TD 4

Mesures complexes, espaces L^p.

Exercice 1.(**) Soit $(X, \mathcal{S})$ un espace mesurable. Montrer que

— si μ est une complexe sur $(X, \mathcal{S})$, alors sa partie réelle et sa partie imaginaire sont aussi des mesures complexes (à valeurs réelles, qu'on appelle aussi des *mesures réelles*) ;

— l'ensemble des mesures complexes sur $(X, \mathcal{S})$ forme un espace vectoriel.

Solution de l'exercice 1. Cela découle immédiatement des théorèmes d'opérations sur les limites dans $\mathbb{C}$, pour les sommes des séries convergentes en question.

Exercice 2.(**) Soit $(X, \mathcal{S})$ un espace mesurable. Montrer qu'il découle de la définition que pour une mesure complexe μ sur $(X, \mathcal{S})$, si (B_n) est une suite décroissante de parties mesurables, on a que $\mu(B_n)$ converge vers $\mu(\cap B_n)$, et si (B_n) est une suite croissante de parties mesurables, on a que $\mu(B_n)$ converge vers $\mu(\cup B_n)$.

Solution de l'exercice 2. Regardons le cas d'une suite croissante de parties B_n, et posons comme d'habitude $C_n = B_n \setminus B_{n-1}$ pour $n \geq 1$, et $C_0 = B_0$, de sorte que les parties mesurables C_n sont deux à deux disjointes et de même réunion que la suite B_n, et même plus précisément

$$\forall N \geq 1, \quad B_N = \bigcup_{0 \leq k \leq N} C_n.$$

Pour $N \geq 1$, on a donc

$$\mu(\cup_n B_n) - \mu(B_N) = \mu(\cup_n C_n) - \sum_{n=0}^{N} \mu(C_n)$$

qui par définition tend vers 0 lorsque $N \to +\infty$.

On fait de même pour l'intersection, ou alors on applique tout simplement le résultat précédent aux complémentaires.

Exercice 3. Soit (u_n) une suite réelle. Montrer que la série $\sum u_n$ est absolument convergente si et seulement-ci pour toute bijection σ de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$ la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est convergente. Dans ce cas, toutes les sommes coïncident quel que soit σ (c'est aussi pourquoi on parle de famille sommable pour les séries absolument convergentes : la somme de la série, qui est une limite, se comporte comme une "vraie" somme).

La propriété est également vraie pour les suites et séries complexes, et plus généralement dans les espaces vectoriels normés de dimension finie (avec la convergence normale à la place de la convergence absolue).

Solution de l'exercice 3. Le sens difficile est de montrer la convergence absolue de la série à partir de la convergence inconditionnelle. Voir :

Exercice 4.(∗∗) Soit μ une mesure complexe sur un espace mesurable $(X, \mathcal{S})$. Montrer que si ν est une mesure positive telle que, pour tout $E \in \mathcal{S}$, $|\mu(E)| \leq \nu(E)$, alors $\nu \geq |\mu|$ sur $\mathcal{S}$.

Solution de l'exercice 4. Cela découle de la définition.

Exercice 5.(∗∗) **(Mesure à densité)** Soit (X, T) un espace mesurable et m une mesure positive sur (X, T).

1. Soit $f : X \to [0, +\infty]$ une application mesurable positive. On pose pour tout $A \in T$, $\mu(A) := \int_A f\, dm$.
   (a) Montrer que μ est une mesure (positive) sur (X, T), que l'on appelle la mesure de densité f par rapport à m, et que l'on note en général $d\mu = f\, dm$ ou $\mu = f\, dm$.
   (b) Soit g est une fonction sur X. Montrer que $g \in L^1(\mu)$ si et seulement si $gf \in L^1(m)$ et que
   $$\int g d\mu = \int g\, f\, dm.$$
2. Soit $f : X \to \mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$) une fonction mesurable avec $f \in L^1(m)$. On pose pour tout $A \in T$ on pose $\mu(A) := \int_A f\, dm$. Montrer que μ est une mesure complexe sur (X, T).

