TD 5

Différentiation, absolue continuité, BV.

Exercice 1.(∗∗) Soit μ une mesure complexe sur $\mathbb{R}$. On pose pour $x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = \mu(]-\infty, x[).$$

1. Montrer que F est continue à gauche, et qu'elle est continue en $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\mu(\{x\}) = 0$.
2. On se donne une suite de points x_n de $\mathbb{R}$ et une série positive $\sum a_n$ convergente. On considère la mesure positive finie $\mu = \sum a_n \delta_{x_n}$, pour laquelle

$$F(x) = \sum_{n \text{ tel que } x_n < x} a_n.$$

   (a) Montrer que F est continue exactement sur $\mathbb{R} \setminus \{x_n \,; n \in \mathbb{N},\ a_n > 0\}$.
   Remarque : en général, on se donne des a_n non-nuls, donc les points de discontinuité sont exactement les éléments de la suite x_n. C'est un ensemble dénombrable (ce qui est cohérent avec le fait que F est croissante), mais il peut être dense dans $\mathbb{R}$.

   (b) Montrer que F est dérivable en tout x qui n'est pas un élément de la suite (x_n) et qui n'est pas point d'accumulation de la suite.
3. On se donne $\alpha > 1$ et on considère

$$\mu = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \delta_{\frac{1}{n}}.$$

   (a) Montrer que les points de discontinuité de F sont les $\{\frac{1}{n} \ ; \ n \geq 1\}$ et que F est dérivable en dehors de $\{\frac{1}{n} \ ; \ n \geq 1\} \cup \{0\}$.

   (b) Montrer que F est dérivable en 0 si et seulement si $\alpha > 2$.
   On pourra utiliser que le reste d'ordre n de la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est équivalent à $\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$.

Solution de l'exercice 1.

1. On rappelle que même si on ne peut pas utiliser la monotonie pour μ, qui est complexe, on peut quand même passer à la limite pour des réunion croissantes ou des intersection décroissantes. Ainsi, si x_n est une suite quelconque croissant vers x (en restat $< x$) on a $]-\infty, x[= \cup_n]-\infty, x_n[$, ce qui montre la continuité à droite. Si x_n est une suite quelconque décroissant vers x (en restant $> x$), on a $\cap]-\infty, x_n[=]-\infty, x]$ et donc la limite à droite vaut $\mu(]0, x]) = F(x) + \mu(\{x\})$.

2. (a) Pour $x \in \mathbb{R}$ on a par définition $\mu(\{x\}) = 0$ si $x \notin \{x_n \; ; \; n \in \mathbb{N}\}$ et plus généralement

$$\mu(\{x\}) = \sum_{n \text{ tel que } x_n = x} a_n,$$

ce qui donne le résultat.

(b) Si x est comme dans l'énoncé, il existe un intervalle $[a, b]$ qui contient x et qui ne contient aucun élément de la suite. Cela montre que pour tout $y \in [a, b]$ on a $F(y) = F(a)$, et donc F est dérivable sur $]a, b[$ de dérivée nulle.

3. (a) Cela découle de la question précédente.

(b) Remarquons que F est continue en 0. Par ailleurs, F est identiquement nulle sur $]-\infty, 0]$, donc F est dérivable à gauche en zéro, de dérivée nulle. Ainsi, F sera dérivable en zéro si et seulement si $\frac{F(x)}{x}$ tend vers zéro à droite en 0^+. Remarquons que pour $x > 0$, on a

$$F(x) = \sum_{n=\lfloor \frac{1}{x} \rfloor + 1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

D'après le rappel donné dans l'énoncé, et comme $x\lfloor \frac{1}{x} \rfloor \to 1$ lorsque $x \to 0^+$ on a, pour une certaine constante $c > 0$

$$F(x) \sim c\, x^{\alpha - 1}$$

Ainsi, $F(x)/x$ tend vers zéro en 0^+ si et seulement si $\alpha > 2$.

