, alors $A + B$ est aussi translaté, et les mesures des ensembles $A, B, A + B$ ne changent pas. On se ramène donc (en deux temps) au cas $\max A = \min B = \{0\}$. Mais alors $A + B \supset A \cup B$ et comme l'intersection entre A et B est de mesure nulle, on a bien $|A + B| \geq |A \cup B| = |A| + |B|$.

b) On utilise la régularité intérieure de la mesure de Lebesgue. Soit K et L des compacts tels que $K \subset A$ et $L \subset B$. On remarque que $K + L \subset A + B$, et donc, d'après la question précédente,

$$|A + B| \geq |K + L| = |K| + |L|.$$

En prenant le supremum sur K et sur L, on obtient l'inégalité voulue.

Exercice 9. ($**$) **(Convolution sur $\mathbb{R}^d$)** On travaille sur $\mathbb{R}^d$ muni de la mesure de Lebesgue que l'on notera λ ou dx.

— Si f et g sont deux fonctions boréliennes positives sur $\mathbb{R}^d$, on définit pour $x \in \mathbb{R}^d$ fixé

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)\,dy.$$

La fonction positive $f * g$ ainsi définie s'appelle la convolée de f et g.

— Deux fonctions boréliennes f et g sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs réelles ou complexes sont dites *convolables* si pour presque-tout $x \in \mathbb{R}^d$, la fonction $y \to f(y)g(x-y)$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^d)$, c'est-à-dire $|f| * |g|(x) < +\infty$ pour presque tout x. Dans ce cas, on pose pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)\,dy$$

et la fonction $f * g$ définie presque partout s'appelle la convolée de f et g.

1. Montrer que dans les deux cas ci-dessous (fonctions positives ou convolables), la fonction convolée est borélienne.
2. Montrer que f et g sont convolables si et seulement si $|f|$ et $|g|$ le sont, et qu'alors $|f * g| \leq |f| * |g|$ presque partout.
3. Montrer que si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors f et $1_{\mathbb{R}^d}$ sont convolables, et $f * 1_{\mathbb{R}^d}$ est constante et vaut $f * 1_{\mathbb{R}^d}(x) = \int f\,d\lambda, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.
4. Si f est localement intégrable (autrement dit $\int_B |f|\,d\lambda < \infty$ sur toute boule $B \subset \mathbb{R}^d$) et g est essentiellement bornée et à support compact, alors f et g sont convolables (et $f * g$ est même défini partout).
5. Montrer que si f et g sont continues à support compact, alors f et g sont convolables, et que $f * g$ est continue à support compact inclus dans la somme des supports de f et g.
6. Montrer que si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ alors f et g sont convolables, et que la convolée est définie partout et bornée.
7. Montrer que si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, alors $f * g$ est continue (bornée).
   Illustration : calculer $1_{[0,1]} * 1_{[0,1]}$.
8. Soient $p, q \in [1, +\infty]$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1 + \dfrac{1}{r}$. Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$. On souhaite établir que f et g sont convolables, que $f * g \in L^r(\mathbb{R}^d)$, et que

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

   Cette inégalité s'appelle *l'inégalité d'Young.*

   — Montrer qu'il suffit de considérer des fonctions f et g positives.
   Dans la suite, on supposera que f et g sont positives.

   — Montrer qu'on peut supposer que $\int g^q = 1$. *On le supposera dans la suite.*

— Montrer que pour tout $s \in]0,1[$ et $x \in \mathbb{R}^d$ on a

$$f * g(x) \leq \|f^{1-s}\|_{q'} \left(\int f(x-t)^{sq} g(t)^q dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

puis que $\big(f * g(x)\big)^r \leq \|f^{(1-s)}\|_{q'}^r \displaystyle\int f(x-t)^{sr} g(t)^q \, dt$.

— En déduire que $\|f * g\|_r \leq \|f\|_{q'(1-s)}^{1-s} \|f\|\|_{sr}^s$ et conclure.

Solution de l'exercice 9.