   Cette mesure s'appelle encore la mesure de densité f par rapport à m, et que l'on note $d\mu = f\, dm$. Si g est une fonction mesurable telle que $gf \in L^1(m)$, on peut alors poser
   $$\int g\, d\mu := \int g\, f\, dm.$$
   Cela est alors cohérent avec l'intégrale de Lebesgue lorsque μ est une mesure positive. Remarquer par ailleurs que pour toute partie mesurable A on a
   $$|\mu(A)| \leq \int_A |f|\, dm.$$
   En fait, on peut montrer que $|\mu|$ est la mesure de densité $|f|$ par rapport à m.
3. Montrer que dans les deux cas, pour $d\mu = f\, dm$ avec f positive ou m-intégrable, on a que $\mu \ll m$.

Solution de l'exercice 5.

1. a)On a $\mu(\emptyset) = 0$ car $f 1_\emptyset = 0$ p.p. Pour montrer la σ additivité on considère $(A_n) \subset T$ tels que $A_n \cap A_m = \emptyset$ pour tout $n \neq m$. Alors
   $$\mu(A) = \int f 1_A dm = \int \sum_n f 1_{A_n} dm = \sum_n \int f 1_{A_n} dm = \sum_n \mu(A_n),$$
   où nous avons utilisé le fait que f est à valeurs positives et le théorème de convergence monotone pour l'avant-dernière égalité.
   b) La clé est d'abord de montrer l'égalité pour toute fonction positive mesurable, sans hypothèse d'intégrabilité. Pour commencer, supposons que g est une fonction simple. Alors il existe $a_j \in \mathbb{R}$ et $A_j \in T$ disjoints tels que $g = \sum_{j=1}^n a_j 1_{A_j}$. On a
   $$\int g d\mu = \sum_{j=1}^n a_j \mu(A_j) = \sum_{j=1}^n a_j \int f 1_{A_j} dm = \int f g dm.$$

Donc la propriété est vraie pour les fonctions simples. Supposons que g soit une fonction mesurable à valeurs positives. Soit $(g_n)_n$ une suite de fonctions simples à valeurs positives, qui converge de manière croissante vers g. Alors par le théorème de convergence monotone et la propriété démontrée pour les fonctions simples on peut conclure que

$$\int g d\mu = \int \lim_n g_n d\mu = \lim_n \int g_n d\mu = \lim_n \int f g_n dm.$$

Ainsi, pour toute fonction positive mesurable (pas nécessairement intégrable) on a

$$\int g d\mu = \int g\, f\, dm.$$

Pour conclure, on considère g fonction mesurable et on d'après l'étude précédente $\int |g| d\mu = \int f |g| dm$ donc $g \in L^1(\mu)$ ssi $fg \in L^1(m)$. De plus, en décomposant $g = g_+ - g_-$ (puis éventuellement en parties réelles et imaginaires) on obtient bien que, pour $gf \in L^1(m)$, alors $g_+ f = (gf)_+$ et $g_- f = (gf)_-$ sont aussi m-intégrable et donc $\int g d\mu = \int f g dm$.

2. Il faut établir la σ-additivité. On reprend l'argument du a) ci-dessus. Il faut intervertir la série $\sum f 1_{A_n} = f 1_A$ et l'intégrale par rapport à m. Cela est possible car $\int \sum_n |f 1_{A_n}|\, dm = \int |f| 1_A\, dm \leq \int |f|\, dm < \infty$.
3. Si $d\mu = f\, dm$ avec f positive ou m-intégrable , et si $m(A) = 0$, alors par construction de l'intégrale on a $\mu(A) = \int_A f\, dm = 0$.

Exercice 6. (**) Soient $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré, et f une fonction $E \to \mathbb{C}$ qui est $\mathcal{E}$-mesurable telle que $\int_E |f| d\mu < \infty$.

1. Montrer que :
$$\int_E |f| 1_{\{|f|>n\}} d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$
2. En déduire que : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall A \in \mathcal{E}$,
$$\mu(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |f| d\mu \leq \varepsilon$$
(Ceci exprime l'absolue continuité de $|f|\, d\mu$ par rapport à μ).
3. Soit $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction mesurable et telle que $\int_{[0,\infty[} |f|\, d\ell < \infty$, où ℓ désigne la mesure de Lebesgue. Soit F définie sur $[0, \infty[$ par
$$F(x) = \int_{[0,x]} f d\ell$$
Montrer que F est uniformément continue sur $[0, \infty[$.