Exercice 2.($**$) **(La fonction de Cantor ou l'escalier du diable)**

On définit de manière récursive les fonctions $F_0, F_1, \ldots : [0, 1] \to \mathbb{R}$ comme suit : $F_0(x) = x$ pour tout $x \in [0, 1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit :

$$F_n(x) := \begin{cases} \frac{1}{2} F_{n-1}(3x) & x \in [0, \frac{1}{3}] \\ \frac{1}{2} & x \in]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[\\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} F_{n-1}(3x - 2) & x \in [\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$

1. Dessinez sur le même dessin F_0, F_1, F_2 et F_3.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction F_n est continue croissante et $F_n(0) = 0$ et $F_n(1) = 1$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0, 1]$ on a $|F_{n+1}(x) - F_n(x)| \leq 2^{-n}$. En déduire que F_n converge uniformément vers $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Cette limite s'appelle la fonction de Cantor.
4. Montrer que la fonction de Cantor F est continue croissante, $F(0) = 0$ et $F(1) = 1$.
5. Montrer que pour tout $x \in [0, 1] \backslash C$ où C est l'ensemble de Cantor défini à l'exercice 7 du TD1, on a F constante sur un voisinage de x et donc en particulier $F'(x) = 0$. En déduire que
$$\int_0^1 F'(x) dx = 0 \neq 1 = F(1) - F(0).$$
6. Montrer que $F(\sum_{n=1}^\infty a_n 3^{-n}) = \sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{2} 2^{-n}$ pour tout $a_1, a_2, \cdots \in \{0, 2\}$.

7. Soit $I = [\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{3^i}, \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{3^i} + \frac{1}{3^n}]$ un des intervalles qui apparaissent à l'étape n de la construction de l'ensemble de Cantor C (donc $n \geq 1$ et $a_1, a_2, \cdots \in \{0, 2\}$). Montrer que I est un intervalle de longueur 3^{-n}, mais $F(I)$ est un intervalle de longueur 2^{-n}.
8. Montrer que F n'est pas dérivable en un point de l'ensemble de Cantor.

Solution de l'exercice 2.

1. On constante sur le dessin que la fonction F_n est constante sur les intervalles qu'on "enlève" de $[0, 1]$ comme dans la construction de l'ensemble de Cantor et a une pente de plus en plus "abrupte" sur les intervalles "restants".
2. Récurrence.
3. Récurrence. On peut montrer plus, si J_{n_0} est un intervalle ouvert de longueur $\frac{1}{3^{n_0}}$ qu'on enlève à l'étape n_0, alors pour tout $n \geq n_0$ on a F_n constante sur cet intervalle J_{n_0}.
4. La limite uniforme des fonctions continues est continue. De plus F_n est croissante pour chaque $n \in \mathbb{N}$, donc par passage à la limite F est croissante et $F_n(0) = 0$ pour tout n implique $F(0) = 0$. De même $F(1) = 1$. Par passage à la limite dans le point 3. on obtient que F est constante sur les intervalles J_n enlevés.
5. On a, pour un $x \in [0, 1] \backslash C$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x \in J_{n_0}$ un intervalle qu'on a enlevé à l'étape n_0. Par les propriétés montrées au point 3. on a que F est constante sur un voisinage de x donc $F'(x) = 0$. Or $m(C) = 0$ donc $F'(x) = 0$ p.p.
6. On démontre par récurrence que $F_N(\sum_{n=1}^N a_n 3^{-n}) = \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{2} 2^{-n}$ pour tout $a_1, a_2, \cdots \in \{0, 2\}$. On a donc, pour tout $m \geq N$, $F_m(\sum_{n=1}^N a_n 3^{-n}) = \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{2} 2^{-n}$ pour tout $a_1, a_2, \cdots \in \{0, 2\}$. Par passge à la limite $F(\sum_{n=1}^N a_n 3^{-n}) = \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{2} 2^{-n}$ pour tout $a_1, a_2, \cdots \in \{0, 2\}$ et ceci pour tout $N \in \mathbb{N}$. La fonction F étant continue, on obtient le résultat pas passage à la limite.
7. On utilise le point précédent et le fait que $\frac{1}{3^n} = \sum_{j=0}^\infty \frac{2^j}{3^{n+1+j}}$ pour en déduire que $|F(I)| = \frac{1}{2^n}$.
8. Soit $x \in C$. Alors il existe une suite décroissante d'intervalles I_n de longueur $\frac{1}{3^n}$ comme au point précédent qui contiennent x. On considère $x_n \in I_n$ le bout de l'intervalle le plus éloigé de x. Alors x_n n'appartient pas à I_{n+1}. Par la croissance de la fonction F on a $|F(x) - F(x_n)| \geq |F(I_{n+1})| = \frac{1}{2^{n+1}}$ et par ailleurs $|x - x_n| \leq \frac{1}{3^n}$. Donc $\left|\frac{F(x)-F(x_n)}{x-x_n}\right| \geq \frac{3^n}{2^n 2} \to \infty$ quand $n \to \infty$ alors que $|x - x_n| \to 0$ quand $n \to \infty$. Donc F n'est pas dérivable en x point quelconque de C.

