TD 5

Différentiation, absolue continuité, BV.

Exercice 1.(∗∗) Soit μ une mesure complexe sur $\mathbb{R}$. On pose pour $x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = \mu(]-\infty, x[).$$

1. Montrer que F est continue à gauche, et qu'elle est continue en $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\mu(\{x\}) = 0$.
2. On se donne une suite de points x_n de $\mathbb{R}$ et une série positive $\sum a_n$ convergente. On considère la mesure positive finie $\mu = \sum a_n \delta_{x_n}$, pour laquelle

$$F(x) = \sum_{n \text{ tel que } x_n < x} a_n.$$

   (a) Montrer que F est continue exactement sur $\mathbb{R} \setminus \{x_n \,; n \in \mathbb{N},\ a_n > 0\}$.
   Remarque : en général, on se donne des a_n non-nuls, donc les points de discontinuité sont exactement les éléments de la suite x_n. C'est un ensemble dénombrable (ce qui est cohérent avec le fait que F est croissante), mais il peut être dense dans $\mathbb{R}$.

   (b) Montrer que F est dérivable en tout x qui n'est pas un élément de la suite (x_n) et qui n'est pas point d'accumulation de la suite.
3. On se donne $\alpha > 1$ et on considère

$$\mu = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \delta_{\frac{1}{n}}.$$

   (a) Montrer que les points de discontinuité de F sont les $\{\frac{1}{n} \,;\, n \geq 1\}$ et que F est dérivable en dehors de $\{\frac{1}{n} \,;\, n \geq 1\} \cup \{0\}$.

   (b) Montrer que F est dérivable en 0 si et seulement si $\alpha > 2$.
   On pourra utiliser que le reste d'ordre n de la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est équivalent à $\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$.

Exercice 2.(∗∗) **(La fonction de Cantor ou l'escalier du diable)**

On définit de manière récursive les fonctions $F_0, F_1, \ldots : [0,1] \to \mathbb{R}$ comme suit : $F_0(x) = x$ pour tout $x \in [0,1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit :

$$F_n(x) := \begin{cases} \frac{1}{2} F_{n-1}(3x) & x \in [0, \frac{1}{3}] \\ \frac{1}{2} & x \in]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[\\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} F_{n-1}(3x-2) & x \in [\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$

1. Dessinez sur le même dessin F_0, F_1, F_2 et F_3.

2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction F_n est continue croissante et $F_n(0) = 0$ et $F_n(1) = 1$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0,1]$ on a $|F_{n+1}(x) - F_n(x)| \leq 2^{-n}$. En déduire que F_n converge uniformément vers $F : [0,1] \to \mathbb{R}$. Cette limite s'appelle la fonction de Cantor.
4. Montrer que la fonction de Cantor F est continue croissante, $F(0) = 0$ et $F(1) = 1$.
5. Montrer que pour tout $x \in [0,1] \backslash C$ où C est l'ensemble de Cantor défini à l'exercice 7 du TD1, on a F constante sur un voisinage de x et donc en particulier $F'(x) = 0$. En déduire que
$$\int_0^1 F'(x)dx = 0 \neq 1 = F(1) - F(0).$$
6. Montrer que $F(\sum_{n=1}^{\infty} a_n 3^{-n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2} 2^{-n}$ pour tout $a_1, a_2, \dots \in \{0,2\}$.
7. Soit $I = [\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{3^i}, \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{3^i} + \frac{1}{3^n}]$ un des intervalles qui apparaissent à l'étape n de la construction de l'ensemble de Cantor C (donc $n \geq 1$ et $a_1, a_2, \dots \in \{0,2\}$). Montrer que I est un intervalle de longueur 3^{-n}, mais $F(I)$ est un intervalle de longueur 2^{-n}.
8. Montrer que F n'est pas dérivable en un point de l'ensemble de Cantor.

Exercice 3.$(**)$ Montrer qu'une suite de boules contenant un point $x \in \mathbb{R}^d$ et dont les rayons tendent vers zéro converge gentiment vers x.

Exercice 4.$(*)$ Soit $F(x) = x^2 \sin(x^{-1})$ et $G(x) = x^2 \sin(x^{-2})$ pour $x \neq 0$ et $F(0) = G(0) = 0$. Montrer que F et G sont différentiables partout (y compris en 0), $F \in BV([0,1])$ et $G \notin BV([0,1])$.

Exercice 5.$(*)$ Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Montrer qu'on a l'équivalence : F est absolument continue et il existe $M > 0$ tel que $|F'| \leq M$ p.p. ssi il existe $M > 0$ tel que $|F(x) - F(y)| \leq M|x - y|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

Exercice 6.$(**)$ **(Existence des mesures de Stieltjes : cas des mesures finies)**

On note R_1 l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ qui sont croissantes continues à droite et telles que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$.