Solution de l'exercice 6.

1. La suite de fonctions mesurables positives $(|f| 1_{\{|f|>n\}})_{n\in\mathbb{N}}$ converge en tout point vers 0 et est dominée par la fonction intégrable $|f|$. Le théorème de convergence dominée assure que
$$\int_E |f| 1_{\{|f|>n\}} d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. D'après a) il existe n_0 tel que $\int_E |f| 1_{\{|f|>n_0\}} d\mu < \varepsilon/2$. Posons $\delta = \epsilon/(2n_0)$. Alors pour tout $A \in \mathcal{E}$ tel que $\mu(A) \leq \delta$ on a :

$$\int_A |f| d\mu = \int_{A\cap\{f>n_0\}} |f| d\mu + \int_{A\cap\{|f|\leq n_0\}} |f| d\mu \leq \int_E |f| 1_{\{|f|>n_0\}} d\mu + n_0\mu(A) < \varepsilon.$$

3. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. D'après c) il existe $\delta > 0$ tel que $\int_A |f| d\ell < \varepsilon$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $\ell(A) < \delta$. Alors, pour tout $x \leq y$ tels que $|y - x| < \delta$, on a $\ell([x, y]) < \delta$, et donc

$$|F(y) - F(x)| = \Big|\int_{[x,y]} f d\ell\Big| \leq \int_{[x,y]} |f| d\ell < \varepsilon.$$

Exercice 7.($*$) Dans cet exercice, nous allons établir le théorème de Radon-Nicodym dans un cas très particulier. Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable.

1. Soit (μ_n) une suite de mesures (positives) de probabilité sur E et (d_n) une suite de nombres complexes avec $\sum |d_n| < +\infty$. Montrer qu'alors $\sum_n d_n\mu_n$ est une mesure complexe sur X, où $(\sum_n d_n\mu_n)(E)$ est définie comme la limite de $\sum_{n\leq N} d_n\mu_n(E)$ lorsque $N \to +\infty$ (limite qui existe bien, car ?).

On suppose dans la suite que pour tout $x \in \mathcal{E}$, $\{x\} \in \mathcal{E}$. Soit $x_n \in E$, $n \in \mathbb{N}$, une suite de points distincts de E et soient $c_n \in]0, \infty[$, $n \in \mathbb{N}$. On pose $\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n\delta_{x_n}$; c'est une mesure positive sur $\mathcal{E}$.

2. Soit $g : E \to \mathbb{C}$ une fonction $\mathcal{E}$-mesurable avec $g \in L^1(\mu)$. On introduit $d\nu' = g\, d\mu$, la mesure qui admet la densité g par rapport à μ. Montrer que $\nu' = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n g(x_n)\delta_{x_n}$.

Soit $\nu : \mathcal{E} \to \mathbb{C}$ une mesure complexe telle que $\nu \ll \mu$.

3. Montrer qu'il existe une fonction $f : E \to \mathbb{C}$, qui est $\mathcal{E}$-mesurable avec $f \in L^1(\mu)$ telle que $d\nu = f\, d\mu$, c'est-à-dire que ν admet la densité f par rapport à μ.
4. On suppose que ν admet également la densité $h \in L^1(\mu)$ par rapport à μ. Que peut-on dire de $\{x \in E : f(x) = h(x)\}$? Calculer $\mu(\{x \in E : f(x) \neq h(x)\})$.

Solution de l'exercice 7.