1. Cela découle de Fubini. Regardons d'abord le cas positif. La fonction $(x,y) \to F(x,y) := f(y)g(x-y)$ est une fonction positives mesurable pour $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, et donc la fonction section $x \to \int F(x,y)\, dy$ est borélienne sur $\mathbb{R}^d$. De plus, le théorème de Fubini-Tonelli nous permet de dire que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} f * g(x)\, dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} F(x,y)\, dy \Big)\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} F(x,y)\, dx \Big)\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} g(x-y)\, dx \Big) f(y)\, dy = \left(\int_{\mathbb{R}^d} f\, d\lambda \right) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^d} g\, d\lambda \right),\end{aligned}$$

en utilisant que la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ est invariante par translations. Pour f et g à valeurs réelles, convolables, on a pour presque tout tout x tel que $|f|*|g|(x) < +\infty$, et par croissance de l'intégrale, toutes les fonctions $f^{\pm} * g^{\pm}(x)$ sont bien définies et finies, et par linéarité (pour des fonctions dans $L^1(\mathbb{R}^d)$) on a

$$f * g(x) = f^+ * g^+(x) - f^+ * g^-(x) - f^- * g^+(x) + f^- * g^-(x),$$

et tous les termes de cette somme sont des fonctions boréliennes (voir section précédente), d'où le résultat.

2. La propriété découle de la définition, et l'inégalité de l'inégalité triangulaire pour les fonctions intégrables.

3. OK

4. Si g est nulle en dehors d'une certaine boule $B \subset \mathbb{R}^d$, on a

$$\begin{aligned} |\, f\,| * |\, g\,|(x) &= \int |\, f(x-y)\,|.|\, g(y)\,|\, \mathbb{1}_{\{|\, g\,| \leq \|\, g\,\|_\infty\}}\, \mathbb{1}_{\{|\, g\,| \neq 0\}}\, dy \\ &\leq \|\, g\,\|_\infty \int |\, f(x-y)\,|\, \mathbb{1}_{\{|\, g\,| \neq 0\}}\, dy \\ &\leq \|\, g\,\|_\infty \int_B |\, f(x-y)\,|\, dy \\ &= \|\, g\,\|_\infty \int_{x-B} |\, f\,|\, d\lambda, \end{aligned}$$

qui est fini car $x - B$ est borné (donc inclus dans une certaine boule).

5. On sait qu'elles sont convolables par le théorème précédent. Si on note K et L les support de f et g respectivement, on voit que pour $x \not\in K+L$, alors $f(y)g(x-y)=0$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ (car sinon...). Ainsi, le support de $f*g$ est inclus dans $K+L$ (qui est un compact). De plus $|f*g| \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty 1_{K+L}$ et on peut conclure en application le théorème de continuité sous l'intégrale (convergence dominée) en utilisant que g (ou f, au choix) est continue.
6. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ que $y \to g(x-y)$ est essentiellement bornée par $\|g\|_\infty$ par invariance par translation de la mesure de Lebesgue ; plus précisément, si on note $R_x(y) = x-y$ la translation par x composée avec l'application $-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^d}$, alors R_x est une isométrie affine qui préserve la mesure de Lebesgue, et donc on a

$$\lambda_d(\{|g \circ R_x| \ > t\}) = \lambda_d(R_x^{-1}(\{|g| \ > t\}) = \lambda_d(R_x(\{|g| \ > t\}) = \lambda_d(\{|g| \ > t\})$$

   On a donc
$$|f| * |g|(x) = \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|g(x-y)|\, dy \leq \|g\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d} |f|$$
   d'où l'on déduit le caractère convolable, mais aussi que la convolée est bien définie-partout, avec et $|f*g| \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$ partout sur $\mathbb{R}^d$.
7. Soit $f \in L^1$ et $g \in L^\infty$ fixés. On a vu que l'application $x \to \tau_x(f)$ est continue de $\mathbb{R}$ dans L^1, où τ_x désigne la translation par x ($\tau_x(f)(y) := f(y-x)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$). Par conséquent, pour $g \in L^\infty = (L^1)^*$, qui est le dual de L^1, on a, par composition d'applications continues, que