Remarque : lorsque f est une fonction croissante continue à droite définie sur un segment $[a,b]$ avec $f(a) \geq 0$ et $f(b) = 1$, on étend à gauche de a par 0 et à droite de b par 1 pour se ramener à une fonction sur $\mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses. De même la valeurs 1 n'a pas d'importance. Le caractère majoré de f suffit, et donnera une mesure positive finie.

Le but de l'exercice est de prouver en partie le théorème d'existence des mesures de Stieltjes en montrant qu'à toute fonction $f \in R_1$ on peut associer une unique mesure de probabilité $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ telle que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mu\big(]-\infty, x]\big) = f(x) \ . \tag{1}$$
Remarque : On sait que réciproquement toute mesure de probabilité $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ est associée par (1) à une fonction f qui appartient à R_1. Il y a donc une correspondance bijective établie par (1) entre R_1 et les mesures de probabilité $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$.
Dans la suite, on fixe $f \in R_1$ et on introduit une fonction $f_\# :]0,1[\to \mathbb{R}$, appelé *pseudo-inverse continu à droite de f*, définie par
$$\forall y \in]0,1[, \quad f_\#(y) = \inf\big\{x \in \mathbb{R} : f(x) > y\big\} \ .$$

1. Montrer que $f_\#$ est bien définie et croissante. Montrer que si f est continue strictement croissante, f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$ et que $f_\#$ est sa fonction réciproque.
2. Montrer que $f_\#$ est continue à droite.
3. Montrer pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$]0, f(x)[\subset \{y \in]0,1[: f_\#(y) \leq x\} \subset]0, f(x)] \,.$$

4. On note ℓ, la restriction de la mesure de Lebesgue à $]0,1[$. On note μ la mesure image par $f_\#$ de ℓ. Montrer que l'on a bien (1).
5. Soit (X, ν) un espace de probabilité et $\varphi : X \to \mathbb{R}^+$ une fonction positive mesurable. On introduit pour $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \nu(\{t \in X \,;\, \varphi(t) \leq x\}).$$

   (a) Montrer que f est une fonction croissante, continue à droite, qui vérifie bien les hypothèses ci-dessus.

   (b) Montrer que la mesure de Stieltjes μ_f associée à f est la mesure image de ν par φ.
   En particulier, on a pour $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est positive ou μ_f intégrable,

$$\int_{\mathbb{R}} F \, d\mu_f = \int_X F(\varphi(t)) \, d\nu(t).$$

6. On se donne une fonction croissante continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ avec $f(a) = 0$ et $f(b) = 1$. *(Notez qu'on peut toujours se ramener à ce cas en posant $\tilde{f}(x) = \frac{1}{f(1)-f(0)}(f(x) - f(0))$).* On étend (continument) la fonction f comme mentionné plus haut. Soit donc μ la mesure de Stieltjes, dont on remarquera qu'elle est caractérisée par $\mu([a,x]) = \mu(]a,x]) = f(x)$ pour $x \in [a,b]$. Comme f est continue, μ est *diffuse*, au sens où $\mu(\{x\}) = 0$ pour tout x.
   Montrer que μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue si et seulement si f est absolument continue sur $[a,b]$, et qu'alors la densité de μ est f', qui existe presque partout.

Exercice 7.$(*)$ Soit BV l'espace des fonctions sur $[a,b]$ à variation bornée.

1. Montrer que toute fonction à valeurs réelles, monotone sur $[a,b]$ est à variation bornée.
2. Montrer que si $f \in BV$ est à valeurs réelles, alors il existe f_+ et f_- monotones bornées sur $[a,b]$ telles que $f = f_+ - f_-$.
   Indication : on pourra s'inspirer de la preuve du théorème 3.29 du cours.
3. Montrer que si $f \in BV$ alors f admet une limite à droite et à gauche en tout point. Au point x, on les notera $f(x \pm 0)$.
4. Montrer que si f est de plus continue à droite, alors dans la décomposition précédente, on peut choisir f_+ et f_- continues à droite.
5. Soit $f \in BV$, avec f continue à droite en tout point de $[a,b[$.

(a) Montrer qu'il existe une mesure de Borel sur $[a, b]$, disons, μ_f telle que

$$f(x) - f(a) = \mu_f([a, x]) \quad \text{pour} \quad x \in [a, b].$$

On appelle μ_f la mesure de Stieltjes-Lebesgue associée à f.

(b) Vérifier que $|\mu_f|([a, b]) = \text{var}(f)$.

(c) Montrer que la fonction $F(\cdot) = T_f(a, \cdot)$ variation totale est une fonction de répartition (celle continue à droite) de $|\mu_f|$, la variation totale de μ_f.

(d) Montrer que $\mu_f \ll \lambda_1$ si et seulement si f est absolument continue sur $[a, b]$.

6. Montrer que toute $f \in BV$ est différentiable Lebesgue presque partout et que $f' \in L^1([a, b])$.