1. Comme $|d_n\mu_n(E)| \leq |d_n|$ la série $\sum d_n\mu_n(E)$ est absolument convergente pour tout $E \in \mathcal{S}$. Le fait que cela définit une mesure (i.e. la σ-additivité) se montre par théorème d'interversion des sommes (limites) pour les séries absolument convergentes (cela se passe comme avec les séries positives).
2. Soit $A \in \mathcal{E}$. On a $\nu'(A) = \int_A g\, d\mu = \int_E g 1_A\, d\mu$. Or $\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n\delta_{x_n}$. Dire que $h \in L^1(\mu)$ c'est dire que la série $\sum c_n h(x_n)$ est absolument convergente de somme $\sum_n c_n h(x_n) = \int h\, d\mu$. Ainsi $\int_E g 1_A\, d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n g(x_n)\delta_{x_n}(A)$, ce qui implique que $\nu' = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n g(x_n)\delta_{x_n}$.
3. Montrons d'abord que ν va s'exprimer avec une série de δ_{x_n}. On pose $D = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$. On observe que $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\} \in \mathcal{S}$.
   Soit $B \in \mathcal{E}$. Alors $x_n \notin B\backslash D$ et donc que $\delta_{x_n}(B\backslash D) = 0$. On en déduit que $\mu(B\backslash D) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n\delta_{x_n}(B\backslash D) = 0$. Cela implique que $\nu(B\backslash D) = 0$, soit encore

$$\nu(B) = \nu(B \cap D)\ .$$

On dit que la mesure ν est concentré sur D. On observe ensuite que $B \cap D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B \cap \{x_n\}$. Or les ensembles $B \cap \{x_n\} \in \mathcal{E}$, $n \in \mathbb{N}$, sont deux-à-deux disjoints car les x_n sont supposés distincts. Donc par sigma additivité de ν,

$$\nu(B \cap D) = \nu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B \cap \{x_n\}\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu\big(B \cap \{x_n\}\big).$$

On observe ensuite que si $x_n \notin B$, alors $B \cap \{x_n\} = \emptyset$ et $\nu\big(B \cap \{x_n\}\big) = 0$ et que si $x_n \in B$, alors $B \cap \{x_n\} = \{x_n\}$ et $\nu\big(B \cap \{x_n\}\big) = \nu\big(\{x_n\}\big)$. Cela montre que $\nu\big(B \cap \{x_n\}\big) = \nu\big(\{x_n\}\big)\delta_{x_n}(B)$. On a donc pour tout $B \in \mathcal{E}$,

$$\nu(B) = \nu(B \cap D) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu\big(\{x_n\}\big)\delta_{x_n}(B) ,$$

ce qui montre que $\nu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(\{x_n\})\delta_{x_n}$. Notez au passage, pour la cohérence, que $\sum |\nu(\{x_n\})| < +\infty$, puisque cette convergence absolue est forcé par l'additivité (famille disjointe). On pose alors

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n^{-1}\nu(\{x_n\})1_{\{x_n\}}(x) .$$

C'est une fausse série, bien sûr. On devrait plutôt dire : si $x = x_n$ pour un certain n on pose $f(x) = f(x_n) = c_n^{-1}\nu(\{x_n\})$ et si $x \notin D$ on pose $f(x) = 0$. C'est une fonction $\mathcal{E}$-mesurable, $f : E \to \mathbb{C}$. Elle est dans $L^1(\mu)$ puisque $\int |f| d\mu = \sum_n c_n |f(x_n)| = \sum c_n c_n^{-1} |\nu(\{x_n\})| = \sum |\nu(\{x_n\})| < \infty$, et on on a tout fait pour que $f\, d\mu = d\nu$.

4. On a $\nu = f d\mu = h d\nu$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\nu(\{x_n\}) = f(x_n)c_n = h(x_n)c_n$ et comme $c_n \in]0, \infty[$, $f(x_n) = h(x_n)$ donc $D \subset \{x \in E : f(x) = h(x)\}$. On en déduit que $\{x \in E : f(x) \neq g(x)\} \subset E \backslash D$. On rappelle $\mu(E\backslash D) = 0$, donc $\mu(\{x \in E : f(x) \neq g(x)\}) = 0$.

Exercice 8.(∗∗) Soit $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espace mesuré (μ est donc ici une mesure positive).

