TD 4

Mesures complexes, espaces L^p.

Exercice 1. Soit $(X, \mathcal{S})$ un espace mesurable. Montrer que

— si μ est une complexe sur $(X, \mathcal{S})$, alors sa partie réelle et sa partie imaginaire sont aussi des mesures complexes (à valeurs réelles, qu'on appelle aussi des *mesures réelles*) ;

— l'ensemble des mesures complexes sur $(X, \mathcal{S})$ forme un espace vectoriel.

Exercice 2. Soit $(X, \mathcal{S})$ un espace mesurable. Montrer qu'il découle de la définition que pour une mesure complexe μ sur $(X, \mathcal{S})$, si (B_n) est une suite décroissante de parties mesurables, on a que $\mu(B_n)$ converge vers $\mu(\cap B_n)$, et si (B_n) est une suite croissante de parties mesurables, on a que $\mu(B_n)$ converge vers $\mu(\cup B_n)$.

Exercice 3. Soit (u_n) une suite réelle. Montrer que la série $\sum u_n$ est absolument convergente si et seulement-ci pour toute bijection σ de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$ la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est convergente. Dans ce cas, toutes les sommes coïncident quel que soit σ (c'est aussi pourquoi on parle de famille sommable pour les séries absolument convergentes : la somme de la série, qui est une limite, se comporte comme une "vraie" somme).

La propriété est également vraie pour les suites et séries complexes, et plus généralement dans les espaces vectoriels normés de dimension finie (avec la convergence normale à la place de la convergence absolue).

Exercice 4. Soit μ une mesure complexe sur un espace mesurable $(X, \mathcal{S})$. Montrer que si ν est une mesure positive telle que, pour tout $E \in \mathcal{S}$, $|\mu(E)| \leq \nu(E)$, alors $\nu \geq |\mu|$ sur $\mathcal{S}$.

Exercice 5.(Mesure à densité) Soit (X, T) un espace mesurable et m une mesure positive sur (X, T).

1. Soit $f : X \to [0, +\infty]$ une application mesurable positive. On pose pour tout $A \in T$, $\mu(A) := \int_A f\, dm$.
   (a) Montrer que μ est une mesure (positive) sur (X, T), que l'on appelle la mesure de densité f par rapport à m, et que l'on note en général $d\mu = f\, dm$ ou $\mu = f\, dm$.
   (b) Soit g est une fonction sur X. Montrer que $g \in L^1(\mu)$ si et seulement si $gf \in L^1(m)$ et que
   $$\int g d\mu = \int g\, f\, dm.$$
2. Soit $f : X \to \mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$) une fonction mesurable avec $f \in L^1(m)$. On pose pour tout $A \in T$ on pose $\mu(A) := \int_A f\, dm$. Montrer que μ est une mesure complexe sur (X, T).

   Cette mesure s'appelle encore la mesure de densité f par rapport à m, et que l'on note $d\mu = f\, dm$. Si g est une fonction mesurable telle que $gf \in L^1(m)$, on peut alors poser
   $$\int g\, d\mu := \int g\, f\, dm.$$

Cela est alors cohérent avec l'intégrale de Lebesgue lorsque μ est une mesure positive. Remarquer par ailleurs que pour toute partie mesurable A on a

$$|\mu(A)| \leq \int_A |f| \, dm.$$

En fait, on peut montrer que $|\mu|$ est la mesure de densité $|f|$ par rapport à m.

3. Montrer que dans les deux cas, pour $d\mu = f \, dm$ avec f positive ou m-intégrable, on a que $\mu \ll m$.

Exercice 6. Soient $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré, et f une fonction $E \to \mathbb{C}$ qui est $\mathcal{E}$-mesurable telle que $\int_E |f| d\mu < \infty$.

1. Montrer que :
$$\int_E |f| 1_{\{|f|>n\}} d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$
2. En déduire que : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall A \in \mathcal{E}$,
$$\mu(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |f| d\mu \leq \varepsilon$$
(Ceci exprime l'absolue continuité de $|f| \, d\mu$ par rapport à μ).
3. Soit $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction mesurable et telle que $\int_{[0,\infty[} |f| \, d\ell < \infty$, où ℓ désigne la mesure de Lebesgue. Soit F définie sur $[0, \infty[$ par
$$F(x) = \int_{[0,x]} f d\ell$$
Montrer que F est uniformément continue sur $[0, \infty[$.

Exercice 7. Dans cet exercice, nous allons établir le théorème de Radon-Nicodym dans un cas très particulier. Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable.

1. Soit (μ_n) une suite de mesures (positives) de probabilité sur E et (d_n) une suite de nombres complexes avec $\sum |d_n| < +\infty$. Montrer qu'alors $\sum_n d_n \mu_n$ est une mesure complexe sur X, où $(\sum_n d_n \mu_n)(E)$ est définie comme la limite de $\sum_{n \leq N} d_n \mu_n(E)$ lorsque $N \to +\infty$ (limite qui existe bien, car ?).

On suppose dans la suite que pour tout $x \in \mathcal{E}$, $\{x\} \in \mathcal{E}$. Soit $x_n \in E$, $n \in \mathbb{N}$, une suite de points distincts de E et soient $c_n \in]0, \infty[$, $n \in \mathbb{N}$. On pose $\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \delta_{x_n}$; c'est une mesure positive sur $\mathcal{E}$.

2. Soit $g : E \to \mathbb{C}$ une fonction $\mathcal{E}$-mesurable avec $g \in L^1(\mu)$. On introduit $d\nu' = g \, d\mu$, la mesure qui admet la densité g par rapport à μ. Montrer que $\nu' = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n g(x_n) \delta_{x_n}$.