Exercice 3.($**$) Montrer qu'une suite de boules contenant un point $x \in \mathbb{R}^d$ et dont les rayons tendent vers zéro converge gentiment vers x.

Solution de l'exercice 3. Soit $(B(x_n, r_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de boules contenant un point $x \in \mathbb{R}^d$ où $(x_n)_n$ désigne la suite des centres de boules et $(r_n)_n$ la suite des rayons tendant vers 0. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = r_n + ||x - x_n||$ et $B(x, s_n)$ la boule de centre x et de rayon s_n. Comme $x \in B(x_n, r_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il est clair que $B(x_n, r_n) \subset B(x, s_n)$ et $s_n \leq 2r_n$. D'où ensuite par homogénéité de la norme que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\lambda(B(x_n, r_n)) \leq \frac{s_n^d}{2^d}\lambda(B(0, 1)) \leq \frac{1}{2^d}\lambda(B(x, s_n))$$

où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

Remarque : La constante $\dfrac{1}{2^d}$ est la meilleure possible comme on peut s'en rendre compte pour $d = 2$ et avec $||\cdot||$ la norme 1 ou ∞.

Exercice 4.($*$) Soit $F(x) = x^2 \sin(x^{-1})$ et $G(x) = x^2 \sin(x^{-2})$ pour $x \neq 0$ et $F(0) = G(0) = 0$. Montrer que F et G sont différentiables partout (y compris en 0), $F \in BV([0,1])$ et $G \notin BV([0,1])$.

Solution de l'exercice 4. On calcule

$$F'(x) = \begin{cases} 2x\sin(x^{-1}) - \cos(x^{-1}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

et

$$G'(x) = \begin{cases} 2x\sin(x^{-2}) - 2x^{-1}\cos(x^{-2}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

On a F' finie sur $[0,1]$ ce qui implique qu'elle est $BV[0,1]$ (par le théorème d'accroissements finis). Pour montrer que G n'est pas dans BV on considère une suite de points $x_k \in]0,1[$ tels que $\sin(x_k^{-2}) = (-1)^k$. On a $x_k^{-2} = (-1)^k \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Ainsi

$$|G(x_{k+1}) - G(x_k)| = 2x_{k+1}^2 + 2x_k^2 = \frac{2}{(-1)^{k+1}\frac{\pi}{2} + 2(k+1)\pi} + \frac{2}{(-1)^k\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$$

En prenant la partition $t_0 = 0 < t_1 = x_N < t_2 = x_{N-1} < ... < t_N = x_1 < t_{N+1} = 1$ pour $N \in \mathbb{N}$, on obtient la somme partielle d'une série qui diverge, donc $G \notin BV[0,1]$.

Exercice 5.($*$) Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Montrer qu'on a l'équivalence : F est absolument continue et il existe $M > 0$ tel que $|F'| \leq M$ p.p. ssi il existe $M > 0$ tel que $|F(x) - F(y)| \leq M|x-y|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 5. L'implication directe : la fonction F étant absolument continue, on a $F(x) - F(0) = \int_0^x F'(s)ds$. Donc $|F(x) - F(y)| \leq ||F'||_\infty |x-y| \leq M|x-y|$. Pour l'implication réciproque : l'inégalité $|F(x) - F(y)| \leq M|x-y|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ implique F absolument continue. Donc il existe F' et $F(x) - F(y) = \int_y^x F'(s)ds$. Alors $|\frac{F(x)-F(y)}{x-y}| \leq M$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$. En faisant tendre y vers x on obtient $|F'(x)| \leq M$ p.p.