1. Montrer que pour $f \in L^1(\mu)$ on a

$$\|f\|_1 = \sup_{g\in L^\infty(\mu)\backslash\{0\}} \frac{\left|\int fg\, d\mu\right|}{\|g\|_\infty}.$$

2. On suppose que $(X, \mathcal{S}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini. On veut montrer que tout $f \in L^\infty(\mu)$ on a

$$\|f\|_\infty = \sup_{g\in L^1(\mu)\backslash\{0\}} \frac{\left|\int fg\, d\mu\right|}{\|g\|_1}.$$

Soit $f \in L^\infty(\mu)$ à valeurs réelles telle que $\|f\|_\infty =: \lambda > 0$. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, on note $A = \{x \in X,\ |f(x)| > \lambda - \varepsilon\}$.

(a) Montrer qu'il existe un ensemble mesurable F, de mesure finie, tel que $\mu(A \cap F) > 0$.

(b) Pour la fonction g_ε définie par $g_\varepsilon(x) = \varepsilon(x)1_{A\cap F}(x)$, où $\varepsilon(x)$ désigne le signe de $f(x)$, montrer que $\dfrac{\left|\int fg_\varepsilon\, d\mu\right|}{\|g_\varepsilon\|_1}$ est bien défini et donnez-en une minoration.

(c) Conclure.

On vous laisse réécrire l'argument dans le cas d'une fonction à valeurs complexes.

Solution de l'exercice 8.

1. On a bien sûr une inégalité.

   Lorsque f est à valeur réelles, on peut introduire $\epsilon = 1_{f\geq 0} - 1_{f<0}$, qui est mesurable, qui vaut ± 1 et pour laquelle on a

$$\int f\epsilon\, d\mu = \int |f|\, d\mu.$$

   Remarque : dans le cas d'une fonction à valeurs complexe, on fait la variante suivante, par exemple. On introduit $\varepsilon = \frac{\overline{f}}{|f|}$ sur l'ensemble $\{f \neq 0\}$ et par exemple zéro là où $f = 0$. Par recollement, il s'agit d'une fonction mesurable. Elle vérifie sur X tout entier que $\varepsilon f = |f|$ avec $|\varepsilon| \leq 1$. D'où le résultat.

2. On a encore une inégalité :

$$\int_X fg\, d\mu \leq ||f||_\infty ||g||_1$$

   Il suffit d'approcher le cas d'égalité. On peut supposer que $\|f\|_\infty > 0$ sinon il n'y a rien à montrer. Soit $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < \|f\|_\infty$) . Par définition de $\|f\|_\infty =: \lambda > 0$, l'ensemble $A = \{x \in X,\ |f(x)| > \lambda - \varepsilon\}$ est de mesure non-nulle (mais il pourrait-être de mesure infinie). Puisque $\mu(A) > 0$, le caractère σ-fini assure l'existence d'une partie de mesure finie F tel que $\mu(A \cap F) > 0$. On introduit alors la fonction

$$g(x) = \varepsilon(x)1_{A\cap F}(x),$$

   où $\varepsilon(x) = 1_{\{f\geq 0\}} - 1_{\{f<0\}}$ désigne le signe de $f(x)$ (et donc $\varepsilon(x)f(x) = |f(x)|$). Puisque $0 < \mu(A\cap F) < +\infty$, c'est une fonction qui est intégrable et qui n'est pas nulle presque partout. Et on a

$$\frac{\left|\int fg\, d\mu\right|}{\|g\|_1} \geq \lambda - \varepsilon.$$

Exercice 9. Soit (X, T, m) un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(dm)$.

1. Montrer que pour tout sous-ensemble fini $J \subset \mathbb{N}$, $(f_n)_{n\in J}$ est équi-intégrable càd pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$(A \in T, n \in J, m(A) \leq \delta \text{ implique } \int_A |f_n| dm \leq \epsilon).$$

2. **Théorème de Vitali** On suppose $m(X) < \infty$. Soit f une fonction mesurable telle que $f_n \to f$ p.p. Montrer que $f \in L^1(dm)$ et

$$\lim_n \int_X |f_n - f| dm = 0$$

est équivalent à $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ équi-intégrable.

3. Montrer que l'hypothèse $m(X) = \infty$ est essentielle.

Solution de l'exercice 9.

1. D'après l'exercice précédent, question 1., une telle propriété est vraie pour une fonction dans L^1. Pour un nombre fini de fonctions il suffit de prendre $\delta = \min_{j\in J} \delta_j > 0$.