$$x \to \langle \tau_x(f), g \rangle = \int \tau_x(f) g = f*g(x)$$

   est une application continue, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, donc.
   Le calcul de $F(t) := 1_{[0,1]} * 1_{[0,1]}(t) = \int_0^1 1_{[t-1,t]}(s)\, ds$ donne que F est une fonction continue affine par morceaux, qui vaut $F(t) = t$ sur $[0,1]$ et $F(t) = 2-t$ sur $[1,2]$, et 0 ailleurs.
8. L'étude de la convolution se ramène à celle des fonctions positives, par définition des fonctions convolables et par l'inégalité $\|f*g| \leq |f| * |g|$.
   Quitte à multiplier g par une constante, on peut supposer que $||g||_q = 1$.
   Les cas où r vaut $+\infty$ ou p ou q sont traités dans le cours. Comme par ailleurs on a forcément $p, q \leq r$, il s'agit de généraliser au cas où $1 < p, q < r < +\infty$. L'idée est de se ramener au cas $g \in L^1$ par une inégalité de Hölder :
   Pour tout x dans $\mathbb{R}$, si $0 \leq s \leq 1$, on a

$$f*g(x) = \int f(x-t)^{1-s} f(x-t)^s g(t) dt \leq \|f^{1-s}\|_{q'} \left(\int f(x-t)^{sq} g(t)^q dt \right)^{\frac{1}{q}},$$

   où q' est l'exposant conjugué de q. Comme $r \geq q$ et $\int g(t)^q dt = 1$ (et donc $g(t)^q dt$ est une mesure de probabilité), on peut utiliser l'inégalité de Jensen pour obtenir

$$\left(\int f(x-t)^{sq} g(t)^q dt \right)^{\frac{r}{q}} \leq \int \int f(x-t)^{sr} g(t)^q dt$$

En intégrant en x, par Fubini-Tonelli et changement de variables $x' = x - t$, et encore par $\int |g(t)|^q dt = 1$ on obtient

$$\|f * g\|_r \leq \|\,|f|^{1-s}\|_{q'} \|f\|_{sr}^s = \|f\|_{q'(1-s)}^{1-s} \|f\|_{sr}^s.$$

Si on pose $s = p/r$, l'égalité $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ entraîne $q'(1-s) = p = sr$ et donc $\|f\|_{q'(1-s)}^{1-s} \|f\|_{sr}^s = \|f\|_p$.

Exercice 10.$(*)$ Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^d$ à support compact. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$.

Solution de l'exercice 10. Faire un dessin. Il faut juste voir que ça peut "baver" un peu.

On peut donc supposer que f est nulle en dehors d'une certain boule euclidienne $B(R)$. Comme f est continue sur $B(R+1)$, elle y est uniformément continue. Soit donc $\epsilon > 0$, il existe donc δ tel que $\forall x, y \in B(R+1)$, $|x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$.

Soit $\delta' = \min\{1, \delta\}$ et soit $x, y \in \mathbb{R}^n$ avec $|x - y| \leq \delta'$. Si x et y sont dans $B(R+1)$, on est content. Si x et y ne sont pas dans $B(R)$, en est content aussi car tout vaut zéro. Quitte à échanger x et y, il reste donc à regarder le cas où $x \in B(R)$ et $y \notin B(R+1)$. Mais ce cas n'est pas possible, car les vecteurs seraient à distance strictement plus grande que 1.

Exercice 11. $(**)$ **(Suites régularisantes, convolution et densité des fonctions régulières)**

On travaille encore avec la mesure de Lebesgue dur $\mathbb{R}^d$. Par fonction régulière on entend une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^d$. L'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est l'espace des fonctions qui sont régulières sur $\mathbb{R}^d$ et qui de plus sont à support compact.