Exercice 6.($**$) **(Existence des mesures de Stieltjes : cas des mesures finies)**

On note R_1 l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ qui sont croissantes continues à droite et telles que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$.

Remarque : lorsque f est une fonction croissante continue à droite définie sur un segment $[a,b]$ avec $f(a) \geq 0$ et $f(b) = 1$, on étend à gauche de a par 0 et à droite de b par 1 pour se ramener à une fonction sur $\mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses. De même la valeurs 1 n'a pas d'importance. Le caractère majoré de f suffit, et donnera une mesure positive finie.

Le but de l'exercice est de prouver en partie le théorème d'existence des mesures de Stieltjes en montrant qu'à toute fonction $f \in R_1$ on peut associer une unique mesure de probabilité $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mu\big(]-\infty, x]\big) = f(x) . \tag{1}$$

Remarque : On sait que réciproquement toute mesure de probabilité $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ est associée par (1) à une fonction f qui appartient à R_1. Il y a donc une correspondance bijective établie par (1) entre R_1 et les mesures de probabilité $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$.

Dans la suite, on fixe $f \in R_1$ et on introduit une fonction $f_\# :]0,1[\to \mathbb{R}$, appelé *pseudo-inverse continu à droite de* f, définie par

$$\forall y \in]0,1[, \quad f_\#(y) = \inf \left\{ x \in \mathbb{R} : f(x) > y \right\} .$$

1. Montrer que $f_\#$ est bien définie et croissante. Montrer que si f est continue strictement croissante, f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$ et que $f_\#$ est sa fonction réciproque.
2. Montrer que $f_\#$ est continue à droite.
3. Montrer pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$]0, f(x)[\subset \{ y \in]0,1[: f_\#(y) \leq x \} \subset]0, f(x)] .$$

4. On note ℓ, la restriction de la mesure de Lebesgue à $]0,1[$. On note μ la mesure image par $f_\#$ de ℓ. Montrer que l'on a bien (1).
5. Soit (X, ν) un espace de probabilité et $\varphi : X \to \mathbb{R}^+$ une fonction positive mesurable. On introduit pour $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \nu(\{ t \in X \, ; \; \varphi(t) \leq x \}).$$

   (a) Montrer que f est une fonction croissante, continue à droite, qui vérifie bien les hypothèses ci-dessus.

   (b) Montrer que la mesure de Stieltjes μ_f associée à f est la mesure image de ν par φ.
   En particulier, on a pour $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est positive ou μ_f intégrable,

$$\int_{\mathbb{R}} F \, d\mu_f = \int_X F(\varphi(t)) \, d\nu(t).$$

6. On se donne une fonction croissante continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ avec $f(a) = 0$ et $f(b) = 1$. *(Notez qu'on peut toujours se ramener à ce cas en posant $\tilde{f}(x) = \frac{1}{f(1)-f(0)}(f(x) - f(0))$).* On étend (continument) la fonction f comme mentionné plus haut. Soit donc μ la mesure de Stieltjes, dont on remarquera qu'elle est caractérisée par $\mu([a,x]) = \mu(]a,x]) = f(x)$ pour $x \in [a,b]$. Comme f est continue, μ est *diffuse*, au sens où $\mu(\{x\}) = 0$ pour tout x.
   Montrer que μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue si et seulement si f est absolument continue sur $[a,b]$, et qu'alors la densité de μ est f', qui existe presque partout.

Solution de l'exercice 6.

1. Soit $y \in]0,1[$. Comme $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 < y < 1 = \lim_{x \to \infty} f(x)$, il existe $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) < y < f(x_1)$. Cela montre d'une part que l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > y\}$ n'est pas vide car il contient x_1 ; d'autre part, comme f croît et comme pour tout $x \in]-\infty, x_0]$, $f(x) \leq f(x_0) < y$, cela montre d'autre part que $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > y\} \subset$

$]x_0, \infty[$. Par conséquent, l'infimum $\inf\{x \in \mathbb{R} : f(x) > y\}$ est bien défini et c'est un nombre compris entre x_0 et x_1, c'est-à-dire un nombre réel. Cela montre que $f_\#$ est une fonction bien définie de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$.