2. Pour l'**implication directe** : il faut remarquer d'abord qu'il ne suffit pas de prendre $\delta = \inf_n \delta_n$ comme à la question précédente, car l'infimum peut être nul. Soit $A \in T$:

$$\int_A |f_n| dm \leq \int_A |f - f_n| dm + \int_A |f| dm \leq \int |f - f_n| dm + \int_A |f| dm.$$

On sait que $f_n \to f$ dans L^1 donc pour un $\epsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, on a $\int |f - f_n| dm \leq \epsilon$. On note $\delta = \min(\delta_f, \delta_0, \ldots, \delta_{n_0})$. On a $m(A) < \delta$ implique $\int_A |f_n| dm \leq 2\epsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Pour la **réciproque** : Par l'équi-intégrabilité, pour un $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $A \in T$, $m(A) < \delta$ implique $\int_A |f_n| dm \leq \epsilon$. Grâce à l'hypôtèse $m(X) < \infty$ on peut appliquer le théorème d'Egorov : pour $\delta > 0$ trouvé par l'équi-intégrabilité, il existe $B \in T$ tel que $m(B^c) \leq \delta$ et $f_n \to f$ uniformément sur B. C'est à dire $\sup_{x\in B} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ quand $n \to \infty$. Donc

$$\int |f - f_n| dm \leq \int_B |f - f_n| dm + \int_{B^c} |f_n| dm + \int_{B^c} |f| dm.$$

Par le lemme de Fatou, $\int_{B^c} |f| dm \leq \int_{B^c} |f_n| dm \leq \epsilon$. Donc

$$\int |f - f_n| dm \leq m(X) \sup_{x\in B} \{|f(x) - f_n(x)|\} + 2\epsilon.$$

Il suffit de prendre n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $\sup_{x\in B} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{m(X)}$. Alors pour tout $n \geq n_0$, $\int |f - f_n| dm \leq 3\epsilon$. On en déduit $f \in L^1$ et $f_n \to f$ dans L^1.

3. Soit $X = [0, \infty[$ et soit $f(x) = 1_{[n,n+1]}$. On a $f_n \to 0$ p.p., la suite $(f_n)_n \subset L^1$ est équi-intégrable, mais ne converge pas dans L^1. Il faut remarquer que pour l'implication directe nous n'avons pas utilisé l'hypothèse $m(X) < \infty$. La réciproque est vraie dans le cas $m(X) = \infty$ si on rajoute $\forall \epsilon > 0$ il existe $C \in T$, $m(C) < \infty$ et $\int_{C^c} |f_n| dm \leq \epsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10. Soit (X, T, m) un espace mesuré de mesure finie et soit $1 < p < \infty$. Soit f une fonction mesurable. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(m)$ telle que

1. $f_n \to f$ p.p.
2. la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^p.

Montrer que $f \in L^p$ et $f_n \to f$ in L^q pour tout $1 \leq q < p$.

Solution de l'exercice 10. Par le lemme de Fatou appliqué à $|f_n|^p$ on montre que $f \in L^p$:

$$\int |f|^p dm \leq \liminf \int |f_n|^p dm \leq M^p,$$

où $M > 0$ tel que $||f_n||_p \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On montre que la suite $(|f_n|^q)_n$ est équi-intégrable. Par l'inégalité de Hölder,

$$\int_A |f_n|^q dm \leq ||f_n||_p^{\frac{1}{q}} m(A)^{\frac{p-q}{q}} \leq M^{\frac{1}{q}} m(A)^{\frac{p-q}{q}}.$$

Soit $\epsilon > 0$. En prenant $\delta = (\frac{\epsilon}{M^{\frac{1}{q}}})^{\frac{q}{p-q}}$ on a l'équi-intégrabilité de $(|f_n|^q)_n$. Par ailleurs $f_n \to f$ p.p. implique $|f_n|^q \to |f|^q$ p.p. Par le théorème de Vitali (voir exo 3.2) on a que $|f|^q \in L^1$ c'est à dire $f \in L^q$ et $\int ||f_n|^q - |f|^q dm \to 0$, donc $||f_n||_q \to ||f||_q$. On conclut comme à l'exo 24, TD1, en considérant $g_n = 2^{q-1}|f_n|^q + 2^{q-1}|f|^q - |f_n - f|^q$ et en appliquant le lemme de Fatou.