Soit $\nu : \mathcal{E} \to \mathbb{C}$ une mesure complexe telle que $\nu \ll \mu$.

3. Montrer qu'il existe une fonction $f : E \to \mathbb{C}$, qui est $\mathcal{E}$-mesurable avec $f \in L^1(\mu)$ telle que $d\nu = f \, d\mu$, c'est-à-dire que ν admet la densité f par rapport à μ.
4. On suppose que ν admet également la densité $h \in L^1(\mu)$ par rapport à μ. Que peut-on dire de $\{x \in E : f(x) = h(x)\}$? Calculer $\mu(\{x \in E : f(x) \neq h(x)\})$.

Exercice 8. Soit $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espace mesuré (μ est donc ici une mesure positive).

1. Montrer que pour $f \in L^1(\mu)$ on a

$$\|f\|_1 = \sup_{g \in L^\infty(\mu) \setminus \{0\}} \frac{\left| \int fg \, d\mu \right|}{\|g\|_\infty}.$$

2. On suppose que $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini. On veut montrer que tout $f \in L^\infty(\mu)$ on a

$$\|f\|_\infty = \sup_{g \in L^1(\mu) \setminus \{0\}} \frac{\left| \int fg \, d\mu \right|}{\|g\|_1}.$$

Soit $f \in L^\infty(\mu)$ à valeurs réelles telle que $\|f\|_\infty =: \lambda > 0$. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, on note $A = \{x \in X, \ |f(x)| > \lambda - \varepsilon\}$.

(a) Montrer qu'il existe un ensemble mesurable F, de mesure finie, tel que $\mu(A \cap F) > 0$.

(b) Pour la fonction g_ε définie par $g_\varepsilon(x) = \varepsilon(x) 1_{A \cap F}(x)$, où $\varepsilon(x)$ désigne le signe de $f(x)$, montrer que $\frac{\left| \int f g_\varepsilon \, d\mu \right|}{\|g_\varepsilon\|_1}$ est bien défini et donnez-en une minoration.

(c) Conclure.

On vous laisse réécrire l'argument dans le cas d'une fonction à valeurs complexes.

Exercice 9. Soit (X, T, m) un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1(dm)$.

1. Montrer que pour tout sous-ensemble fini $J \subset \mathbb{N}$, $(f_n)_{n \in J}$ est équi-intégrable càd pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$(A \in T, n \in J, m(A) \leq \delta \text{ implique } \int_A |f_n| dm \leq \epsilon).$$

2. **Théorème de Vitali** On suppose $m(X) < \infty$. Soit f une fonction mesurable telle que $f_n \to f$ p.p. Montrer que $f \in L^1(dm)$ et

$$\lim_n \int_X |f_n - f| dm = 0$$

est équivalent à $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ équi-intégrable.

3. Montrer que l'hypothèse $m(X) = \infty$ est essentielle.

Exercice 10. Soit (X, T, m) un espace mesuré de mesure finie et soit $1 < p < \infty$. Soit f une fonction mesurable. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(m)$ telle que

1. $f_n \to f$ p.p.
2. la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans L^p.

Montrer que $f \in L^p$ et $f_n \to f$ in L^q pour tout $1 \leq q < p$.

Exercice 11. Soient μ, ν deux mesures positives finies sur (X, T). Montrer qu'il existe une fonction f mesurable, positive, μ et ν intégrable, telle que pour tout $E \in T$:

$$\int_E (1-f) d\mu = \int_E f d\nu.$$

Exercice 12. Soit f une fonction bornée, définie sur $[0,1]$ à valeurs réelles, mesurable, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\int x^n f dm = 0$. Montrer que $f(x) = 0$ p.p.

Exercice 13. Soit m la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On définit, pour tout E ensemble Lebesgue mesurable,

$$\mu(E) = \int_E \frac{1}{1+x^2} dm(x).$$

Montrer que $m \ll \mu$ et calculer la dérivée de Radon Nikodym $\frac{dm}{d\mu}$.

Exercice 14. Soit $X = [0,1]$, $\mathcal{B}$ l'ensemble des boreliens de $[0,1]$ et m la mesure de Lebesgue. Montrer que $(L^\infty)^* \neq L^1$.

Exercice 15. Soient μ et ν deux mesures positives finies sur (X, T) telles que $\nu \ll \mu \ll \nu$. Soit f la mesure de densité de ν par rapport à $\mu + \nu$. Montrer que $0 < f(x) < 1$ μ p.p. et ν p.p.

Exercice 16. Soit ν une mesure σ-finie et soient μ et λ deux mesures σ-finies positives sur (X, T) telles que $\nu \ll \mu$ et $\mu \ll \lambda$.

1. Si $g \in L^1(\nu)$ alors $g\frac{d\nu}{d\mu} \in L^1(\mu)$ et $\int_E d\nu = \int_E g\frac{d\nu}{d\mu} d\mu$.
2. On a $\nu \ll \lambda$ et $\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\lambda}$ λ p.p.
3. Si de plus $\lambda \ll \mu$ alors $\frac{d\lambda}{d\mu} = (\frac{d\mu}{d\lambda})^{-1}$.

Exercice 17. Soit $(\nu_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une famille de mesures positives. Si $\nu_j \perp \mu$ pour tout $j \in \mathbb{N}$ alors $\sum_j \nu_j \perp \mu$. Si $\nu_j \ll \mu$ alors $\sum_j \nu_j \ll \mu$.