Montrons que $f_\#$ est croissante. Soient $0 < y_0 < y_1 < 1$. Si $f(x) > y_1$ alors $f(x) > y_0$. Par conséquent, $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > y_1\} \subset \{x \in \mathbb{R} : f(x) > y_0\}$, ce qui implique que $\inf\{x \in \mathbb{R} : f(x) > y_0\} \leq \inf\{x \in \mathbb{R} : f(x) > y_1\}$, c'est-à-dire $f_\#(y_0) \leq f_\#(y_1)$. Cela montre bien que $f_\#$ est croissante.

Supposons ensuite que f est continue et strictement croissante. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $0 \leq f(x-1) < f(x) < f(x+1) \leq 1$, ce qui montre que $f(x) \in]0,1[$. Donc $f(\mathbb{R}) \subset]0,1[$. Soit $y \in]0,1[$, puisque $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 < y < 1 = \lim_{x\to\infty} f(x)$, il existe $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) < y < f(x_1)$; comme f est continue, le théorème des valeurs intermédiaires permet alors d'affirmer qu'il existe $x \in [x_0, x_1]$ tel que $f(x) = y$ et donc $y \in f(\mathbb{R})$. Cela montre que $f(\mathbb{R}) =]0,1[$.

Soit $y \in]0,1[$. Supposons qu'il existe $x, x' \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = f(x') = y$. Puisque f est supposée strictement croissante, si $x < x'$, alors $f(x) < f(x')$ ce qui est contradictoire ; de même, si $x' < x$, alors $f(x') < f(x)$ ce qui est contradictoire également. Donc cela implique que $x = x'$. Donc pour tout $y \in]0,1[$, il existe un et un seul antécédent de y par f, c'est-à-dire, un et un seul $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$. Cela montre que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$ et on note (temporairement) $g :]0,1[\to \mathbb{R}$ sa bijection réciproque. Soit $y \in]0,1[$. On observe que $y = f(g(y))$ et puisque f est strictement croissante, on a $\{x \in \mathbb{R} : f(x) < y\} = \{x \in \mathbb{R} : f(x) < f(g(y))\} =]g(y), \infty[$. Cela implique donc que $f_\#(y) = \inf\{x \in \mathbb{R} : f(x) < y\} = \inf]g(y), \infty[= g(y)$. Comme cela est vérifié pour tout $y \in]0,1[$, on a bien $f_\# = g$ lorsque f est continue strictement croissante.

2. Comme $f_\#$ est croissante, en tout $y \in]0,1[$, elle a une limite à droite notée $f_\#(y+)$ qui vaut l'infimum $\inf_{z\in]y,1[} f_\#(z)$. Supposons que $f_\#(y+) > f_\#(y)$. Il existe donc $x \in \mathbb{R}$ tel que $f_\#(y+) > x > f_\#(y)$. Comme $x > f_\#(y)$, par définition $f(x) > y$. Comme $\inf_{z\in]y,1[} f_\#(z) = f_\#(y+) > x$, on en déduit que pour tout $z \in]y,1[$, on a $f_\#(z) > x$ et donc par définition $x \notin \{x' \in \mathbb{R} : f(x') > z\}$, ce qui implique que $f(x) \leq z$. Donc pour tout $z \in]y,1[$, on a $f(x) \leq z$. On choisit une suite $z_n \in]y,1[$, $n \in \mathbb{N}$, qui tend vers y. On a donc $f(x) \leq z_n$, $n \in \mathbb{N}$ et donc en passant à la limite $f(x) \leq y$. On a donc montré que s'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f_\#(y+) > x > f_\#(y)$, alors $f(x) > y$ et $f(x) \leq y$, ce qui est contradictoire. Cela implique donc que $f_\#(y+) = f_\#(y)$. Comme cela est vérifié pour tout $y \in]0,1[$, on a montré que $f_\#$ est continue à droite.
3. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Supposons que $y \in]0, f(x_0)[$, c'est-à-dire que $f(x_0) > y$. Alors $x_0 \in \{x \in \mathbb{R} : f(x) > y\}$ et donc $x_0 \geq \inf\{x \in \mathbb{R} : f(x) > y\} = f_\#(y)$. Donc