Exercice 11.(∗) Soient μ, ν deux mesures positives finies sur (X, T). Montrer qu'il existe une fonction f mesurable, positive, μ et ν intégrable, telle que pour tout $E \in T$:

$$\int_E (1-f) d\mu = \int_E f d\nu.$$

Solution de l'exercice 11. L'identité à vérifier peut aussi d'écrire $\int_E d\mu = \int_E f d(\mu+\nu)$. Les mesures étant positives, on a $\mu \ll \mu + \nu$ donc par le théorème de Radon-Nikodym il existe f mesurable et positive, $(\mu + \nu)$-intégrable (donc aussi μ et ν intégrable) telle que $\int_E d\mu = \int_E f d(\mu + \nu)$.

En fait, comme $\mu \leq \mu + \nu$, l'argument vu en cours permet de dire que f est à valeurs dans $[0, 1]$.

Exercice 12. Soit f une fonction bornée, définie sur $[0, 1]$ à valeurs réelles, mesurable, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\int x^n f dm = 0$. Montrer que $f(x) = 0$ p.p.

Solution de l'exercice 12. Soit $\Phi \in C[0, 1]$. On sait qu'il existe une suite $(P_n)_n$ de polynômes tel que $||\Phi - P_n||_\infty \to 0$ quand $n \to \infty$. Alors

$$|\int f\Phi dm| \leq \int |f| \cdot |\Phi - P_n| dm + |\int f P_n dm| \leq ||f||_1 ||\Phi - P_n||_\infty.$$

On en déduit que $\int f\Phi dm = 0$ pour tout $\Phi \in C[0, 1]$. L'espace $C[0, 1]$ étant dense dans L^1 il existe une suite $\Phi_n \in C[0, 1]$ qui approche f dans L^1 (la fonction f étant mesurable bornée sur $[0, 1]$ est aussi dans L^1). Alors

$$0 \leq \int f^2 dm \leq \int |f| \cdot |f - \Phi_n| dm + |\int f \Phi_n dm| \leq ||f||_\infty ||f - \Phi_n||_1 + 0.$$

Donc $\int f^2 dm = 0$ ce qui implique $f = 0$ p.p.

Exercice 13. Soit m la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On définit, pour tout E ensemble Lebesgue mesurable,

$$\mu(E) = \int_E \frac{1}{1+x^2} dm(x).$$

Montrer que $m \ll \mu$ et calculer la dérivée de Radon Nikodym $\frac{dm}{d\mu}$.

Solution de l'exercice 13. Soit $E \in T$ tel que $\mu(E) = 0$. Alors $\int_E \frac{1}{1+x^2} dm(x) = 0$. La fonction $\frac{1}{1+x^2}$ étant à valeur positives, on en déduit que $\frac{1}{1+x^2} = 0$ $m-$p.p. sur E. Ceci implique $m(E) = 0$, donc $m \ll \mu$. Par le théorème de Radon-Nikodym il existe h fonction mesurable positive telle que $m(E) = \int_E h d\mu$. On a aussi $\int f dm = \int f h d\mu$ pour tout f mesurable positive (ou pour $f \in L^1(m)$). On a, pour tout $E \in T$,

$$\int_E d\mu = \mu(E) = \int_E \frac{1}{1+x^2} dm = \int_E \frac{h(x)}{1+x^2} d\mu.$$

Ceci implique $1 = \frac{h(x)}{1+x^2}$ $m-$p.p. Donc $h(x) = 1 + x^2 = \frac{dm}{d\mu}$.

Exercice 14. Soit $X = [0, 1]$, $\mathcal{B}$ l'ensemble des boreliens de $[0, 1]$ et m la mesure de Lebesgue. Montrer que $(L^\infty)^* \neq L^1$.