On appelle *suite régularisante* (ou *approximation de l'identité*) une suite $(j_k)_{k\geq 1}$ de fonction définies sur $\mathbb{R}^d$ vérifiant les propriétés suivantes : pour tout $k \geq 1$

$$j_k \geq 0,, \quad \int j_k = 1, \quad j_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d), \quad \text{et} \quad \operatorname{supp}(j_k) \subset B(r_k),$$

avec

$$r_k \to 0 \quad \text{lorsque } k \to +\infty.$$

1. On suppose que l'on sait construire une fonction J positive, régulière à support compact avec $J > 0$ au voisinage de zéro (par exemple) de sorte que $\int J > 0$. On définit

$$j(x) = \frac{1}{\int J} J(x)$$

et pour tout $k \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}^d$ on pose

$$j_k(x) = k^d j(kx).$$

Montrer que (j_k) est une approximation de l'identité

2. Montrer que si $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, alors $f * g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, avec pour $(k_1, \dots k_d) \in \mathbb{N}^d$, $N = k_1 + \dots k_d$: $\frac{\partial^N}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_d^{k_d}}(f * g) = f * \frac{\partial^N}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_d^{k_d}} g$.

3. Montrer que si (j_k) est une suite régularisante et $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, alors

$$f * j_k \longrightarrow f$$

dans tout espace $L^p(\mathbb{R}^d)$, $p \in [1, +\infty]$.

4. Montrer que $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, pour $p \in [1, +\infty[$.

Commentaire : le même raisonnement fonctionne sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ et permet de montrer que l'espace des fonctions régulières sur R^d et à support compact inclus dans Ω est dense dans $L^p(\Omega)$.

Solution de l'exercice 11.

1.
2. On sait déjà que $f * g$ est continue à support compact par l'exercice précédent. Si on note K et L les support de f et g respectivement, on a $|f * \partial_{x_k} g| \leq \|f\|_\infty \|\partial_{x_k} g\|_\infty 1_{K+L}$ et par le théorème de dérivation sous le signe somme on en tire que $f * g$ est C^1 en x_k pour tout $k \leq d$, donc que f est C^1. Et on recommence (récurrence).
3. On a, pour $x \in \mathbb{R}^d$,

$$f * j_k(x) - f(x) = \int \big(f(x-y) - f(x)\big) j_k(y)\, dy = \int_{B(r_k)} \big(f(x-y) - f(x)\big) j_k(y)\, dy$$

et donc

$$|f * j_k(x) - f(x)| \leq \sup_{|y| \leq r_k} |f(x-y) - f(y)|.$$

On a vue dans un exercice précédent qu'une fonction continue à support compact est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$. On en déduit que $f * j_k$ tend vers f uniformément sur $\mathbb{R}^d$.

Par ailleurs, prenons $B(R)$ une boule contenant le support de f et $B(R')$ une boule contenant tout les support des (j_k) (prendre par exemple $R' = \max r_k$). Alors $f * j_k - f$ est à support dans $B(R+R')$ puisque en dehors de cette boule les fonctions en question sont nulles.

La convergence uniforme sur $\mathbb{R}^n$ associé au fait que la suite de fonction est support inclus dans un compact fixé permet de conclure directement, par convergence dominée ou simplement en écrivant que

$$\|f * j_k - f\|_p \leq (\ell(B(R+R'))^{1/p} \|f * j_k - f\|_\infty^{1/p} \to 0.$$

4. D'après le cours, on sait que les fonctions continues à support compact sont denses dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, et les deux questions précédentes permettent de dire qu'on peut approcher ces fonctions par des fonctions régulières à support compact.

Exercice 12. (Inégalité de Hardy) Soit $p \in]1, \infty[$. On note $L_+^p := L^p(]0, \infty[, \mathcal{B}(]0, \infty[), \lambda)$ où λ est la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $]0, \infty[$. Soit $f \in L_+^p$. Pour $x \in]0, \infty[$ on pose $F(x) = \frac{1}{x} \int f 1_{]0,x[} d\lambda$. Le but de l'exercice est de montrer que $F \in L_+^p$ et