$$]0, f(x_0)[\subset \{y \in]0,1[: f_\#(y) \leq x_0\} \, ; .$$

On suppose ensuite que $y \in]0,1[$ est tel que $f_\#(y) \leq x_0$. Comme f est croissante l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : f(x) < y\}$ est une demi-droite infinie à droite d'extrémité gauche $f_\#(y)$ (on n'affirme rien sur le fait qu'elle soit ouverte ou fermée, c'est-à-dire sur le fait qu'elle contienne cette extrémité gauche ou non : autrement dit, $\{x \in \mathbb{R} : f(x) < y\}$ est soit $]f_\#(y), \infty[$, soit $[f_\#(y), \infty[$). Comme $f_\#(y) \leq x_0$, pour tout $x' > x_0$, on a $x' \in \{x \in \mathbb{R} : f(x) < y\}$ et donc $f(x') > y$. Soit $x'_n \in]x_0, \infty[$, $n \in \mathbb{N}$, une suite tendant vers x_0. On a $f(x'_n) > y$ et en passant à la limite, puisque f est continue à droite, on obtient $f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x'_n) \geq y$. On a montré que si $y \in]0,1[$ est tel que $f_\#(y) \leq x_0$, alors $y \leq f(x_0)$. Cela montre donc que

$$\{y \in]0,1[: f_\#(y) \leq x_0\} \subset]0, f(x_0)] ,$$

ce qui termine la preuve du résultat désiré.

4. La fonction $f_\#$ est monotone donc mesurable. Par définition de μ, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mu(]-\infty, x]) = \ell(]0,1[\cap f_\#^{-1}(]-\infty, x]))$ où $f_\#^{-1}(]-\infty, x])$ désigne bien entendu la pré-image de $]-\infty, x]$ par $f_\#$. On remarque ensuite que

$$]0,1[\cap f_\#^{-1}(]-\infty, x]) = \{y \in]0,1[: f_\#(y) \in]-\infty, x]\} = \{y \in]0,1[: f_\#(y) \leq x\} .$$

La question précédente implique donc que

$$]0, f(x)[\subset]0,1[\cap f_\#^{-1}(]-\infty, x]) \subset]0, f(x)]$$

et donc que

$$f(x) = \ell(]0, f(x)[) \leq \mu(]-\infty, x]) = \ell(]0,1[\cap f_\#^{-1}(]-\infty, x])) \leq \ell(]0, f(x)]) = f(x),$$

c'est-à-dire $f(x) = \mu(]-\infty, x])$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

5. Soit μ la mesure image de ν par φ. On rappelle que μ est la mesure sur les boréliens de $\mathbb{R}$ donnée par $\mu(B) = \nu(\varphi^{-1}(B))$. Ainsi

$$\mu(]\infty, x]) = \nu(\{t \in X ; \varphi(t) \leq x\}) = f(x).$$

Ainsi, f est la fonction de distribution de ν, qui est une probabilité puisque $\mu(\mathbb{R}) = \nu(X) = 1$. Elle vérifie bien les hypothèses voulues, et de plus, une probabilité boréliennes étant déterminée par sa fonction de distribution, on obtient bien que $\mu_f = \nu$. *Notons en particulier que $\mu_f(\{x\}) = \mu(\{x\}) = \nu(\{t ; \varphi(t) = x\})$. On obtient des Dirac aux valeurs pour laquelle φ est constante sur un ensemble de ν-mesure non-nulle.*

6. Cette dernière question est quasiment une application directe du cours. Si μ est absolument continue, on peut revenir à la définition ou utiliser qu'elle a une densité intégrable notée g, et qu'alors $f(x) = \int_a^x g$ pour $x \geq 0$, ce qui garanti d'après le raisnement fait en cours que f est absolument continue, et dérivable presque partout avec $g = f'$ presque partout. Réciproquement, si f est absolument continue, on sait que f est dérivable presque partout et que $f(x) = \int_a^x f'$ pour $x \geq 0$. Ainsi, si on note ν la mesure de densité f' par rapport à la mesure de Lebesgue , alors on aura que ν est une mesure de probabilité (borélienne) qui vérifie $\nu(]\infty, x]) = \mu(]\infty, x])$ pour tout x, et donc $\nu = \mu$.

Exercice 7.$(*)$ Soit BV l'espace des fonctions sur $[a, b]$ à variation bornée.