Solution de l'exercice 14. Soit $M = C[0, 1] \subset L^\infty[0, 1]$. L'espace M est fermé pour la norme $|| \cdot ||_\infty$ (c'est aussi la norme de la convergence uniforme dans $C[0, 1]$). On définit $l : M \to \mathbb{R}$ une application linéaire, $l(f) = f(0)$, $|||l||| = 1$. Par le théorème de Hahn-Banach il existe $L \in (L^\infty)^*$ extension telle que $L = l$ sur M et $|||L||| = 1$. Supposons qu'il existe $g \in L^1(m)$ telle que $L(f) = \int f g dm$ pour tout $f \in L^\infty$. Soit $f_n = (1 - nx)1_{x \leq n^{-1}} \in C[0, 1]$. On a $|f_n(x)| \leq 1$ pour tout $x \in [0, 1]$ et par le théorème de convergence $\lim \int_{[0,1]} f_n g dm = 0$. Donc

$$1 = L(f_n) = \lim L(f_n) = \lim \int_{[0,1]} f_n g dm = 0.$$

Contradiction.

Exercice 15.($*$) Soient μ et ν deux mesures positives finies sur (X, T) telles que $\nu \ll \mu \ll \nu$. Soit f la mesure de densité de ν par rapport à $\mu + \nu$. Montrer que $0 < f(x) < 1$ μ p.p. et ν p.p.

Solution de l'exercice 15. Les mesures étant positives, on a $\nu \ll \nu + \mu$ donc par le théorème de Radon-Nikodym il existe $f \geq 0$ mesurable, $f = \frac{d\nu}{d(\mu+\nu)}$. Soit $B_0 = \{x \in X : f(x) = 0\}$. Alors

$$\nu(B_0) = \int_{B_0} f d(\mu + \nu) = \int_{B_0} 0 d(\mu + \nu) = 0.$$

Comme $\mu \ll \nu$ on en déduit $\mu(B_0) = 0$. On note $B_1 = \{x \in X : f(x) \geq 1\}$. Alors

$$\nu(B_1) = \int_{B_1} f d(\mu + \nu) \geq (\mu + \nu)(B_1) = \mu(B_1) + \nu(B_1).$$

La mesure ν étant finie on a $\nu(B_1) < \infty$ donc $\mu(B_1) = 0$. Ceci implique $0 < f < 1$ $\mu-$p.p. et donc $\nu-$p.p.

Exercice 16. Soit ν une mesure σ-finie et soient μ et λ deux mesures σ-finies positives sur (X, T) telles que $\nu \ll \mu$ et $\mu \ll \lambda$.

1. Si $g \in L^1(\nu)$ alors $g\frac{d\nu}{d\mu} \in L^1(\mu)$ et $\int_E d\nu = \int_E g\frac{d\nu}{d\mu} d\mu$.
2. On a $\nu \ll \lambda$ et $\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\lambda}$ λ p.p.
3. Si de plus $\lambda \ll \mu$ alors $\frac{d\lambda}{d\mu} = (\frac{d\mu}{d\lambda})^{-1}$.

Solution de l'exercice 16. Ces sont des conséquences immédiates des définitions ou du théorème de Radon-Nikodym.

Exercice 17. Soit $(\nu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une famille de mesures positives. Si $\nu_j \perp \mu$ pour tout $j \in \mathbb{N}$ alors $\sum_j \nu_j \perp \mu$. Si $\nu_j \ll \mu$ alors $\sum_j \nu_j \ll \mu$.

Solution de l'exercice 17. Soit A_j l'ensemble sur lequel se concentre ν_j et A l'ensemble sur lequel se concentre ν. L'hypothèse nous dit que $A_J \cap A = \emptyset$ pour tout j. Ceci implique $(\cup_j A_j) \cap A = \emptyset$ et donc $\sum_j \nu_j \perp \mu$, car $\sum_j \nu_j$ se concentre sur $(\cup_j A_j)$. De même, si $\nu_j \ll \mu$ pour tout j on considère $E \in T$ tel que $\mu(E) = 0$. Alors pour tout j on a $\nu_j(E) = 0$. Donc $\sum_j \nu_j(E) = 0$, c'est à dire $\sum_j \nu_j \ll \mu$.