$$||F||_p \leq \frac{p}{p-1} ||f||_p. \tag{1}$$

1. On suppose, dans cette question, que $f \in \mathcal{C}_c(]0,\infty[)$.
   (a) Montrer que $F \in \mathcal{C}^1(]0,\infty[) \cap L^p_+$. Montrer que $xF'(x) = -F(x) + f(x)$ pour tout $x > 0$.
   (b) On suppose, seulement dans cette question, que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in]0,\infty[$. Montrer que $\int_0^\infty F^p(x)dx = \frac{p}{p-1}\int_0^\infty F^{p-1}(x)f(x)dx$. (On pourrait faire une IPP.) En déduire (1).
   (c) Montrer que $||F||_p \leq \frac{p}{p-1}||f||_p$ sans supposer $f(x) \geq 0$.
2. On ne suppose plus que $f \in \mathcal{C}_c(]0,\infty[)$. En utilisant la densité de telles fonctions, montrer que $F \in \mathcal{C}(]0,\infty[) \cap L^p_+$ et l'inégalité (1).
3. Donner un exemple de $f \geq 0$ et $f \in L^1$ tel que $F \notin L^1$.

Solution de l'exercice 12.

1. (a) On pose $G(x) = \int f 1_{]0,x[} d\lambda$. Comme f est continue, G est $\mathcal{C}^1$ et $G' = f$. On a $F(x) = \frac{1}{x}G(x)$ donc $F \in \mathcal{C}^1$ et $xF'(x) + F(x) = G'(x) = f(x)$. Pour montrer que $F \in L^p_+$ on utilise que $f \in \mathcal{C}_c(]0,\infty[)$: il existe $a, A \in]0,\infty[$ tels que $supp(f) \subset [a,A]$. On note $M = \sup\{|f(x)|, x \in [a,A]\}$. Alors $|F(x)| \leq \frac{M(A-a)}{x}1_{[a,\infty[}(x)$. Comme $p > 1$ et $a > 0$ on en déduit $F \in L^p_+$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant $xF'(x) = -F(x) + f(x)$ on intègre par parties entre F^p et 1 et on obtient :
   $$(p-1)\int_0^n F^p(x)dx = \int_0^n pF^{p-1}(x)f(x)dx - F^p(n)n.$$
   On utilise $0 \leq F^p(n)n \leq \frac{M(A-a)}{n^{p-1}}$ et $p > 1$ pour en déduire :
   $$(p-1)\int_0^\infty F^p(x)dx = p\int_0^\infty F^{p-1}(x)f(x)dx.$$
   Par l'inégalité de Hölder on en déduit :
   $$\int_0^\infty F^p(x)dx \leq \frac{p}{p-1}||f||_p\left(\int_0^\infty F^p(x)dx\right)^{\frac{p-1}{p}}$$
   et l'inégalité (1) s'en suit.
   (c) Soit $H(x) = \int_0^\infty |f|(x)1_{]0,x[}d\lambda$. Par la question précédente $H \in L^p_+$ et vérifie (1). On a $|F(x)| \leq H(x)$, donc $||F||_p \leq ||H||_p \leq \frac{p}{p-1}||f||_p$.
2. Soit $G(x) = \int f 1_{]0,x[}d\lambda$. Pour $0 < x < y < \infty$ on a, par l'inégalité de Hölder,
   $$|G(y) - G(x)| \leq \int |f|1_{]x,y[}d\lambda \leq ||f||_p(y-x)^{\frac{p-1}{p}}.$$
   On en déduit $G \in \mathcal{C}(]0,\infty[)$ et donc $F \in \mathcal{C}(]0,\infty[)$.
   Soit $(f_n)_n \in \mathcal{C}_c(]0,\infty[)$ telle que $||f - f_n||_p \to 0$. On définit $F_n(x) = \frac{1}{x}\int f_n 1_{]0,x[}d\lambda$. Par la question 1. on a $F_n \in L^p_+$ et F_n vérifie l'inégalité (1). Pour $x \in]0,\infty[$ on a, par l'inégalité de Hölder,
   $$|F(x) - F_n(x)| \leq \frac{1}{x}||f - f_n||_p x^{\frac{p-1}{p}}.$$

Ceci implique $F_n(x) \to F(x)$ pour tout $x \in]0, \infty[$. En appliquant le lemme de Fatou à $|F_n|^p$ on obtient que $F \in L^p_+$ et de plus

$$||F||_p^p \leq \liminf \int |F_n|^p(x)dx \leq \frac{p}{p-1} \liminf ||f_n||_p = \frac{p}{p-1}||f||_p^p.$$