1. Montrer que toute fonction à valeurs réelles, monotone sur $[a, b]$ est à variation bornée.
2. Montrer que si $f \in BV$ est à valeurs réelles, alors il existe f_+ et f_- monotones bornées sur $[a, b]$ telles que $f = f_+ - f_-$.
   Indication : on pourra s'inspirer de la preuve du théorème 3.29 du cours.

3. Montrer que si $f \in BV$ alors f admet une limite à droite et à gauche en tout point. Au point x, on les notera $f(x \pm 0)$.
4. Montrer que si f est de plus continue à droite, alors dans la décomposition précédente, on peut choisir f_+ et f_- continues à droite.
5. Soit $f \in BV$, avec f continue à droite en tout point de $[a, b[$.
   (a) Montrer qu'il existe une mesure de Borel sur $[a, b]$, disons, μ_f telle que
   $$f(x) - f(a) = \mu_f([a, x]) \quad \text{pour} \quad x \in [a, b].$$
   On appelle μ_f la mesure de Stieltjes-Lebesgue associée à f.

   (b) Vérifier que $|\mu_f|([a, b]) = \mathrm{var}(f)$.
   (c) Montrer que la fonction $F(\cdot) = T_f(a, \cdot)$ variation totale est une fonction de répartition (celle continue à droite) de $|\mu_f|$, la variation totale de μ_f.
   (d) Montrer que $\mu_f \ll \lambda_1$ si et seulement si f est absolument continue sur $[a, b]$.
6. Montrer que toute $f \in BV$ est différentiable Lebesgue presque partout et que $f' \in L^1([a, b])$.

Solution de l'exercice 7.

1. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction monotone. Alors, pour toute subdivision $a = t_0 < t_1 < ... < t_N = b$ de $[a, b]$, $\sum_{j=1}^{N} |f(t_j) - f(t_{j-1})| = \sum_{j=1}^{N} f(t_j) - f(t_{j-1}) = b - a$, d'où $var(f) = b - a < +\infty$.
2. Posons $T_f : x \in [a, b] \mapsto \sup\{\sum_{j=1}^{N} |f(t_j) - f(t_{j-1})| \; ; \; N \in \mathbb{N}, \; a = t_0 < t_1 < ... < t_N = x\}$. f est à variation bornée donc $T_f(x)$ existe pour tout $x \in [a, b]$. De plus, si $b > x' > x > a$ et $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = x$:
   $$\sum_{j=1}^{N} |f(t_j) - f(t_{j-1})| = \sum_{j=1}^{N+1} |f(u_j) - f(u_{j-1})| - |f(x') - f(x)|$$
   avec $u_0 = t_0, ...u_N = t_n$ et $u_{N+1} = x'$. On en déduit aisément
   $$T_f(x) \leq \min\left(T_f(x'), T_f(x') + f(x') - f(x)\right)$$
   c'est-à-dire la croissante de f et $T_f + f$, il suffit maintenant de poser $f_+ = T_f + f$ et $f_- = T_f$ pour achever la question.
3. D'après la question précédente f s'écrit comme la différence de deux fonctions croissantes, il suffit donc de montrer que toute fonction croissante admet une limite à droite et à gauche en tout point. Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction croissante et $x \in [a, b[$, alors pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante et convergent vers x, $(g(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante et minorée par $g(x)$ elle converge. D'où la limite à droite en tout point de $[a, b[$. On obtient de même la limite à gauche en tout point de $]a, b]$.
4. Il suffit de montrer que T_f est continue à droite si f l'est. Si f est continue à droite, alors pour tout $x \in [a, b[$ et tout $\epsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ de continuité à droite et d'après la majoration obtenue à la question **2.** :
   $$T_f(x') - \epsilon \leq T_f(x) \leq T_f(x') \leq T_f(x') + \epsilon$$
   pour tout $x' \in [x, x + \delta[$. Ceci achève de montrer la continuité à droite de T_f et donc celle de f_- et f_+ par construction.

5. (a) On utilise le résultat de l'exercice précédent et le résultat des questions **2.** et **4.** : $f = f_+ - f_-$ avec f_+ et f_- croissante et continue à droite. Quitte à prolonger f_+ et f_- par 0 et 1 sur $]-\infty, a]$ et $[b, -\infty[$ et à prendre $g_+ = \dfrac{f_+ - f_+(a)}{f_+(b) - f_+(a)}$ et $g_- = \dfrac{f_- - f_-(a)}{f_-(b) - f_-(a)}$ on peut supposer que f_+ et f_- valent 0 sur $]-\infty, a]$ et 1 sur $[b, +\infty[$. Il existe donc deux mesures de Stieltjes associées μ_+ et μ_-, elles sont de probabilités. $\mu = \mu_+ - \mu_-$ vérifient les propriétés voulues et est de Borel.

   (b) Toute subdivision de l'intervalle $[a, b]$ fournit une partition de boréliens de $[a, b]$ donc trivialement
$$\mathrm{var}(f) \leq |\mu_f|([a, b])$$
   Réciproquement si $\epsilon > 0$ et $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une partition de boréliens de $[a, b]$, alors il s'agit de montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}$, il existe une suite d'intervalles $[a_j^i, b_j^i]$ inclus dans E_i telle que :
$$\mu_f(E_i) - \frac{\epsilon}{2^i} \leq \sum_{j=1}^{n} |f(a_j^i) - f(b_j^i)|$$
   Et ceci repose sur la construction de la mesure de Stieltjes à l'exercice précédent, en effet f étant continue à droite, les fonctions f_+ et f_- le sont ; et μ_+ et μ_- étant les mesures images de la mesure de Lebesgue sur $[a, b]$ par les pseudo-inverses de f_+ et f_- respectivement, héritent de la régularité intérieure de la mesure de Lebesgue. Le résultat s'ensuit, quitte à recombiner les éléments a_j^i, b_j^i en une suite croissante de partitions de $[a, b]$.

   (c) Notons F la fonction de répartition de μ_f continue à droite, alors d'après la question précédente, pour tout $x \in [a, b]$:
$$\begin{aligned} F(x) &= \mu_f([a, x]) \\ &= \mathrm{var}(f_{|[a,x]}) \\ &= T_f(a, x) \end{aligned}$$

   (d) Dire que μ_f est absolument continue par rapport à λ_1 c'est dire que :
$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall I \textit{intervalle fermé de } [a, b], \lambda_1(I) \leq \delta \Rightarrow \mu_f(I) \leq \epsilon$$
   Mais, comme nous avons l'égalité suivante d'après la question précédente :
$$\mu_f(I) = \sup\{\sum_{j=1}^{N} |f(t_j) - f(t_{j-1})| \mid \min I = t_0 < t_1 < ... < t_N = \sup I\}$$
   L'absolue continuité de f est bien équivalente à celle de μ_f.

6. Soit $f \in BV$. Quitte à modifier f sur un ensemble dénombrable de points (les points de discontinuité des fonctions croissantes), on peut supposer que f est continue à droite. D'après la question précédente, on sait qu'il existe une mesure réelle μ_f de

Stieltjes associée. Si on se donne en tout point une suite de boréliens $(E_j(x))$ on sait qu'en presque tout point x on aura que $\frac{\mu_f(E_j(x))}{\lambda(E_j(x))}$ a une limite qui est la densité de la partie absolument continue de μ_f dans la décomposition de Radon-Nikodym (Corrolaire 3.17). Comme dans le cours, on choisit $E_j(x) = [x, x+h]$ et $E_j(x) = [x-h, x]$ et on remarque que $\mu_f([x, x+h]) = f(x+h) - f(x)$ en un point x de continuité de f (donc presque partout). Ainsi, on trouve que f est dérivable en presque tout point, avec $f' = g \in L^1([a,b])$ tel que

$$d\mu_f = g\, d\lambda + \mu_s$$

où $\mu_s \perp \lambda$.

Commentaire BV $\neq$ AC. On voit bien le problème avec cette dérivée $f' = g$: il y a une partie singulière qu'elle ne voit pas. D'après **l'exercice 2**, on ne peut espérer montrer en général que f vérifie la formule :

$$\forall x \in [a,b],\ f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt \tag{2}$$

En effet, la fonction de Cantor donne un exemple de fonction continue, croissante ne vérifiant pas (2), puisque $f' = 0$ presque partout ; dans ce cas μ_f est purement singulière, portée sur l'ensemble de Cantor. On voit ici la différence entre BV et AC.